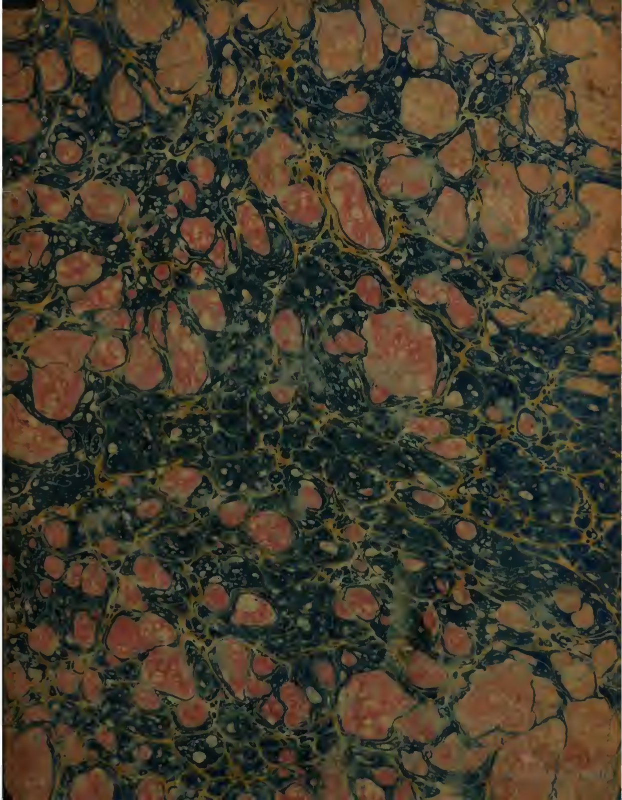


VIRORUM CELEBERR.

GOT. GUL. LEIBNITII

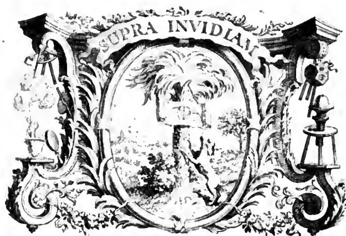
ET

JOHAN. BERNOULLII

COMMERCIUM PHILOSOPHICUM *ET* MATHEMATICUM.

TOMUS PRIMUS,

Ab Anno 1694. ad Annum 1699.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumpt. Marci-Michaelis Bousquet & Socior.
MDCCXLV.

ILLUSTRISSIMÆ

REGIÆ SCIENTIARUM ACADEMIÆ,

MUNIFICENTIA

POTENTISSIMI REGIS

LUDOVICI XIV.

AD

PROMOVENDAM

PHILOSOPHIAM & MATHESIN

FUNDATÆ,

AUSPI-

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI REGIS

LUDOVICI XV.

FLORENTISSIMÆ,

HAS

SOCIORUM ACADEMIÆ MERITISSIMORUM

EPISTOLAS MUTUAS

Humillime

D. D. D.

MARCUS-MICHAEL BOUSQUET.



LECTORI BENEVOLO
SALUTEM.



DITORI consilium atque institutum suum laudanti plerumque objicitur illud, *quis Mercator merces unquam vituperavit ?* Mihi verò, si laudare vellem consilium à me susceptum has edendi Litteras, timendum esset ne regereretur, ut quondam cuidam HERCULEM laudare molienti, *quis unquam talia vituperavit ?* Adeo manifestum est utilissimas esse Doctorum Reipublicæ Doctorum Epistolas. *Etenim*, ut verbis utar Celeberrimi BACONIS *, *nihil sanius, nihil præstantius, quàm hujusmodi Epistolæ. Habent enim plus nativi sensûs, quàm Orationes*, (addi meritò potest & quàm libri ;) *plus etiam maturitatis, quàm colloquia subita.* Quod si consilium hujusmodi in genere commendare supervacaneum est ; tempus omnino tererem, si quid pro his peculiariter Epistolis dicerem. Leviter

* De Augmentis Scientiarum, *lib. II. cap. XII.*

evolve librum hunc, & ubi videbis tot anecdota litteraria; tot acutissimas & solidissimas de rebus altissimis Physicis, Metaphysicis, & Mathematicis commentationes disputationesque, totus, satis novi, librum attentè legendi, considerandi, ediscendi desiderio flagrabis, & de illius utilitate præclara senties. Præsertim, cùm longam annorum seriem continuam complectatur, &, (ut ait idem *Verulamius* †) Epistolæ, *quando continuantur secundum seriem temporum* . . . . . sint *certè ad Historiam pretiosissima supellex*. Loquitur ille quidem de Civili Historia, sed non vereor ut mihi id vitio vertatur, quod ejus verba ad rei litterariæ atque ingeniorum, scientiarumque Historiam, quæ, summo jure, maximo nunc est in pretio, accommodaverim. Sed, quid ego hæc memoro, quid dico *leviter evolve librum*, quasi nomina legisse non sufficeret? Nam, Dii Boni! Quæ nomina respicienti se se statim offerunt? LEIBNITIUS & BERNOULLIUS. Ubi clariora & Doctis chariora reperies? Verumtamen, nec istud, (quantulumcunque illud est,) ut Lectorum cupiditas inflammetur, faciendum superest. Jamdiu desiderantur hæ Litteræ, jamdiu expetuntur, requiruntur, &, si quæ pretio comparari hucusque potuerunt, nunquam nimio constare visæ sunt. Igitur

Hic est, quem petis, ille, quem requiris,
Toto notus in Orbe Litterarum.
Liber . . . .

At, fortasse mussitabit aliquis, plura certè hic sunt, quæ Lectores minimè tangunt. Quandoquidem, pro rerum humanarum conditione, in libris omnibus

Sunt mala, sunt bona, sunt mediocra quædam;

& semper in Epistolis multa sunt, quæ parùm ad Publicum pertineant, parùm Lectoris stomachum sollicitent, quippe parùm aut

† De Augmentis Scientiarum, *lib. II. cap. XII.*

aut nihil utilitatis afferentia, & ad res domesticas, atque Amicorum officia mutua spectantia. Non ignoro sæpiùs de hoc incommodo questos esse Viros doctos, nec, quamvis plura fuerint reposita, querelas non cessavisse. Hinc factum est ut lacunæ quædam hic appareant. Dum enim librum tibi approbare cogor, multa aut leviuscula, aut ad Litterarum Orbem & Scientias non pertinentia delere fuit necesse. Hoc non ægrè laturos beatos LEIBNITII Manes, & æqui bonique ducturum Optimum BERNOULLIUM confido, atque ut id faciat oro obtestorque. Te verò, Lector benevole, Litteras hasce non mancas esse, sed perfectiores (quod ad usum tuum,) quàm si integræ fuissent, intellecturum, animosque nobis additurum spero, quò præclaris aliis operibus Rempublicam litterariam augere pergamus. Vale.

Lausannæ apud *Helvetios* in *Bernensium* Pago. Pridie Kalend. Februar. Ann. MDCCXLV.



INDEX EPISTOLARUM,

EARUMQUE BREVIARIA.

TOM. I.

EPISTOLA I.

Officii ergo. Rogat ut ipsum commendet ANTONIO ULRICO Duci *Brunswicensi*, *pag.* 1

II.

Testatur quàm sit jucundum sibi cum BERNOULLIO Commercium Epistolicum. Communicat consilium scribendi De *Scientia Infiniti*. De Tetragonismo universali per motum. In quadraturis desiderata, 3

III.

Declarat quam vellet ipsum invisere. De *Scientia Infiniti*. De Methodo Tangentium inversâ, quæ invenerit. De Calculo percurrentium. Quæ quadraturæ ad Circuli & Hyperbolæ quadraturam reduci possint, 5

IV.

De construendis æquationibus differentialibus homogeneis. De Calculo percurrentium seu exponentialium. De construendis Curvis ex data Tangentium conditione. De quadraturis ad series revocandis. De *Scientia Infiniti*, 10

V.

De Calculo exponentiali. De construendis Curvis ex Tangentium conditione. De quadraturis ad Circuli & Hyperbolæ quadraturam reducendis. Rectificatio Ellipsis & Hyperbolæ non pendet ab earum quadratura. De Serie universalissima ad quadraturas. De Trajectoriis orthogonalibus, 13

VI.

V I.

De *Scientia Infiniti*. De quadratura curvæ exponentialis. De integrandis quantitatibus logarithmicis. De Seriebus. De quadraturis. De Trajectoriis orthogonalibus, 18

V I I.

De quadraturá Curvæ exponentialis, & integratione quantitatis Logarithmicæ. De ſerie univerſali pro quadraturis. De Problemate Curvæ æquilibrationis. De propagatione Calculi differentialis, 25

V I I I.

Valetudinis ſuæ rationem reddit. De Curva æquilibrationis. Nemo ſibi natus eſt. De Jacobo BERNOULLIO. Series ſummatoria, 32

I X.

De illius infirma valetudine & MALEBRANCHII remedio univerſali. Seriei ſummatoriæ Correctio. Spatia quadrabilia. De quibuſdam Mathematicis Gallis. Dnus. CHIRAC Calculi infiniteſimalis diſcendi cupidus. De Curvarum oſculo. De CRAIGIO & TSCHIRNHAUSIO. De Profeſſione Mathematica apud *Batavos* vacante, 38

X.

De Conſenſu inter poteſtates & differentias. De Curvis *Maximi* vel *Minimi* proprietate gaudentibus. Tentamen ſolutionis per ſeries infinitas. De Curvis tranſcendentibus, quarum infinita puncta aſſignari poſſunt. De Problemate Curvæ æquilibrationis. De methodo quadraturarum *Craigianâ*. De Mechanicâ æquationum differentialium conſtructione. De Profeſſione Mathematica, 46

X I.

De Conſenſu inter Poteſtates & differentias, atque inde promovendo Calculo integrali. De Coefficientibus terminorum poteſtatum inveniendis. De Curvis *Maximi* vel *Minimi* proprietate gaudentibus. De *Maximis Maximorum* vel *Minimis Minimorum*. De *Maximis* numericis. De regreſſûs puncto. De Curvis tranſcendentibus per puncta deſcribendis. De quadraturarum methodo *Craigianâ*. De oſculis Curvarum. De Dynamica & Viribus Corporum. De Profeſſione *Groningenſi*, 52

XII.

De Calculo differentialium promoto. De Coefficientibus terminorum poteſtatum. De Curvis *Maximi* proprietate gaudentibus. De Curvarum oſculis. De Viribus Corporum. De HUGENIO. De NIEUWENTIITIO, TSCHIRNHAUSIO, & Jac. BERNOULLIO. Quomodo Litteratos agere deceat, 65

XIII.

Diſceſſum paranti quædam negotia commendat, 72

XIV.

Ad Profeſſionem *Groningenſem* vocatus Patriam relinquere parat. Seriei univerſalis pro quadraturis nova demonſtratio. De puncto regreſſûs difficultas. De Curvis percurrentibus. De Curvarum oſculis. De Viribus Corporum. De NIEUWENTIITIO, & *Medicinâ Mentis* TSCHIRNHAUSII. De ſuâ indole & valetudine. De dimenſione Curvarum per arcus Circuli. De HUGENIO, 74

XV.

De HOSPITALIO. Difficultatis circa punctum regreſſûs ſolutio. De Curvis tranſcendentibus, annon percurrentes omnes. De oſculis Curvarum. De TSCHIRNHAUSIO. De Viribus Corporum vivis. De HUGENIO, 82

XVI.

Hallenſis Profeſſio BERNOULLIO offertur, 88

XVII.

Proficiſcitur *Groningam*. De Studiis Mathematicis apud *Gallos*. De oſculis Curvarum. De comparandis Curvis cum arcubus Circularibus. De Viribus Corporum. De HUGENIO, 90

XVIII.

Tranſcendentes Curvæ annon percurrentes omnes. De Viribus Corporum & potentiæ æſtimatione ex ponderum elevatione. De actione gravitatis. De HUGENIO. Series ſummatoria. De VOLDERO, 94

XIX.

De ſtudiis Mathematicis *Groningæ*. De Tranſcendentibus Curvis. De Potentiæ æſtimatione LEIBNITIO aſſentitur. De HUGENIO. De Serie ſummatoria, 101

XX.

De Viribus Corporum difficultates removet. De differentiis, quarum exponentes non integri, 105

XXI.

De Viribus Corporum æstimandis objectiones ulteriores. De Controversia LEIBNITII & PAPINI circa id argumentum. De actione gravitatis. Ex impulsu obliquo & Viribus centrifugis æstimatio Virium. De Mediorum resistentia. De perpetuo mobili, 108

XXII.

De PAPINO, suaque cum illo controversiâ. De actione Corporis infinite velocis. De incursu obliquo. Æstimatio Virium *à priori*. De celeritatibus elementatibus. De motu perpetuo. De Dynamicâ. De conservatione Virium & directionis. De celeritate auctâ. De Ipecacuanha, 119

XXIII.

De actione gravitatis. De actione Corporis infinite velocis. De Mediorum resistentia. De æstimatione Virium *à priori*. De Curva æquabilis pressionis. De centri gravitatis quiete vel motu non turbato ex actionibus Corporum. De Legibus motus. De resistentia, 128

XXIV.

De resistentia mediorum. Controversia cum PAPINO. De æstimatione Virium *à priori*. De centri gravitatis quiete vel progressu uniformi. Tractatus Dynamicus. De Legibus motus. De notis algebraicis, 138

XXV.

De actione gravitatis. De æstimatione Virium *à priori*. De conservatione Virium & directionis. De Corpore à pluribus simul Potentiis impulso. Ac resistentia mediorum. Demonstratio Centri oscillationis ex Viribus vivis. De signis algebraicis. De notis *Hugenii* ad *Acta Eruditorum*, 148

XXVI.

De actione gravitatis. De æstimatione Virium *à priori*. De NIEUWENTIITIO. De Signis algebraicis. De HUGENIO, 156

XXVII.

De actione materiæ gravificæ in Corpora gravia. De ictûs vi & quantitate

titate. De æstimatione Virium *à priori*. De NIEUWENTIITIO. De HUGENII annotationibus ad *Acta Erudit.* De TSCHIRNHAUSII putatitio invento comparandi arcus parabolicos. Curvæ Brachystochronæ Problema, 160

XXVIII.

De actione materiæ gravificæ. De æstimatione Virium *à priori*. Differtatio Dynamica. De annotationibus *Hugenianis*. Quanti fecerit Calculum differentialem. Problematis Curvæ Tachystoptotæ sive Brachystochronæ solutio, 168

XXIX.

De actione materiæ gravificæ. De æstimatione Virium *à priori*. De Problemate Brachystochronæ. Cyclois est linea segmentorum. De Synchronâ. De Trajectoriis orthogonalibus. De *Hugenii* notis. De CLUVERIO. WALLISII Operum Editio, 174

XXX.

De Problematis Brachystochronæ termino prorogando. De ejusdem solutione directâ celandâ. Solutionis *Leibnitianæ* fundamentum. De schediasmate *Jac.* BERNOULLII. De NIEUWENTIITIO. De tractione gravitatis & æstimatione virium *à priori*, 182

XXXI.

De Problemate Brachystochronæ. De NIEUWENTIITIO. De actione gravitatis & æstimatione virium *à priori*. Methodi Fluxionum & Calculi differentialis identitas. De FULLENIO. De HOLLANDERI amaltheo astronomico, 187

XXXII.

De Problemate Brachystochronæ. De Synchrona & Trajectoriis orthogonalibus. De NEWTONO. De GREGORII Elementis Dioptricæ & Catoptricæ. De Axiomatibus demonstrandis. De HOLLANDERI amalthæo astronomico, 193

XXXIII.

Solutio Problematis *à Jacobo* BERNOULLIO propositi, 198

XXXIV.

LEIBNITIUS creatus Consiliarius. Quales curvæ in se redeuntes possint rectificari. Error TSCHIRNHAUSII. De Progressionis harmo-

harmonicæ summatione compendiariâ. De annotationibus *Hugenianis* ad *Acta Eruditorum*. De Problemate Brachystochronæ & Trajectoriis orthogonalibus. GREGORII Tractatus Catoptrico-Dioptricus. De Axiomatum Demonstratione, 200

XXXV.

De notis *Hugenianis*. De Curvis rectificabilibus & quadrabilibus. De Curvis ex plurium punctorum relatione determinandis. Varia, 206

XXXVI.

De HUGENII adnotationibus ad NEWTONUM. De quadraturis. De Trajectoria orthogonali Logarithmicarum, 208

XXXVII.

De *Analysi infinite parvorum* HOSPITALII. De tangentibus curvarum per Focos descriptarum. De curvis ex plurium punctorum proprietate determinandis. De Serie quadratorum reciproca. Varia, 211

XXXVIII.

De Serie quadratorum reciproca & summandis quantitatibus Logarithmicalibus, 214

XXXIX.

De summis Serierum ad quadraturas & æquationes differentiales reducendis, & de ipsis in partes datam rationem habentes dispescendis. De GRONINGIO. Curva unicum spatium habens quadrabile. De NIEUWENTIITII scripto, 217

XL.

De summandis quantitatibus logarithmicalibus. De seriebus. De appropinquationibus ex fonte implicationum. De GRONINGII historia Cycloïdis. De TSCHIRNHAUSII scripto, 226

XLI.

De quantitatum logarithmicalium summatione. De seriebus. Cycloïdis segmenta innumera quadrabilia. De TSCHIRNHAUSIO. De tentamine quodam solutionis Probl. celerrimi descensus. Dni. SAUVEUR scheda de Problemate celerrimi descensus, 231

XLII.

Tentamen Solutionis Probl. Brachystochronæ refutatur. De SALVATORE,

TORE, TSCHIRNHAUSIO & GRONINGIO. Varia. 236

XLIII.

De eodem tentamine Prob. Brachyſtochronæ. De SALVATORE. De ludis & arte conjectandi. De Probl. celerrimi deſcenſus. De TSCHIRNHAUSIO & GRONINGIO, 242

XLIV.

De NIEUWENTIITIO. De Probl. celerrimi deſcenſus. De Curva ſegmentorum, i. e. illa quæ rectas per datum punctum actas ita ſecat, ut ſegmentorum datæ poteſtates datam ſummam efficiant, 246

XLV.

De ſolutione *Hoſpitaliana* Probl. celerrimi deſcenſus, 249

XLVI.

De Arte conjectandi. Varia, 251

XLVII.

De NIEUWENTIITIO. De Probl. celerrimi deſcenſus. De Catenaria per maximum Centri gravitatis deſcenſum determinanda. De Curva ſegmentorum, 252

XLVIII.

De inventione Curvæ ſegmentorum. De catenaria & maximo deſcenſu centri gravitatis. De Probl. celerrimi deſcenſus ſolutionibus, 257

XLIX.

De inventione Curvæ ſegmentorum tam *Leibnitiana*, quam *Newtoniana*, & *Bernoulliana*. De Curva quæ rectas per datum punctum actas ita ſecat ut ſolidum ſub uno ſegmento & alterius quadrato ſit datum. De NIEUWENTIITIO, & TSCHIRNHAUSIO. De Brachyſtochrona datæ Longitudinis, 261

L.

De ſolutionibus Problematis celerrimi deſcenſus, præſertim NEWTONIANA. De Epiſtola BELVALLII. De animadverſionibus ſuis in *Principia* CARTESII. De inventione Curvæ ſegmentorum, alteriuſque affinis, 266

LI.

De ſolutione *Newtoniana* Problematum ſuorum. De inventione Curvæ ſegmentorum, 271

LII.

De Curva ſegmentorum. Obſervatio Dioptrica. De Machina arithmetica ſua. De ſolutionibus Curvæ Brachyſtochronæ. De Problemate Iſoperimetrico. De TSCHIRNHAUSIO, 277

LIII.

De Curva ſegmentorum. De Obſervatione dioptrica. De machina arithmetica.

metica. De Problemate Iſoperimetrico, & Curva citiſſimi appulſus ad datam poſitione rectam. De TSCHIRNHAUSIO & LAHIRIO, 281

L I V.

De Curva ſegmentorum. De machina arithmetica. De Curva citiſſimi appulſus & Synchrona. De Problemate Iſoperimetrico, 288

L V.

De Problematibus Fraternis. De Curva citiſſimi appulſus. De Problematis Iſoperimetrici ſolutione. De Animadverſionibus *Leibnitianis* in *Principia* CARTESII. De cauſa duritiei ex motu conſpiranti, 292

L V I.

De occupationibus ſuis. De curva citiſſimi appulſus. De Iſoperimetris. De Synchrona. De Trajectoriis orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Animadverſionibus in CARTESIUM. De MALEBRANCHIO. De cauſa duritiei, 302

L V I I.

De Synchronis. De curva ex infinitis Ellipſibus arcus æquales reſecante. De Iſoperimetris. De Trajectoriis orthogonalibus. De atomis. De legibus motus. MALEBRANCHII ſententia, 308

L V I I I.

De Synchronis. De Trajectoriis orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Iſoperimetris. De MALEBRANCHIO. De Atomis. De Synchrona iterum, 313

L I X.

Differentiationis de curva in curvam Principia, 319

L X.

De methodo differentiandi de curva in curvam, 321

L X I.

De Synchronis. De Curva citiſſimi appulſus. De Trajectoriis Orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Iſoperimetris. De Atomis. De HARTZOEKERO & LA MONTRAEO. Methodus differentiandi de Curva in Curvam promovetur. De Trajectoriis, 323

L X I I.

De Trajectoriis. De curva citiſſimi appulſus. De virium æſtimatione, & legibus Motus, 334

L X I I I.

De methodo differentiandi de curva in curvam. De ſolutione *Hoſpitaliana* Problematum ſuorum. De viribus æſtimandis, 337

L X I V.

De integrationibus ad quadraturas revocandis. De Synchrona. De Problemate Iſoperimetrico. De virium æſtimatione. De TSCHIRNHAUSII

HAUSII errore circa arcuum Parabolicorum comparatione. De linea breviſſima in ſuperficie curva, 342

LXV.

De virium æſtimatione. De legibus motus. Philoſophiam experimentalem docendi munus ſibi impoſitum monet, 344

LXVI.

De LA HIRIO & OZANAMMO. De Philoſophia experimentali. De viribus corporum, 346

LXVII.

De LA HIRIO & ROEMERO. De OZANAMMO & Marchione HOSPITALIO. De VARIGNONIO. De viribus corporum, 348

LXVIII.

De Problemate Iſoperimetrico. De LA HIRIO. De *Tſchirnhauſiana* arcuum parabolicorum comparatione. Varia, 351

LXIX.

De controverſia Fraterna. De TSCHIRNHAUSIO, HOSPITALIO & VARIGNONIO, 354

LXX.

De Arcuum Parabolicorum comparatione, & TSCHIRNHAUSII objectionibus. De BIGNONIO & HOSPITALIO, 357

LXXI.

Reſponſio ad Objectiones TSCHIRNHAUSII. De HOSPITALIO. De Parabolarum rectificationibus & transformationibus, 362

LXXII.

De TSCHIRNHAUSIO. De Oenometro quodam. De Barometro portatili. De Aſtronomiæ & Geographiæ progreſſu apud Gallos. De Tautochroniſmo Cycloïdis. De artium deſcriptione, & libello MARIOTTI huc pertinente. De infinito & variis infinitorum ordinibus, 367

LXXIII.

De Oenometro duplici ratione conficiendo. De Thermometris calorem præteritum indicantibus. De Geographia. De TSCHIRNHAUSIO, & MENCKENIO. Solutionum ſuarum Problematis Iſoperimetrici communicatio. De infinitorum ordinibus. De ejuſdem corporis reſurrectione controverſia. De itinere ſuo in *Bataviam*. De VOLDERO. De Logogripho *Hugeniano*, ejuſque Coſmotheoro, 371

LXXIV.

Præcedentem Epiſtolam amiſſam nunciat. De VOLDERO. De Materiæ natura. De infinito. De HUGENII Poſthumis. De Geographia, 378

LXXV.

De virium conſervatione. De infinitorum natura difficultas. An infinitæ quantitates dentur. De ſignis algebraicis. De linea breviſſima in ſuperficie curva, 381

LXXVI.

LXXVI.

De Infinito. De natura corporis. De Oenometro. De TSCHIRNHAUSIO. De Isoperimetri Probl. solutionibus suis. De linea brevissima in superficie curva. De Oenometro Parisiensi. De controversia fraterna, 389

LXXVII.

Mittit Responsionem fraternam, 395

LXXVIII.

De Oenometro Parisiensi. De TSCHIRNHAUSIO & MENCKENIO. De Isoperimetris. De Infinito. De Corporum natura & monadibus. De vacuo & gravitatione universali. De signis algebraïcis. De quadratura arithmetica. Mittit GREGORII *Catenariam*, 396

LXXIX.

Censura *Catenariæ* GREGORII. De TSCHIRNHAUSIO, & Fraterna solutione Problematum suorum. De Infinito, Natura corporis & Monadibus, 400

LXXX.

De *Catenaria* GREGORII. De Infinito. De Academiæ Parisiensis historia. De Machinista quodam Parisiensi, 403

LXXXI.

De *Catenariæ Gregorianæ* Paralogismis. De Infinito, monadibus, & natura corporea. De lege continuatis. De infinitis infinitorum ordinibus. De lege gravitatis *Newtonianæ*. De figura fornicibus aptissima, 406

LXXXII.

De Infinito, natura corporis & Monadibus. De lege gravitatis *Newtonianæ*. De fornicum curvatura. Varia, 413

LXXXIII.

De natura corporis & monadibus. De infinito. De lege gravitatis. De fornicum figura. Hortatur ut meditationes dynamicas in lucem emittat, 417

LXXXIV.

De infinito, Natura Corporis & Monadibus. Varia, 423

LXXXV.

De virium æstimatione. De Infinito, & Natura Corporis. De Dei libertate. Varia, 425

LXXXVI

De virium æstimatione. De Monadibus. De Dei libertate & sapientia. De harmonia præstabilita. De Mente humana. De infinitesimis quantitatibus, 428

LXXXVII.

De Monadibus. De Dei libertate. De vacuo & Atomis. De Commercio animæ cum corpore. De Entelechiarum ortu & interitu. De infinitesimis. De Historia Academiæ Parisiensis. De Phosphoro, 432

LXXXVIII.

De libertate Dei, & permissione mali. De Commercio animæ cum corpore. De Entelechiis. De infinitesimis. De Phosphoro. Gratulatur BERNOULLIO, quod sit in Academiam Parisiensem adscitus, 438

LXXXIX.

De libertate Dei. De Commercio animæ cum corpore. Varia. De GRONINGII *historia Cycloïdis*. De CLUVERIO, 441

X C.

Mittit nonnulla, 444

X C I.

De Dei libertate, deque peccato. De Academia Scientiarum Parisiensi. De Differentiis quarum exponentes fracti vel irrationales. Varia. Mittit Schedam CLUVERII, 445

X C I I.

De litteris LEIBNITII ad VOLDERUM. De Dei libertate. De sua cum quibusdam Theologis controversia. De Academicis quibusdam Parisinis. De Schediasmate *Cluveriano*, 450

X C I I I.

De controversia sua cum VOLDERO. De Dei libertate. De vacuo & atomis. Varia. De aeris compressione, 453

X C I V.

De FATII investigatione lineæ celerrimi descensus. De suis Epistolis a WALLISIO edendis. De CLUVERIO. De aëris compressione. Varia, 456

X C V.

Mittit reliquam partem Opusculi *Fatiani*, suamque ipsius responsionem, qua occasione varia quærit, 461

X C V I.

De VOLDERO. De FATII Opusculo. Investigatio solidi minimæ resistentiæ, 463

X C V I I.

De suis ad Volderum litteris. De opusculo *Fatiano*. Varia, 471

X C V I I I.

De *Leibnitianis* ad VOLDERUM litteris. De lite inter NEWTONUM & FATIUM. De libertate Dei. De aëris compressione & elasticitate, 474

X C I X.

De libertate Dei. De aëris compressione & elasticitate. De WALLISII Operum Tomo tertio, 479

C.

De libertate Dei. De aëris condensatione, & elasticitate. De WALLISIO. Litteræ *Volderianæ*.



INDEX EPISTOLARUM,

EARUMQUE BREVIARIA.

TOM. II.

EPISTOLA CI.

De sua cum VOLDERO Controversia. De aëris condensatione & elasticitate. De WALLISIO & Nationum æmulatione. De MENCKENIO. De natura demonstrationis. De ascensu corporum. De P. HOSTE libro de Navium structura, Pag. 1

CII.

De VARIGNONIO. De substantiarum activitate. De possibili. Varia. Hortatur ut rei navalis scientiam mathematice tractare suscipiat, 5

CIII.

De VOLDERO, substantiarum activitate, & viribus corporum. De possibili & necessario. De re nautica mathematice consideranda De LEIBNITII ad Acad. Parisiensem Epistola, & de Calendarii correctione. De Opp. WALLISII Tomo 3°. 7

CIV.

De Epistola *Bernoulliana* in *Actis* edita. De Calendarii reformatione, 11

CV.

De LEIBNITII Apologia contra FATIUM. De Calendario reformando. Varia, 13

CVI.

De Societate Regia *Berolinensi*. De Calendario. Varia. De re nautica. De possibili & necessario, 15

CVII.

CVII.

De Societate *Berolinensi*. De Phosphoro suo mercuriali. De ROLLIO Calculi differentialis adversario, 18

CVIII.

De Phosphoro mercuriali. De phosphori igniferi inventore. Varia. De Calculi differentialis adversariis, 24

CIX.

De Phosphoro suo mercuriali. De FATIO. De GREGORII responsione ad Examen suæ *Catenariæ*. De CARREO, VOLDERO, BRAUNIO, 26

CX.

De HERMANNI responsione ad NIEUWENTIITIUM. De FATIO, & GREGORIO, & BRAUNIO. De phosphoro mercuriali, 30

CXI.

De phosphoro suo mercuriali. Varia, 33

CXII.

Phosphori mercurialis vasculum petit &c. 34

CXIII.

De invento *Tschirnhausiano*, circa rectificationes. De Arithmetica binaria. Phosphorum mercurialem iterum petit, 35

CXIV.

De Arithmetica binaria. Mittit responsionem ad Objectiones *Rollianos* in Calculum differentialem, 38

CXV.

De Notis *Leibnitianis* in Objectiones *Rollianas* adversus Calculum differentialem. De methodo *Huddeniana* maximi & minimi. De Arithmetica binaria. De HERMANNO. De Controversia fraterna, 40

CXVI.

De Methodo *Huddeniana* maximorum & minomorum. De Arithmetica binaria, 46

CXVII.

CXVII.

De phosphori mercurialis invento Societati *Berolinensi* communicato. De controversia fraterna, 48

CXVIII.

De nova Calendarii forma. Varia. De Methodo Maxim. & Minim. De phosphoro mercuriali. De Opusculo FATIANO, & Astronomia GREGORII, 49

CXIX.

Petit Phosphori mercurialis specimen. De NEWTONI Theoria lunari, & HERMANNO, 51

CXX.

Mittit specimen phosphori mercurialis. Varia. De Cissoidis rectificatione, 53

CXXI.

Nunciat accepisse se phosphorum mercurialem lucidum, 56

CXXII.

Mittit Diploma admissionis in Societatem Regiam Berolinensem, 57

CXXIII.

Gratiarum actio pro sua in eum Coetum receptione, 58

CXXIV.

Suas ad Societatem Berolinensem litteras ipsi commendat, 59

CXXV.

Gratias agit pro Diplomate Societatis Berolinensis. De novo Barometro suo. De GRONINGII historia Cycloïdis. De phosphoro mercuriali suo, 60

CXXVI.

De scientiis, historia naturali præsertim, promovendis. Nunciat phosphorum mercurialem Regi Reginæque ostensum. De novo Barometro. De GRONINGII historia Cycloïdis. De hydracontisteriis *Batavis*. Corporis naturam in extensione sitam non esse, 64

CXXVII.

Varia mittit. De Barometro, & Phosphoro suis. De vitris *Tschirnhausianis*, & de ratione quadam singulari specula caustica conficiendi. De Machinis hydraulicis. De extensione & corporis natura, 66

CXXVIII.

De litteris VARIGNONII, ejusque cum ROLLIO controversia. De Barometro portatili. De speculis causticis. De MENCKENII morbo. De phosphoro mercuriali, 69

CXXIX.

De Litteris suis ad VARIGNONIUM. De Barometro portatili. De speculis causticis. De inventis *Tschirnhausianis*, ejusque vitris. De sectionibus angularibus. Varia. DEMONSTRATIO MULTISECTIONIS ANGULARIS, 74

CXXX.

De sua cum BAYLIO controversia. De GRONINGII recensionibus litterariis, 77

CXXXI.

De ROLLII refutatione & inventis *Tschirnhausianis*. De Barometro portatili. De quibusdam Problem. *Bernoullianis*. De integrandis differentialibus rationalibus methodus *Leibnitiana*. De reducendis quadraturis irrationalibus ad rationales. Varia, 78

CXXXII.

Cum litteris ad VOLDERUM & BAYLIUM, 85

CXXXIII.

Nunciat Regem Prussiæ jussisse ipsi nummum aureum mitti. De suis ad BAYLIUM & VOLDERUM litteris. De PITCARNIO & GREGORIO, 86

CXXXIV.

Cum numismate Regis Prussiæ, 87

CXXXV.

Significat missum esse Regium numisma, 88

CXXXVI.

Gratias agit de numismate Regio. De eodem Epigramma, 89

CXXXVII.

Regi Prussiæ gratias agit de munere Regio, 91

CXXXVIII.

De substantia & natura corporis. Varia, 92

CXXXIX.

De Posthumis *Hugenianis*. De TSCHIRNHAUSII circa Dioptricam promissis. De Curvarum transformationibus. De CUPERO, 93

CXL.

Officii ergo. De *Chuveriano* microscopio, 94

CXLI.

De Curvarum transformatione. De CHEQUÆI methodo fluxionum inversa. De statione mutanda vel conservanda. De quibusdam Mstis. præcipue CARTESII, 95

CXLII.

Laudat consilium manendi *Groningæ*. De studio matheseos. De sua methodo Curvas transformandi. De Opusculo *Chequæano*. Quod Methodum Serierum non habuerit a NEWTONO. De *Posthumis* CARTESII, & ROLLII *Algebra*. De HUGENII phoronomicis, & legibus motus, 97

CXLIII.

De litteris suis amissis. De speculis causticis. Methodus transformandi curvas, ex Principio optico, 102

CXLIV.

De CRAIGIO, & CHEYNÆO, & GREGORIO. De NEWTONI Optica & Theoria lunari. De HALLEIO, 105

CXLV.

De ſpeculis cauſticis. De curvis transformandis & addendis. De lege continuitatis, 107

CXLVI.

De *Bernoullianis* in CHEYNÆUM Animadverſionibus. De PARENTII *Elementis Mechanices*, 111

CXLVII.

De ipſius reſtituta valetudine. De rei medicæ utilitate. De PARENTIO & VOLDERO, 114

CXLVIII.

De ipſius valetudine. De praxi medica. De *Novis litterariis Helvetiæ*, deque Curvarum per focos deſcriptarum tangentibus. De TSCHIRNHAUSIO, 116

CXLIX.

De extenſione & corporis natura, fundamentoque virium. De HUDDENIO, & NIEUWENTIITIO, & TSCHIRNHAUSIO, 119

CL.

De CHEYNÆI iniqua agendi ratione. De MOIVRÆI in CHEYNÆUM Animadverſionibus &c. 121

CLI.

De CHEYNÆO, MOIVRÆO & CRAIGIO. De Conicis HOSPITALII, Obſervationibus FLAMSTEEDII, Objectionibus GREGORII, & quibuſdam NEWTONI operibus, 123

CLII.

De ipſius in Patriam reditu inſtituto, 125

CLIII.

Amiſſam Epiſtolam queritur, ejuſque nonnulla Capita repetit. De CHEYNÆO. De ſua Regula pro determinando valore fractionis $\frac{0}{0}$. VARIGNONII de vi centrifuga error, 126

CLIV.

CLIV.

De Academia Equestri *Berolinensi*. De CHEYNÆO & HOSPITALIO. De VARIGNONIO & MOIVRÆO. De Problematibus solvendis. Varia, 129

CLV.

De errore VARIGNONII circa vires centrifugas. De Professione *Ultrajectina* sibi oblata. De Curvarum transformatione, 131

CLVI.

Nunciat reperisse se Epistolam quæ amissa credebatur. De viribus centrifugis. De Astronomia GREGORII, ejusque errore circa Ellipsim *Cassinianam*. De notatione differentialium. De APOLLONII sectione rationis. De Regula GULDINI apud PAPPUM reperienda, 135

CLVII.

De reditu in Patriam, & *Fratris* ejus morte. De HERMANNO, & vacantibus apud *Batavos* Professionibus. De Mathematicorum inter *Germanos* raritate. De CHEYNÆI libro pro veritate Religionis. De sua methodo transformandi Curvas. De arithmetica dyadica, & Phosphoro mercuriali, 139

CLVIII.

De *Jacobo* BERNOULLIO Distichon. De BERNARDO Professore Leydensi. De transformatione Curvarum ope speculi elliptici, 141

CLIX.

De *Analysi infinite parvorum* HOSPITALII. De curvarum transformatione ex principio optico. De HERMANNO, 143

CLX.

Queritur parum amice exceptas suas Objectiones in Methodum transformandi curvas ope speculi elliptici. Quod idem exequi liceat ope speculi sphærici. Theorema Catoptricum. De motu radente. De HERMANNO. De SAURINI & ROLLII controversia. De LA HIRII paralogismo, 145

CLXI.

De Curvarum transformatione ope speculi sphærici. De lite SAURINUM

inter & ROLLIUM. De LA HIRIO paralogizante. De calculi differentialis inventione. De locis Geometricis, & opere HOSPITALIANO, 149

CLXII.

De suis occupationibus. De motu radente errorem suum agnoscit. De lite SAURINUM inter & ROLLIUM. De LA HIRIO ejusque Tabulis astronomicis. De FLAMSTEEDIO. De VERSALIA, & GRANDIO. Varia, 152

CLXIII.

Mittit Annotationem in BERNARDI *Novellas Reip. litt.* de inventione Calculi differentialis, 155

CLXIV.

Demonstratio Theorematis Catoptrici. De limitanda solutione Probl. transformationis curvarum, ope speculi sphærici. Varia, 156

CLXV.

De transformatione curvarum & motu reptorio. De Calculo integrali, ejusque inventione. De Curvarum apicibus, 160

CLXVI.

De sua valetudine infirma. De Ellipsi in curvam multigibbam transformanda per motum reptorium. De Elliptica peripheria ad Circularem reducenda per approximationem celerrimam. De curvarum apicibus. De ROLLIO & DU TALIO, 162

CLXVII.

De curvis multigibbis. De ROLLIO, DU TALIO, LA HIRIO & PARENTIO. De circuli rectificatione per approximationem. De *Miscellaneis Berolinensibus* edendis, 171

CLXVIII.

De curvis quibuslibet ad circuli peripheriam reducendis per approximationem. De Circuli rectificatione & Quadratrice describenda. De *Miscellaneis Berolinensibus*, 174

CLXIX.

De *Abbate* GALLOSIO. Varia, 178

CLXX.

De HERMANNO. De HOSPITALII Sectionibus Conicis. De Observationibus FLAMSTEEDII. De ZUMBACHIO. De Imperatore Sinensi, 180

CLXXI.

De *Arithmetica universali* NEWTONI. De Botanica. Varia. De curvis multigibbis. De *Genevensium* ad Regem *Borussiæ* consilio irenico, 182

CLXXII.

De infirma sua valetudine. De NEWTONI Regula pro inveniendis diviso-

divisoribus. De curvis multigibbis sine flexu contrario. MOIVRÆI commendatio, 185

CLXXIII.

De ejus valetudine adversa. De NEWTONI Regula. De ROLLIO & P. GOUYE. De Aleæ calculo. De multigibbis, 210

CLXXIV.

De *Miscellaneis Berolinensibus*. De PARENTIO. De MARIOTTI experimento circa Colores Theoriæ *Newtonianæ* adverso, 212

CLXXV.

De curvis multigibbis. De CRAIGII errore. De PARENTIO & LA HIRIO. De MONTMORTII Opere de Aleæ calculo. De *Nic.* BERNOULLII usu *Artis conjectandi in Jure*. De curva elliptica ad circularem reducenda, 214

CLXXVI.

Varia. De æstimandis reditibus ad vitam. De Logica probabilium, 219

CLXXVII.

De oblata sibi Cathedra *Leydensi*. De CRAIGIO, SCHEUCHZERO & MOIVRÆO. De Agnato suo. De *Fratris Arte conjectandi*. De WOLFIO, HERMANNO, GULIELMINO, FARDELLA & CONTIO. De NEWTONI Principiis. Deque HERMANNI Pheronomia, 221

CLXXVIII.

De suis occupationibus. De BURNETO & SCHEUCHZERO. De Logica probabilium. De HERMANNO. De WOLFII Aerometria. De NEWTONI Principiis Philosophiæ. De studio mathematico, 224

CLXXIX.

Optat videre ipsius Iconem. De vocatione *Leydensi*. De SCHEUCHZERI meritis. De POLENI *Miscellaneis*. De WOLFIO. Observationes in NEWTONI *Principia Philosophiæ*. De Problemate virium centralium inverso. De motu Corporum in medio resistente, 227

CLXXX.

Promittit suam Iconem. De Physica mathematice scribenda. De POLENI machina arithmetica. De ejus in NEWTONUM Observationibus. De MARIOTTI experimento circa Colores. Varia. De NUGETO. De sua cum STAHLIO controversia. De HARTSOEKERO, 233

CLXXXI.

Gratias agit pro Icone promissa. De *Miscellaneis Berolinensibus*. De cæruleo *Berolinensi*. De Physica mathemathice scribenda. Observationes aliæ in NEWTONI *Principia*. De MARIOTTI experimento circa Colores. De NUGETO & STAHLIO, 237

CLXXXII.

De *Miscellaneis Berolinensibus*. De VILLEMOTO & STURMIO. De resisten-

resistentia ex defectu lubricitatis. De STAHLIO & HERMANNO, & HARTSOEKERO, 243

CLXXXIII.

De HARTSOEKERI cavillationibus. De HOTTINGERI adversus COPERNICUM disputatione, 247

CLXXXIV.

De Societate *Berolinensi*. De HARTZOEKERO, & HOTTINGERO. De P. REGINALDI *Analysi demonstrata*, 250

CLXXXV.

De *Miscellaneis Berolinensibus*. De STURMIO & SCHEUCHZERO. De resistentia ex defectu lubricitatis. De motu musculorum. De HERMANNO, LA HIRIO, & HARTSOEKERO. De Professionibus *Francofurtana* & *Patavina*. De P. REGINALDI *Analysi demonstrata*, 252

CLXXXVI.

De HERMANNO ad *Francofurtanam* & Nic. BERNOULLIO ad *Patavinam* Professionem vocandis. De nervorum contractione, & RÖMERI morte, &c. 258

CLXXXVII.

De Professionibus *Francofurtana* & *Patavina*. De Cæruleo *Berolinensi*, &c. 261

CLXXXVIII.

De Professionibus, &c. deque valetudine sua, 263

CLXXXIX.

De Professione *Patavina*. De HARTZOEKERO. De Transformatione Curvarum. De Experimentis *Londini* factis circa aëris resistentiam, ejusque per metallum candens transitu, atque refrangibilitate fluidorum pellucidorum. De Problemate *Praga* misso. De VARIGNONII Responsione ad GRANDIUM. De ipsius valetudine, 264

CXC.

De Professionibus *Patavina* & *Francofurtana*. De ratione inter quantitates positivas & negativas imaginaria. De Problemate *Pragensi*, &c. 268

CXCI.

De Professione *Patavina*, 270

CXCII.

De Professione *Patavina*. Hortatur ut Medicinæ mathesin applicet. Varia, 272

CXCIII.

De Professione *Patavina*. De ratione inter quantitates positivas & negativas imaginaria. De Logarithmis Numerorum negativorum. Aliud Problema *Pragense*. De infusione summitatum urticarum. De usu Matheseos

Matheseos in re Medica. De causa elaterii, 275

CXCIV.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De MUYSII Elementis Physices. De sua cum HARTSOEKERO controversia, 278

CXCV.

De Professione *Patavina*, & HERMANNO. Varia, 280

CXCVI.

De Agnato suo & HERMANNO. De Logarithmis Numerorum negativorum. De MUYSII *Elementis Physicæ*. De COLLINSII Commercio Epistolico, 281

CXCVII.

De *Nicol.* BERNOULLIO, & Professione *Patavina*, 284

CXCVIII.

De BERNARDO & MUYSIO. De Commercio Epistolico *Anglorum*, &c. 286

Scheda de nullis Logarithmis numerorum negativorum, 287

CXCIX.

De Agnati sui itinere in *Angliam*. De Filio suo *Nicolao*. Varia, 290

CC.

De historia Calculi differentialis quæ in *Anglia* paratur, 291

CCI.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De NEWTONI errore in comparandis Seriei infinitæ terminis cum differentialibus omnium graduum, 292

CCII.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De errore NEWTONI ejusque Fluxionum Methodo, 296

CCIII.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De NEWTONI in *Actis Lipsiensibus* refutatione. De Calculo differentiali & Fluxionum. Varia, 298

CCIV.

De *Nic.* BERNOULLIO. De Commercio Epistolico COLLINSII, 301

CCV.

De ipsius & Agnati ejus in societatem *Londinensem* receptione. De Calculi differentialis historia. De Logarithmis Numerorum negativorum. Varia, 302

CCVI.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De COLLINSII Commercio Epistolico. De primo Inventore Calculi differentialis, 305

CCVII.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De COLLINSII Commercio Epistolico, 312

CCVIII.

De Logarithmis Numerorum negativorum. De Commercio Epistolico COLLINSII. De Problemate *Anglis* proponendo. De CHEYNÆI jactantia. De HERMANNO, 315

CCIX.

De Professione *Patavina*. De Commercio Epistolico COLLINSII, 319

CCX.

De Professione *Patavina*. De Nova editione *Principiorum* NEWTONI. VARIGNONII Judicium de Inventore Calculi differentialis. De HERMANNO, 321

CCXI.

De sua cum *Newtonianis* lite, deque Doctrina serierum promovenda, 325

CCXII.

De Professione *Patavina*. De HERMANNO. De Serierum Doctrina. De NEWTONO, 327

CCXIII.

De Seriebus convergentibus. De sua cum *Newtonianis* lite. Varia, 329

CCXIV.

De Professione *Patavina*. De Seriebus convergentibus. De NEWTONO, & ejus Enumeratione linearum tertii Ordinis. De *Theoria Manuariæ nauticæ*. De SCHEUCHZERO, 332

CCXV.

Varia, 336

CCXVI.

De *Commercio Epistolico*, & LEIBNITII ad id Responsione. De Serie *Leibnitiana* vel *Gregoriana* pro quadratura Circuli, &c. 337

CCXVII.

De Theoria Nautica. De lite sua cum *Newtonianis*. De Professione *Patavina*. De SCHEUCHZERO, 340

CCXVIII.

De sua Theoria nautica. De *Commercio Epistolico* & KEILII libello. De Problemate *Newtonianis* proponendo, 342

CCXIX.

De re nautica perficienda. Hortatur ut hydraulicam tractet. De Metaphysica NEWTONI. De Problemate *Anglis* proponendo. De æquationibus ad superficies, 346

CCXX.

CCXX.

De re nautica promovenda. De PARENTII annotatis in suam *Manuariam Nauticam*. De Hydraulica mathematice tractanda. De Problemate *Anglis* proponendo. De RICCATI scripto quodam Analytico, 348

CCXXI.

Commendatio *Joh.* ARNOLDI *Angli*. De KEILIO, 351

CCXXII.

De PARENTIO. De *Com.* RICCATI scripto analytico. De longitudinibus ex Theoria lunari inveniendis. De HARTSOEKERO, 352

CCXXIII.

De Filio suo *Nicolao*. De PARENTIO. De RICCATI cum Agnato suo controversia. De HERMANNI Phoronomiâ. De HARTSOEKERO, 355

CCXXIV.

De Problemate *Anglis* proponendo. De ipsius Filio *Nicolao*. De SCHULEMBURGIO. Varia, 358

CCXXV.

Mittit Problema *Anglis* proponendum. De HERMANNI Phoronomia, &c. 361

CCXXVI.

De *Commercii Epistolici* recensione in *Transf. Philos.* De NEWTONI Philosophia. De Problemate *Anglis* proposito. De HERMANNO. De Horologio turbinatorio, 364

CCXXVII.

De *Commercii Epistolici* recensione. Mittit Filii sui solutionem Problematis specialis *Anglis* propositi. Alia proponit difficiliora. De HERMANNO. De Horologio turbinatorio, 367

CCXXVIII.

De Problemate *Anglis* proponendo. De Horologio turbinatorio. De Professione *Patavina*. De suo Opere historico, 371

CCXXIX.

Mittit Problema Trajectoriarum, quale requirebat, *Anglis* proponendum. De Horologio turbinatorio, 373

CCXXX.

De sua cum NEWTONO lite, &c. 375

CCXXXI.

De speciali Problematis Trajectoriarum solutione, alteroque vicissim a TAYLORO proposito. De NEWTONO & KEILIO, 377

CCXXXII.

De Problemate Trajectoriarum. De TAYLORI methodo incrementorum. De sua cum CLARCKIO controversia. De Horologio Turbinatorio, 380

CCXXXIII.

De TAYLORO. De ipsius cum CLARCKIO disceptatione. De Agnati sui ad *Patavinam* Professionem revocatione, 383

CCXXXIV.

Gratulatur ipsius Agnato. De HERMANNI Solutione Problematis Trajectoriarum. De *Russorum* Monarcha, & SCHEUCHZERO, 385

CCXXXV.

De Professione *Patavina*. De HERMANNI Solutione Problematis Trajectoriarum. De VERZALIA. De TAYLORI methodo incrementorum, 387

CCXXXVI.

De NEWTONI solutione Problematis Trajectoriarum. De sua cum CLARCKIO disceptatione. De Mathematicis *Italiæ*. De TAYLORI methodo incrementorum. Varia, 390

CCXXXVII.

Nunciat suum discessum *Patavium*, & gratias agit. Problematis à TAYLORO propositi solutio. De Solutione Problematis Trajectoriarum. De TAYLORI methodo incrementorum, 393

CCXXXVIII.

De Solutione *Newtoniana*, & *Hermanniana*, Problematis Trajectoriarum. De ipsius *Theodicæa*. De ipsius cum CLARCKIO controversia. De VARIGNONIO & PARENTIO, 395



EPISTOLA I.



EPISTOLA PRIMA

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Officii ergo. Rogat ut ipsum commendet ANTONIO ULRICO Duci *Brunsvicensi.*

Vir Amplissime atque Celeberrime.



ISI insignis Tua humanitas jam multis 1694 Mart.
nominibus mihi esset comperta, merito hæsitassem an gravissima negotia, quibus Te distractissimum esse non ignoro, præsentibus hisce interpellare liceret. Quicquid tamen temeritatis hac in parte commissum fuerit, pro more singularis Tuæ erga me benevolentiæ, quam sæpius jam persentiscere mihi contigit, haud difficulter condonabis. Nihil unquam magis mihi cordi fuit quam divinæ Matheseos studium; quippe quod Medicinæ, cui ego aliqualiter addictus, plurimum lucis

 confert

1694 confert, clavemque præbet ad referanda abditissima Naturæ claustra.
Mart. Huic scientiæ, præsertim penitiori ejus parti, a juventute sedulo incumbens, *eos* in illa, per Dei gratiam, feci progressus, ut, si dicere fas est, jam mihi comparaverim præcipuorum Mathematicorum applausum, cumprimis Academiæ Scientiarum *Parisiensis*, aliorumque, quorum necessitudinem in *Gallia* nactus sum: Et Tibi ipsimet, Vir Celeberrime, libuit tenuia mea inventa pluris quam par est æstimare, deque iis benigniorem sententiam passim in *Actis Lipsiensibus*, proferre, quam sperare ullatenus ausus fuerim. Qualiacunque autem illa sint, profiteor, & usque profitebor, ortus illorum unice deberi subtilissimis Tuis lucubrationibus, quas cum Orbe literato subinde communicare non dedignatus fuisti; quæ & satis ostendunt, nihil prorsus in universa Mathesi tam absconditum esse, quod stupendam aciem ingenii Tui acutioris subterfugiat. Hoc ipsum est in causa cur semper in votis habuerim & eo collimarim, quo Amplitudini Tuæ aliquandiu propior esse possem, si modo exoptata occasio sese offerret, ut tanquam ex scaturigine ipsa haurirem, quæ huc-usque non-nisi ex rivulis remotissimis haurire licuit; &, si magnis addere licet parva, arduum studium mathematicum ad majorem perfectionis gradum promovendum adjuvarem. Cum verò, non sine delectamento, intellexerim quod, ut ut sævientis Martis fax ubique fere sit accensa, nihilominus bonæ artes & literæ vestris in regionibus non parum vigeant & floreant, & cum fama ad aures nostras pervenerit quod Celsissimus & Serenissimus Dux ANTONIUS ULRICUS, juxta gravissima regiminis negotia eorumque prudentissimam administrationem, etiam summum delectamentum capiat ex arcanis Naturæ & Artis, eorum indagationem benignissimè promoveat, omniumque scientiarum, præcipue mathematicarum, cultores gratiosissimo nutu foveat & protegat; quam sane regiam suæ Celsitudinis generositatem totus eruditus Orbis nunquam satis laudabit, ego autem humillimo juxta ac profundissimo pectore *perpetuo* recordabor; Hoc, inquam, cum intellexerim, enixe Te, Vir Celeb. *rogatum cupio* ut auctoritate qua polles, *propter summam* Tuam eruditionem, causam meam ita agas apud Celsitudinem suam, ut ad scopum optatum pertingere

gere possim; quod ut Tibi difficile factu non erit, credas velim mihi opus fore longe gratissimum, quodque æternum obstringet

Amplitudinis Tuæ cultorem devotissimum

J. BERNOULLI.

EPISTOLA II.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

Testatur quam sit jucundum sibi cum BERNOULLIO *Commercium Epistolicum. Communicat consilium scribendi de* Scientia Infiniti. *De tetragonismo universali per motum. In quadraturis desiderata.*

Vir Celeberrime, Amice Honoratissime,

PERCOMMODE accidit, quod ante monstratas Serenissimo Duci literas Tuas, mutata consilia & Patriam Urbem Tibi manum injecisse intellexi. Habet illa jus retractus, quanto magis jus retentionis. Atque illi quidem rectè consuluisti; precor etiam ut Tibi, cui omnia fausta opto: cum suis esse, etiam minore emolumento, dulce est; præsertim in dubia spe majorum. Præterea, meo judicio ac sensu, vel sola *Fratris* Tui, insignis Viri, consuetudo poterat Te illic tenere devinctum, dum Vobis mutuo & auxilio estis & incitamento. Mihi certe, si quis Vestri similis adesset, multum ea voluptas aliis plerisque potior foret. Ceterum non humanitati tantum, sed & benevolentiæ imputo verba Epistolæ tuæ in me effusiora, quibus non inferiores etiam res expecto. Itaque, si scripseris in posterum crebrius, & meditationum vestrarum egregiarum subinde me participem feceris, hoc ego maxima affectus argumenta putabo; præsertim cum ego nunc multo plura a Te sperem, quam à me possint reddi. Itaque favore erga me supplere Vos opus est, quæ utilitati Vestræ decedet. 1694 Mart.

A 2 Tuum

1694 Mart. Tuum ingenium natura vividum, florens ætate, exercitationibus mathematicis excolitur: mihi, si qua naturæ vis fuit, tempore plurimum imminuta est, & quod restat fere alio verti debet. Si quid tamen, uti memoras, pristina mea studia Vobis profuere; ego vicissim, quasi jure quodam postulo ut Vestris præclaris inventis frui detur, etsi præter sinceri animi lætos plausus præstare vix quicquam ipse possim.

Cogitavi aliquando me utcunque absolvere his studiis, conscripto Libello, quem *Scientiam infiniti* non incommode inscribi posse putem, in quo superioris Matheseos principia traderentur: hæc enim ubique infiniti considerationem involvunt, quemadmodum Geometria, quæ Algebræ innititur, Mathesim habet generalem quantitatum nonnisi finitarum. Putem autem, non moli tantum, sed & multo magis pretio Operis plurimum accessurum, si vestra egregia reperta adjicerentur. Vestra enim non minus hæc methodus, quam mea est. Itaque & Tuam & *Fratris* Tui, Viri eximii, sententiam expecto. In candore certe meo faxo ne quid desideretis.

Gaudeo meam Tetragonismum generalem per motum (1) Tibi (quemadmodum intellexi) non mediocriter probari: minus est impeditus, quam prima specie videtur, & vix Algebraicæ Geometriæ constructionibus per regulas mobiles facilitate cedit. Usus sum curva rigida prædescripta, ut generalem methodum traderem, nam alioqui curvarum descriptrices rectæ rigidæ vicariam pro curva operam præstare possunt. In eodem omnia plano fieri posse jam annotaveram & ipse in posteriore scheda (2) *Actis* inserta: Sed vel hinc agnosco rem a Te accurate consideratam, qui idem monuisti. Præclarum erit, si aliis Tangentium conversis aptæ constructiones accommodentur, quod nemo Te melius posset: Multa multis modis fieri possunt, sed semper præ cæteris aptam rationem,

(1) *Agitur de Schediasmate quod insertum est* Actis Lipsiens. ann. 1693. *Septemb.* p. 385. *sub hoc titulo.* G. G L. Supplementum Geometriæ dimensoriæ, seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineæ ex data tangentium conditione.

(2) *Eodem anno, mense Octob.* p. 477. *Videatur etiam* p. 527. *mensis Nov. ejusdem anni.*

nem, & velut in hoc destinatam, habet rerum natura. In Quadraturis ipsis duo adhuc potissimum desidero; unum pro constructione, alterum pro analysi. Nam etsi constructionem illam prædictam habeam, desiderarem tamen alias adhuc ad scientiæ augmentum: Et inter alia præstat reducere Quadraturas ad Rectificationes Curvarum, quam contra, ut vulgò fieri solet; eaque de re dudum cum successu cogitavi: nam simplicior utique est dimensio lineæ, quam dimensio superficiei. Pro analysi autem desidero reductionem Quadraturarum omnium ad certa quædam genera, quæ inter se invicem sint irreducibilia, aptasque in eam rem valorum expressiones velim. 1694 Mart.

Cum illustri Viro Dom. *Marchione* Hospitalio, quæ Tibi fuit liticula, compositam puto. Quanto pauciores sunt solidæ scientiæ cultores, eo magis eos inter se amicos esse convenit. Sunt tot alii, quos appello mercenarios in Litteris, qui nihil agerent, nisi vel necessitate, vel pravis cupiditatibus impellerentur. Hos inter se conflictari sinamus. Vale & Dom. *Fratrem Tuum* mihi æstimatissimum à me officiose saluta.

Dabam *Hanoveræ* 21 Martii 1694.

Ad omne officiorum genus paratissimus
Godefridus Gulielmus Leibnitius.

EPISTOLA III.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

Declarat quam vellet ipsum invisere. De Scientia Infiniti. *De Methodo Tangentium inversa, quæ invenerit. De calculo percurrentium. Quæ quadraturæ ad circuli & hyperbolæ quadraturam reduci possint.*

Vir Amplissime atque Celeberrime, Fautor honorande,

Si patria mihi abiturienti manum injecit, hoc tantò *ægrius* fero, quantò majori spe, quam de laribus vestris mihi jamjam invi- 1694 Mai.

1694 Mai. ſendis conceperam, alebar. Repeto & denuò repetam, nec aliter potero quam deplorare ſiniſtram meam ſortem, quæ me ab Ampl. Tua præſentia ſeparatum tenet. Utinam conſilium & medium ſuperſtes eſſet, quod me in viciniam veſtram vocaret: Sane Patria neque retentionis, neque retractus jus in me haberet: nec ejus dulcedo, vel etiam ipſa *Fratris* conſuetudo me teneret devinctum: Sed Fata regunt omnia. Cæterum tot tantiſque Tui erga me affectus teſtimoniis abundat nupera Ampl. Tuæ Epiſtola, ut tantum non pudibundus obmuteſcam. Quæ mihi attribuis, Tibi debentur: Laudes, in quas excurris, non promerui: Meditationum mearum leviuſcularum vis particeps reddi, quaſi vero Sol à Planetis lumen mutuetur· & ſcaturigo aquam ex rivulis petat. Mihi inſuper concedis poteſtatem Tibi crebrius ſcribendi, non igitur indignaberis ſi frequenter moleſtiam creo. Primum intellexi ex litteris *Menkenianis* Ampl. Tuam ad prelum parare Opuſculum complectens *Scientiam infiniti* & pridie ante acceptam Epiſtolam Tuam Dno. MENKENIO reſcripſi, ſimulque unum & alterum Tibi ſignificandum commiſi. Nobis interim & toti Orbi Litterario multum gratulamur de futuro iſto Opere, & jam in anteceſſum ſingulare quid nobis promittimus, non dubitantes quin ut cæteræ Tui ingenii proles, ita & hoc ſui æſtimatores ubique nacturum ſit, præſertim eos qui, quod ſubtile eſt, à communi norunt diſcernere. Non autem è re fore puto, Vir Celeb. exigua noſtra inventa Tuis adjungere: dolerem ſi fœtus hic qui, dubio procul, jam omni poſſibili perfectione gaudet, à nobis dedecoratus in lumen ederetur. Si tamen verum, quod aiunt, oppoſita juxta ſe poſita magis eluceſcunt, eò lubentius Amp. Tuam petiti compotem facere poterimus, quod evidentius Tua à noſtris dignoſcentur. Id ſaltem velimus, ut mentem Tuam apertius explices, qua ratione hoc factum à nobis velis: num ſcilicet ut notabiliora noſtra inventa Tibi ocyus tranſmittamus; num verò, ut Mſto. Tuo ad noſtras prius delato manus, quædam adjiciamus in modum adnotationum.

Gaudeo Te agnoſcere Tuum Tetragoniſmum generalem per motum à me accurate fuiſſe conſideratum: illum cum *Fratre* meo, qui de ejus obſcuritate querebatur, forſan ob non adhibitam perlectio-

lectionem ſatis attentam, explicuiſſem; idem mecum de eo ſenſit, & hanc Tuam methodum non mediocriter probavit. Non ſpero methodum tangentium inverſam generalem unquam detectum iri: mihi tamen ſunt diverſæ regulæ, per quas peculiaria exempla quamplurima reſolvo: in aliis autem pro rerum natura & conſtitutione diverſas tento vias & plerumque non infeliciter. Hoc enim unicum intendo, ut in æquationibus differentialibus indeterminatæ x cum ſuis differentialibus dx ſeparentur ab indeterminatis y & dy, quod palmarium eſt in hoc ſcrutinio: Secus enim ad conſtructionem æquationis differentialis non pervenitur. Ad hoc autem præſtandum multas habeo vias ſpeciales. Ex. gr. ſi in æquatione differentiali nullæ occurrunt quantitates conſtantes, quæ dimenſionum numerum adimplent, poterit illa, quantumvis perplexa, converti in aliam, ubi indeterminatæ cum ſuis differentialibus unius nominis ſeparantur ab indeterminatis alterius nominis; ponendo nempe $x = \frac{zy}{a}$, vel, ſi mavis, $y = \frac{\int x}{a}$. Si verò in æquatione differentiali ſint etiam quantitates conſtantes, ſed indeterminatæ non-niſi ad unicam dimenſionem aſcendunt, res etiam facile mihi expedietur. Si æquatio differentialis eo reduci poteſt, quod plerumque fit, ut x ſit $= y$ multiplicato vel diviſo per quantitatem aliquam, rationalem vel irrationalem, quomodocunque compoſitam ex differentialibus dx & dy, plus conſtante multiplicata vel diviſa per quantitatem, ſi vis, aliter compoſitam ex differentialibus dx & dy; poterit illa æquatio ſemper conſtrui; ſed curva proveniens evadit interdum mechanica ſecundi generis; id eſt, quæ requirit quadraturam mechanicæ ſimplicis inquadrabilis: Contra verò interdum æquatio differentialis, licet ſecundi gradus, per mechanicam ſimplicem conſtruitur, qualis illa $addx = dy^2$, cujus conſtructionem exhibui in ſchediaſmate *Fratris* Actorum anni elapſi, p. 254 (3), quam etiam pridem, una cum Analyſi, Dno. *Marchioni* HOSPITALIO communicaveram. Hac occaſione oportune mentionem injiciam novæ mihi repertæ ſpeciei curvarum *percurrentium*, quæ quaſi medium tenent inter geome- 1694 Mai.

(3) Acta Erudit. 1693. *Jun.* pag. 254. *vel Jac.* BERNOULLI Op. N°. LVI. pag. 570.

1694 Mai. geometricas Carteſii, & inter mechanicas. Curvæ geometricæ vulgo dicuntur illæ, quarum natura exprimitur per æquationem certi & determinati gradus: mechanicæ, quarum æquatio conſtat ex differentialibus. Medias autem vel *percurrentes* appello, quarum æquatio eſt indeterminati gradus, id eſt, in qua literæ indeterminatæ & conſtantes aſcendunt ad dimenſionem indeterminatam, & proinde omnes poſſibiles dimenſiones percurrunt. Hæ æquationes à Tuis tranſcendentibus in eo differunt, quod numerus dimenſionum in illis ſit vagus & indeterminatus, in his verò determinatus ſed incognitus. Cum autem hujuſmodi curvæ percurrentes peculiare requirant ſyſtema ad puncta in Curvis, ad Tangentes, ad Quadraturas, &c. definiendas; jam ab aliquo tempore mihi ideam formavi novi *Calculi percurrentis*, ubi modum trado ſumendi differentialia æquationum percurrentium, & conſtruendi omnes curvas percurrentes, ope Logarithmicæ vulgaris, quæ, ut deprehendo, ipſa etiam eſt curva percurrens; ejus enim æquatio, poſitis abſciſſa x, applicata y & conſtante a, eſt hac $a^x = y$, adhibita nempe unitate, per quam dimenſio x ſubintelligitur diviſa, ita ut hic non lineam indeterminatam, ſed numerum indeterminatum denotet. Leviſſimum
TAB. I. hic exemplum adducam. Sit (*Fig.* 1.) curva quædam FGH percurrens, cujus æquatio eſt hæc $x^x = y$ (poſitis CI, x, & IH, y) quæritur ejus conſtructio, ſubtangens, & quadratura. Conſtructa ad axem productum FCM Logarithmica vulgari ABN, cujus prima applicata CA ſit = unitati aſſumtæ: ducatur BIH parallela ipſi DC, & BD parallela ipſi CA, fiatque $CM = \frac{CI \times CD}{CA}$, & ductæ applicatæ MN ſumatur æqualis IH: erit punctum H in curva quæſita. Fiat denique ut IB + ſubtangens Logarithmicæ, ad eandem ſubtangentem, ita AC ad IL; erit IL ſubtangens ad punctum H. Spatium curvilineum FGHIC exprimitur per infinitas ſeries ſimul ſumtas; excepto unico caſu, cum I cadit in A; tum enim ſpatium FCAG exprimitur per unicam ſeriem: eſt enim (poſita CA = 1) $FCAG = 1 - \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3 \times 3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ &c. Tuam nunc expecto ſententiam, Vir Ampl. num hujus Calculi percurrentis principia paulo fuſius explicata mereantur publicari.

Recte,

Recte, ut opinor, mones quod præstat reducere Quadraturas ad Rectificationes curvarum, quam contra; & hoc est quod etiam olim à me observatum fuit in constructione mea Catenariæ, beneficio curvæ parabolicæ: mihi quoque plures sunt viæ, quibus hoc in aliis casibus præstari potest: inter plures una præ aliis placet; per quam omnes illæ Quadraturæ curvarum, quarum applicatæ in quantitatibus rationalibus, vel saltem latus quadratum non excedentibus, exprimuntur, ad Rectificationes aliarum reduci possunt. Quod reductionem Quadraturarum ad certa genera spectat, de ea re jam dudum quoque cogitavi, & quidem cum successu, quoad Quadraturas circuli & hyperbolæ: arbitror enim me omnes posse determinare Quadraturas, quæ ad prædictas reduci possunt; id quod jam *Parisiis* Dno. HOSPITALIO in meis, ipsius in gratiam compositis, Lectionibus patefeci *. Sic constructionem Catenariæ, quæ prima fronte dependere videtur à Quadratura curvæ 4or. dimensionum, ad Quadraturam Hyperbolæ reducere mihi facile fuit, quod tamen Nob. HUGENIO satis arduum videbatur, ut conjicio ex iis quæ dedit in *Historia Operum Erudit.* anno 1697, mense Febr. A *Fratre* plurimum salutatus Vale & Fave. 1694 Maii

Amplitudinis Tuæ obsequentissimo

J. BERNOULLI.

* J. BERNOULLI Opp. Tom. III. No. CXLIX. L. 2. pag. 396.

EPISTOLA IV.

LEIBNITII AD BERNOULIUM.

Responsio ad praecedentem.

De construendis aequationibus differentialibus homogeneis. De calculo percurrentium seu exponentialium. De construendis curvis ex data Tangentium conditione. De quadraturis ad series revocandis. De Scientia Infiniti.

Vir Nobilissime & Clarissime, Fautor Honoratissime,

1694 Jun. GRatissimae mihi fuere Tuae litterae, vel ideo quod amissam Tui videndi spem utcunque solantur. Gaudeo de illo, quem observo, animorum ac methodorum consensu: video enim multa Tibi animadversa, in quae & ego incideram.

Superiore anno ad Dominum *March.* HOSPITALIUM scribere memini, esse mihi rationem omnes aequationes differentiales primi gradus, [seu carentes differentio-differentialibus,] in quibus adest constans implens leges homogeneorum, reducendi ad Quadraturas: Id nunc Tibi quoque innotuisse animadverto; quemadmodum & methodum meam quaerendi naturam & tangentes curvarum exponentialiter transcendentium; ubi scilicet in aequatione curvae ipsa indeterminata ingreditur exponentem, qua ego jam a multo tempore sum usus, & specimina etiam HUGENIO miseram, cui insolens id calculandi genus videbatur. Ego sic procedo: Sit verbi gratia $x^x = y$. Ergo (2) x log. $x =$ log. y. seu (3) $x\int(dx:x) = \int(dy:y)$. Datur ergo log. y, ex data x, ejusque Logarithmo, adeoque datur & y. Porro differentiando ex aeq. 3. fit (4) $dx + dx\int(dx:x) = dy:y$, seu $dy:dx = yx(1+\int(dx:x))$ Ergo habetur & ductio tangentium, ex positis Logarithmis. De Quadratura Figurae res est altioris indaginis.

Ex

Ex transcendentibus æquationibus ego has ipsas semper judicavi simplicissimas: Nam tales æquationes finitæ sunt; nec nisi ordinarias quantitates habent ingredientes; immiscet se tamen, profundiore quadam ratione, transcendentalitas seu infinitum. Aliquoties in *Actis* de illis mentionem injeci, sed Methodum calculo tractandi Operi meo reservaveram; tametsi res facilis sit animadvertenti connexionem cum Logarithmis. Elegantissima videtur Series illa tua $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$ &c., quæ aream quandam dictæ figuræ exhibet: quomodo inde oriatur non video. Si potes determinare omnes Quadraturas, quæ reducuntur ad Quadraturam Circuli vel Hyperboles; rem præstas egregiam, gratumque erit videre quid Dno. *Marchioni* Hospitalio communicaveris. Mihi ipsi nondum vacavit calculos instituere necessarios ad dijudicandum annon curva Ellipseos vel Hyperbolæ reduci possit ad Hyperboles & Circuli quadraturas. 1694 Jun.

Curvas ex tangentium proprietate inveni, peculiari calculi differentialis usu; ut si (*Fig.* 2.) data sit relatio inter A p & p C Tab. I. normalem ad curvam; item si detur relatio inter A p & A π, vel inter A θ & A T. Eaque Methodus ad plura adhuc porrigi potest. Fundamentum est in iis, quæ non ita pridem in *Actis* dedi April. 1692 (2), nempe quod sic curva quæsita formatur linearum infinitarum positione datarum interfectione. Sic si p C detur ex A p, formatur linea A C interfectione circulorum positione datorum, centris p, radiis p C descriptorum. Si detur relatio inter A p & A π; dantur positione ipsæ p π, quarum concursu formabitur linea, cujus evolutione habebitur linea A C. Si detur relatio inter A T & A θ; dabuntur positione ipsæ T θ, quarum concursu formabitur linea A C. &c.

Illud adjiciam pro Quadratura figuræ $x^x = y$ per seriem, non opus esse recurrere ad numerum infinitum Serierum infinitarum.

Nam

(2) *De Linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata, easque omnes tangente. ac de novo in ea re Analysi infinitorum usu.* Act. Erud. 1692. April. p. 168.

Videatur præsertim G. G. L. *Nova calculi differentialis applicatio & usus, ad multiplicem linearum constructionem, ex data tangentium conditione.* Acta Erud. 1694. Jul. pag. 311. vel *Jac.* Bernoulli Opp. N°. 61. p. 613.

1694 Jun. Nam æquatio liberata a vinculis fummatoriis, erit (⊙) $yydx^2 + xdy^2 = yxddy$, pofito dx effe conftantem; unde faciendo $y = b + cx + ex^2 + fx^3 + gx^4$, &c. habebitur etiam yy, & dy & dy^2 & ddy, quibus valoribus fubftitutis in æquatione ⊙, prodibit æquatio identica, feu cujus omnes termini erunt tollendi, & ita ad obtinendam deftructionem, invenientur ipfæ b, c, e, f, &c. quibus habitis, habetur & $\int ydx = bx + \frac{1}{2}cxx + \frac{1}{3}ex^3 + \frac{1}{4}fx^4$ &c. Ita quævis hujufmodi facile ad commodam Seriem revoco; eamque methodum eo majoris faciendam puto, quod eft generaliffima, praxique aptiffima, & ad omnes differentialitatis gradus porrigitur, quemadmodum id explicavi in *Actis* (3). Pergratum quoque erit difcere fpecialem tuam Methodum qua conftruis curvam cum datur $x = y$, (multiplicatæ per quantitatem formatam ex dy, dx) $+ a$, (multiplicatæ per aliam formatam ex dy, dx).

Quæ ab amicis Operi meo (4) adjicienda fuppeditabuntur, feparari a meis æquiffimum eft, ut fua cuique merita in rem litterariam conftent. Non omnia unus poffum agere, nec fi poffim, velim, fatis per alia diftractus.

Primæ a me gratiæ BERNOULLIIS debentur: vos enim primi effeciftis, ut qualiacunque tentamina mea in ufus publicos transferrentur. Et Tua opera Dominus *Marchio* HOSPITALIUS nobis acceffit. Hujus admonitu, & HUGENIUS, quamvis ipfe per fe maximus Geometra, delectari noftris cœpit. Nam etfi antea mecum commutaret litteras, nondum tamen hoc Calculi genere capiebatur, quod vim ejus nondum propriis meditationibus comperiffet. Quæ cum ita fint, quod molior ego Opus, non magis meum quam veftrum erit; idque Titulus ipfe ita profitebitur, uti vos probabitis. Meditata ergo Veftra fpeciminave parate, ut lubet & prout videbitur indicate, vel fummittite; prorfus utar conditione Veftra ex præf-

(3) G.G.L *Supplementum Geometriæ practicæ, fefe ad problemata tranfcendentia extendens, ope Methodi novæ generaliffimæ per feries infinitas.* Acta Erudit. 1693. April. p. 178.

(4) *De fcientia infiniti.*

præscripto, aut certe nihil nisi Vobis conſciis conſentientibuſque mutabo. Vale & clariſſimum virum *Fratrem Tuum* a me ſaluta, qui ſum.

Hanoveræ 7. Jun. 1694.

Cultor Veſter ſtudioſiſſimus

Godefridus Guillelmus Leibnitius.

P. S. Duos olim Helvetios novi in ſtudiis quoque Mathematicis & Phyſicis egregios, Ottium & Sevetam. Quid illi nunc agant ſcire pervelim, nam vivere & valere ſpero.

EPISTOLA V.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Calculo exponentiali. De conſtruendis curvis ex Tangentium conditione. De quadraturis ad Circuli & hyperbolæ quadraturam reducendis. Rectificatio ellipſis & hyperbolæ non pendet ab earum quadratura. De ſerie univerſaliſſima ad quadraturas. De Trajectoriis orthogonalibus.

Vir Ampliſſime & Celeberrime, Fautor honoratiſſime.

Cum ante paucas ſeptimanas rure [ubi per aliquot menſes 1694. commoratus, aquarum *Fabarenſium* gratia mihi potandarum] Septemb. in Urbem reverterer, poſtremæ Tuæ gratiſſimæ mihi demum tradebantur, quod cauſæ eſt, ut ob ingruentes Nundinas *Lipſienſes*; ad quas noſtrates jamjam abituriunt, Te tui petiti omnino compotem reddere nequeam, Breviter tamen, quantum per anguſtiam temporis licet ad Tuas reſpondebo. Gaudeo & Tibi quoque eſſe conſideratas curvas illas quas vocas *exponentialiter tranſcendentes*, ego au-

1694. Septem. tem *percurrentes*; quid peculiare in illis observaverim paucis exponam. Æquatio percurrens constat quantitatibus percurrentibus, quæ sunt vel primi, secundi, tertii, vel ulterioris generis. Quantitas percurrens primi generis est, cum ejus exponens est numerus vel quantitas simpliciter indeterminata, ut y^m: secundi verò generis, cum ejus exponens est quantitas percurrens primi generis, ut y^{m^n}, & ita de aliis, &c.

Sequebantur Principia calculi percurrentis, quemadmodum videntur in Actis Erudit. 1697. Mart. pag. 126. & seq. *Aut.* Joh. BERNOULLIO, Opp. Tom. I. N°. XXXVI. pag. 182.

Diutius quam par est, Vir Celeb., his immoror, quæ forsitan jam me melius nosti: Interim meas super hac materia meditationes Tecum communicare volui, ut, quousque cum Tuis conspirent, videas.

Egregium est, Vir Ampl., quod annotasti, curvas interdum ex Tangentium proprietate describi posse, per intersectiones infinitarum curvarum: ratio modi, quem tradis, cuivis attendenti manifesta fit: interim observo istius modi curvas plerumque esse Algebraicas, vel saltem ex Algebraïcarum evolutione generari, quarum proinde puncta etiam Algebraïce determinari possunt.

TAB. I. Sic si P C (*fig.* 3.) normalis ad curvam detur ex A P, id est, si P C sit æqualis applicatæ P R, curvæ datæ A R, determinabitur punctum C, abscindendo subtensam P C = P R ex circulo P C θ, descripto subtangente P θ tanquam diametro. Hinc & ipsa ducta θ C erit Tangens curvæ A C.

TAB. I. Si detur relatio (*fig.* 4.) inter A T & A θ, id est, si A T sit æqualis applicatæ θ R curvæ A R datæ, habebitur punctum C, sumendo θ C quartam proportionalem ad A P, θ P, & θ T.

Circa Quadraturas quæ reduci possunt ad quadraturas Circuli & Hyperbolæ, hoc habeo. Omne spatium, cujus elementum exprimitur per quantitatem differentialem, quæ per aliam factam positionem literarum reducitur ad $dx. x^p \sqrt{aa \pm xx}$ vel $\frac{x^p\,dx}{\sqrt{aa \pm xx}}$ aut est quadrabile

aut

aut dependet à Quadratura Circuli aut Hyperbolæ, quod demonstrare possim : sed vicissim, si aliquod spatium est quadrabile, vel dependet ab alterutra istarum Quadraturarum, ejus elementum necessariò quidem mutari posse debet in aliud, quod exprimatur per alterutram expressionem differentialem, ope novæ cujusdam suppositionis litterarum. Regulam autem generalem pro hac suppositione generaliter instituenda adhuc desidero, nec unquam inventam iri spero : saltem non magis quam illam, per quam cognosci posset, num æquatio Algebraïca quantivis gradus & quantumvis composita deprimibilis esset, nec-ne. Si quis enim quantitatis alicujus irrationalis & valde compositæ sumeret differentiale (quod facile fit) illudque mihi integrandum proponeret ; nescio sane an-non diu ipsi inhærerem, & tandem non nisi casu & palpando, vel etiam nunquam, eò pervenirem. Id saltem asserere ausim, rectificationem Ellipsis & Hyperbolæ, ad earumdem Quadraturas non posse reduci : harum quippe curvarum elementa ad neutram dictarum formularum redigi possunt, facile enim omnes possibiles & necessariæ suppositiones instituuntur. . .

1694 Septem.

. . . .

Mirifice placet methodus Tua in *Actis* (5) jam explicata, per quam quamvis Quadraturam ad seriem revocas : generalissima enim est, & in praxi facilis : id tamen incommodi habet, quod si in æquatione differentiali reperiatur y & dy, vel x & dx duarum pluriumve dimensionum ; series inde orta nullam manifestam legem progressionis observet, ut accidit in quadranda curva $x^x = y$. Meæ autem series, licet numero infinitæ, si modo inceptæ fuerint, quantumvis continuari possunt : quia evidente lege progrediuntur. Adde & hoc, quod per aggregationem terminorum homogeneorum in unicam seriem converti possent.

Commode hic mentionem injiciam seriei universalissimæ, non ita pridem mihi repertæ, quæ omnes quadraturas & rectificationes generaliter exprimit, quæque methodo tangentium inversæ aptissima est. Posita enim quacunque differentiali quantitate integranda $n\,dz$ (per n intelligo quantitatem quomodocunque formatam ex indetermi-

(5) G. G. L. *Supplementum Geometriæ practicæ, sese ad problemata transcendentia extendens, ope novæ methodi generalis per series infinitas.* Act. Erudit. 1693. April. pag. 178.

1694 Septemb. terminatis & constantibus) erit, posita dz constante, ejus integrale æquale huic seriei $nz - \frac{1}{1.2} zz \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3.} z^3 \frac{ddn}{dz^2} - \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \frac{dddn}{dz^3}$ &c. quæ si applicetur in proposito quodam exemplo, destruentur dn, ddn, $dddn$, &c. per dz, dz^2, dz^3 &c. totaque series constabit terminis pure Algebraïcis. Universalis hujus seriei ope, facile invenio Sinum rectum ex dato arcu & radio, cæteraque Problemata solvo, quæ solvisti per Tuam methodum in *Actis* April. 1693. explicatam. Modus quo ad hanc seriem perveni prodibit in *Actis* (6), cujus usum fusius ibi explicatum videbis.

Hæc quidem sunt, Vir Cel., quæ raptim conscribere potui, brevitas temporis plura in præsentiarum non permisit: pleraque, eaque notabiliora quæ feci inventa, mihi non sunt in scripto, sed in aliorum manibus versantur, in quorum gratiam ea scriptis mandaveram, quæ si de novo concinnanda essent, non parum laboris facesserent mihi, qui nunc alia prorsus ago; ea nimirum ad quæ Magistratus noster me destinavit: breves omninò horulæ meditationibus Mathematicis impendendæ mihi supersunt, quod mecum reputans, non possum non multoties optare quandam occasionem ubi me totum studio Mathematico applicare possem; Ea enim capacitate, qua Tu polles pluribus toto cælo differentibus incumbendi, inque iis simul excellendi, ego non polleo, sed cui me addico, id me totum requirit. Tuum opus *de Scientia infiniti* impatienter expectamus; faxis, rogamus, ut propediem lucem videat: Tu Tibi ipsimet satis suppeditabis materiæ, & si quædam adjicias de nostris, urbanitati Tuæ, non necessitati tribuemus. Vale & Fave

Amplitudinis Tuæ, devinctissimo &
studiosissimo cultori
J. Bernoulli.

Basileæ 2. Septembris 1694.

P. S.

(6) *Additamentum effectionis omnium quadraturarum & rectificationum curvarum per seriem quandam generalissimam* Acta Erudit. 1694. Nov. pag. 437. *vel.* Joh. Bernoulli Opp. Tom. I. N°. XXI. pag. 125.

P. S. Eodem hoc momento, quo præsentes obsignaturus sum, affertur mihi *Actorum mensis Julius*, in quo novam Tuam Calculi differentialis applicationem & usum (1) video. Quantum fugitiva huc usque perlustratione cernere licet, est quod eas curvas, quarum in postremis Tuis ad me datis mentionem fecisti, & quarum unius & alterius constructionem supra dedi, artificiose describere, earumque calculum ad certas regulas revocare doceas, ex quo sane non parum delectamenti capio, omniaque studiose perlegam. Memini me olim similes fere speculationes habuisse, ex occasione insignis Problematis quod mihi Dn. FATIO DE DUILLIER, *Nicolaï* Frater, proposuerat, de invenienda curva quæ singulas Parabolas à Globis ex singulis elevationibus Mortarii ejectis descriptas tangit; quam deprehendi & ipsam esse Parabolam, simulque modum inveni, per quem hujusmodi Problemata per vulgarem Geometriam *Cartesianam* solvi possent, quorum exemplum de determinandis Causticis in *Actis* Jan. 1692. (*pag.* 30.) (2) exhibui. Aliud nunc Problema non minus elegans quam utile, ob summam affinitatem quam cum hisce habet proponam. *Datis*, nempe, *infinitis curvis positione*, *invenire curvam quæ omnes ad angulos rectos secat*, vel ut Ampl. Tuæ verbis utar, *Lineis*, *propositam normaliter secantibus*, *positione ordinatim datis*, *invenire propositam.* Si positione ordinatim datæ sint Parabolæ, eundem axem & eundem Verticem, sed Parametros variabiles habentes, curva optata erit Ellipsis. Si positione ordinatim datæ sint Parabolæ eædem eundem Axem, sed variabiles vertices habentes, curva quæsita erit Logarithmica vulgaris. Sic in quovis exemplo peculiari rem facile expedire possem. Tibi autem difficile non erit generales pro hoc excogitare Regulas. Cæterum hoc Problema insignem usum præstat in determinanda curvatura radiorum lucis per medium inæquabiliter densum transeuntium, juxta hypotheses Dn. HUGENII; siquidem radius nihil aliud est quam linea undulationes ad angulos rectos secans. 1694. Septemb.

(1) *Acta Erud.* 1694. Jul. p. 311. vel *Jac.* BERNOULLII Opp. N°. LXI. pag. 613. G. G. L. *Nova Calculi differentialis Applicatio & Usus*, *ad multiplicem linearum constructionem*, *ex data tangentium conditione.*

(2) *vel* Opp. Tom. I. N°. VI. pag. 52.

1694. Septemb. (*Voyez son Traité de la Lumiére, pag.* 44.) ubi quidem radium AHEB undulationes BC normaliter ſecantem incurvari oſtendit, ſed qualem proprie curvaturam induat non innuit. Poſſet præſens Problema adhuc latius extendi, nempe ſic, *Lineis, propoſitam ad angulum datum ſecantibus, poſitione ordinatim datis, invenire propoſitam*: Si lineæ datæ ſint rectæ in puncto coeuntes, curva quæſita erit (ceu manifeſtum eſt) Loxodromica plana (1). Sed lator harum ex puncto diſceſſurus me abrumpere cogit.

EPISTOLA VI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

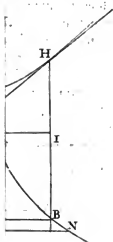
Reſponſio ad præcedentem.

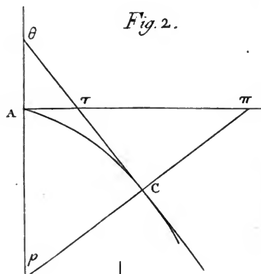
De Scientia infiniti. De quadratura curvæ exponentialis. De integrandis quantitatibus logarithmicis. De ſeriebus. De quadraturis, De Trajectoriis orthogonalibus.

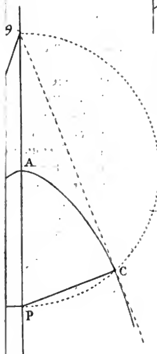
Vir Celeberrime Fautor Honoratiſſime.

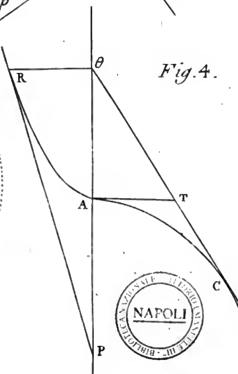
1694. Decemb. TRiduum eſt, quod Tuæ, mihi ab itinere aliquo reverſo, ſunt redditæ; quod amicus, qui *Lipſia* attulit, non rectà huc veniſſet & me deinde non inveniſſet. Gratias ago, quod de Calculo mearum exponentialium vel Tuarum percurrentium, aliiſque id genus rebus egregiis ad me ſcribis. Tametſi enim ex prioribus meis facile judicaveris, Principia illa exponentialium, & mihi familiaria eſſe a multo tempore; Calculum tamen circa altiores earum ſpecies non ità longè produxi; & ſæpe ita diſtrahor, ut propemodum his ſtudiis valedicere cogerer, niſi mihi plus ab amicis in poſterum, quam a meis meditationibus pollicerer. Unde illud, quod *de infiniti ſcientia* cogito Opuſculum, ſi Veſtris [ut Tuæ innuere videntur] auxiliis

(1) *Nunc* Logarithmicam ſpiralem *communius vocant.*


H
I
B
N


Fig. 2.
θ
τ
π
A
C
p


9
A
C
P


θ
Fig. 4.
R
T
A
C
P



auxiliis destitueretur, vereor ut mature prodeat in lucem, aut omnino ut prodeat. Quanquam etiam id parum vestra referre judicem, qui ope amplius mea adeo non indigebitis, ut mihi potius opus sit vestra. 1694 Decemb.

Quadraturam figuræ, cujus ordinata sit x^x vellem citra Seriem posse dari, in quo esset aliquod scientiæ incrementum; Certe ad quædam vicina gradum dudum promovere memini; sed non vacat inter Chaos Schedarum inordinatarum inquirere, aut actum agere. Non improbo, quod ipso lx in serie uteris valorem ipsius $x^x = y$ exprimente. Et elegans est quæ inde ducitur specialis series $\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3}$, &c. Si tamen abstineas ab lx, solaque x, vel ejus potentiis utaris; prodibit opinor Series generalis non minus simplex, aut certa lege procedens, quam est generalis tua. Nam, ob æquationem, $-dy + ydx + ylx\,dx : a = 0$, Sic explicatam, ut faciamus $x = 1 + z$ & $a = 1$ & $y = 1 + cz + dz^2 + ez^3 + fz^4$ &c. cum lx sit $\frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4$ &c. fiet æquatio, in qua, ut identica sit, omnes terminos destruendo, prodeunt æquales destructitiæ satis ordinatæ, nempe $c = 1$, $d = \frac{\frac{1}{1} + c}{2}$, $e = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{1}c + d}{3}$, $f = \frac{+\frac{1}{3} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{1}d + e}{4}$, $g = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}c - \frac{1}{2}d + \frac{1}{1}e - f}{5}$; &c. quæ eo ipso regularem atque universalem exhibent constructionem numerorum c, d, e, f &c. idemque est in cœteris Seriebus, quas mea methodo invenio; nec potentiæ altiores ipsius y vel dy regulares progressus impediunt, etsi magis compositos reddere soleant.

Sed si adhibere velimus ipsam quantitatem logarithmicam, res simplicissima ratione hoc loco fiet, quærendo non y sed ly. *Sic quoties variant morbi variabimus artes.* Quærendo igitur non ordinatam, sed ejus Logarithmum, sic procedo; quia posui $x = 1 + z$, ut fiat $lx = \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ &c. & $xlx = lx + zlx$;

1694 Decemb. &, ob æquationem $y = x^x$, eſt $ly = xlx$, ſeu (⊙) $-ly + lx + zlx = 0$, faciamus $ly = nz + pz^2 + qz^3 + rz^4$ &c. & explicatione æquationis ⊙ prodibit.

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} -ly = -nz - pz^2 - qz^3 - rz^4 \text{ \&c.} \\ +lx = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ \&c.} \\ +zlx \qquad + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{array} \right\} = 0$$

Ergo $n = 1$,
$p = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$
$q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
$r = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
& ita porro

adeoque fiet $ly = z + \frac{1}{1.2} z^2 - \frac{1}{2.3} z^3 + \frac{1}{3.4} z^4 - \frac{1}{4.5} z^5$ &c. quemadmodum, & ſine hoc calculo, primo obtutu haberi poterat; ſed volui formam generalem inquirendi ſervare. Atque hæc eſt ordinata artificialis [ut *Angli* ſolent loqui], magna ſimplicitate expreſſa : unde ex Tabulis Logarithmorum habetur facile ordinata naturalis: idque ſufficit in praxi, cum de area figuræ ſimilibuſque non quæritur. Sed ſi ponatur ipſa y per ſeriem, licebit uti ſerie a me adhibita pro inveniendo numero ex dato Logarithmo. ſit Logarithmus l, erit numerus $1 + \frac{1}{1} l + \frac{1}{1.2.} l^2 + \frac{1}{1.2.3.} l^3 + \frac{1}{1.2.3.4.} l^4$, &c. Hinc quia ly (ſeu l) hoc loco eſt xlx, fiet $y = 1 + \frac{1}{1} xlx + \frac{1}{1.2.} x^2 (lx)^2 + \frac{1}{1.2.3.} x^3 (lx)^3$ &c.

Dum hæc ſcribo, ad Tuam Seriem reſpiciens, video plane hanc ipſiſſimam eſſe; nam ante, quod impeditior calculus videretur, fugiente tantum oculo luſtraveram, ubi illud præclariſſime a Te animadverſum video, quod termini $(xlx)^e$ poſſunt ſummari, quod per ſe egregium eſt, etſi ad inveniendum $\int y dx$ non ſerviret. Sane tales Quadraturas & mihi dudum fuiſſe cognitas dicere auſim, Te non invito, ſed tamen & hoc auſim addere facile obvias non eſſe.

Originem Quadraturarum hujuſmodi adſcribam, ſaltem ut videas an Tuæ conſpirent. Nempe differentiando $x^b lx^r$ prodit (1) $b. x^{b-1} l.x^r dx + rx^{b-1} lx^{b-1} dx$, hinc ſi $r = 1$, fiet (2) $b \int x$

$h\int x^{h-1}\, lx\, dx = x^h lx^r \frac{1}{h} x^h$. Ergo si $h - 1 = m$; patet utique summari posse omnes $x^m\, lx\, dx$, seu dari $\int x^m\, l\, x\, d\, x$. 1694. Decemb.

Sed hinc rursus, ope æquationis (1) inveniri potest etiam $\int x^m\, lx^2\, d\, x$; nam si in æquatione (1) ponas $r = 2$, fiet (3) $d(x^h lx^2) = h\, x^{h-1}\, lx^2\, dx + 2\, x^{h-1}\, l\, x\, d\, x$. Unde (4) $h\int(x^{h-1}\, lx^2\, dx) = x^h\, lx^2 - 2\int(x^{h-1}\, lx dx)$. Sed datur $\int(x^{h-1}\, lx dx)$ per æquationem (2.) Ergo datur & $\int(x^{h-1}\, lx^2\, dx)$ seu datur (5) $\int(x^m lx^2\, dx)$ Hinc vero jam iterum ope æquationis (1.) inveniri potest etiam $\int(x^m\, lx^3\, d\, x)$. Nam si in æquatione (1) ponas $r = 3$, fiet rursus (6) $d(x^h lx^3) = h\, x^{h-1} lx^3 dx + 3\, x^{h-1}\, lx^2 dx$. Unde (7) $h\int(x^{h-1}\, lx^3\, dx) = x^h\, lx^3 - 3\int(x^{h-1}\, lx^2\, dx)$. Unde cum detur $\int x^{h-1}\, lx^2\, dx)$ per conclusionem (5), dabitur & $\int(x^{h-1}\, lx^3 dx)$ per (7), adeoque dabitur (8) $\int(x^m\, lx^3\, dx)$, & ita porro pergendo, dabitur generaliter $\int(x^m\, lx^e\, dx)$, & quidem per seriem finitam, si e sit numerus integer. In nostro autem casu, m & e sunt æquales, & quidem integri.

Sic etiam cum varia olim circa variorum gradiuum differentias tentarim; in seriem alterius tuæ similem incidere memini. Imo fuere hæ cogitationes inter meas primas *Parisienses*, cum summas tantum DETTONVILLÆ vel PASCALII meditarer.

Sit series decrescens	a, b, c, d &c.
ejus differentiæ primæ	e, f, g, h &c.
secundæ	l, m, n, o &c.
tertiæ	p, q, r, s &c.
quartæ	t, u, v, x &c.
quintæ	$\beta, \gamma, \delta, \theta$ &c.

1694. Decemb. $a = e + f + g + h$ &c. $= 1l + 2m + 3n + 4o$ &c. $= 1p + 3q + 6r + 10s$ &c. $= 1t + 4u + 10v + 20x$ &c., & ita porro. Rursus $e = e$, $f = 1e - 1l$, $g = 1e - 2l + 1p$, $h = 1e - 3l + 3p - 1t$; Et ita porro. Et semper ordine procedunt numeri, qui figurati dicuntur, vel combinatorii. Hos valores ipsarum e, f, g, &c. substituendo in æquatione $a = e + f + g + h$ &c.

$$
\begin{array}{ll}
\textit{fit}\ a = & 1e \\
& 1e - 1l \\
& 1e - 2l + 1p \\
& 1e - 3l + 3p - 1t \\
& 1e - 4l + 6p - 4t + 1\zeta \\
& \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c.
\end{array}
$$

Atque hæc quidem procedunt, tam in ordinariis seriebus, quarum termini sunt quantitates ordinariæ, quam in iis, ubi sunt infinite parvæ.

Jam rem ad Calculum differentialem, in infinite parvis nobis usitatum, accommodando, pro a ponatur y, & pro e, l, p, t, ζ, &c. poni poterit respective dy, ddy, d^3y, d^4y, d^5y &c. ipsa autem quantitas constans, pro unitate sumpta, sit dx infinite parva, & $1 + 1 + 1 + 1$ &c. in infinitum erit x, & ideo $1 + 2 + 3 + 4$ &c. erit $\int x$, & $1 + 3 + 6 + 10$ &c. est $\int\int x$, & $1 + 4 + 10 + 20$ &c. est $\int\int\int x$ &c. Ergo fit a, seu $y = dy.\, x - ddy\int x + d^3y\int\int x - d^4y\int\int\int x + d^5y\int^4 x$ &c. Sed $\int x = \frac{1}{1.2}xx$ & $\int^2 x = \frac{1}{1.2.3}x^3$ & $\int^3 x = \frac{1}{1.2.3.4}x^4$ &c. Ergo (& quidem supplendo legem homogeneorum per dx unitatem) fit tandem $y = \frac{1}{1}x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1.2}xx\frac{ddy}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{1}{1.2.3.4}x^4\frac{d^4y}{dx^4}$ &c. sive, ut ad rem opinor tegendam, ponere maluisti, promovendo, y, dy, ddy, &c. in $\int y$, y, dy, &c. respective, quod hic eodem redit fiet $\int y\,dx = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{2}xx\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{ddy}{dx^2}$ &c. Series autem harmonica id habet

bet peculiare, ut termini a, b, c, d &c. coincidant ipsis a, c, l, p, &c. 1694. Decemb.

De reductione Quadraturarum ad Quadraturam Circuli vel Hyperbolæ adhuc amplius inquirendum censuerim. Quomodo ego Curvam Isochronam Paracentricam per rectificationem construxerim, in *Actis* videritis. *

Doleo temporis non satis Tibi suppetere ad præclaras meditationes mathematicas prosequendas pro voto tuo, quibus præ aliis plerisque Te parem esse constat. Itaque non sine multo scientiæ detrimento alia subinde a Te agi debere video. Ego ipse pro affectu quo præclaros viros complector, obviam ire cogitaveram, sed consilium Tuum ornandæ Patriæ non potui non laudare. Interea *Junior* STURMIUS locum obtinuit, qui Tibi paratus erat, & lauta satis conditio est. *Nicolaus* FATIUS DUILLERIUS in Anglia, ut accepi, non incommodam stationem invenit. Ejus *Fratrem* fratrissare ex litteris tuis intelligo, Tuo opinor exemplo.

Pene exciderat Problema inveniendi curvam, quæ ordinatim positione datis occurrit ad angulos rectos. Cujus Methodus meo judicio consistit in duabus æquationibus, una continente relationem inter x, y & constantem quamdam in curva positione data, sed pro diversis talibus ordinatim datis variabilem, b; altera continente valorem ipsius $dy : dx$ in curva quæsita, expressam ex proprietate perpendicularium in curva positione data, cujus æquationis ope, datur ipsius b valor per dy, dx, y, x, pro re nata; quarum duarum æquationum ope tollendo b, habetur æquatio differentialis primi gradus pro relatione inter x & y. Sic si positione ordinatim datæ sint Parabolæ verticis communis, quarum semiparametri b, fiet æquatio $2bx = yy$. Jam ex conditione problematis, seu perpendicularitate ad parabolam fit $b = -ydx : dy$. Unde tollendo b, fit $-2xydx = yydy$, seu, summando $aa - xx = \frac{1}{2} yy$, quæ utique est ad Ellipsin, & satisfaciunt utique Ellipses infinitæ. Et has ordinatim positione datas, manifestum est, vicissim a Parabolarum unaquaque

* G. G. L. *Constructio propria Problematis de Curva Isochrona Paracentrica.* &c. Acta Erud. 1694. Aug. pag. 364. vel Jac. BERNOULLI Opp. N°. 64. pag 627.

1694. Decemb. quaque normaliter secari. Cæterum præclare a Te notatum est, hoc Problema usum habere in Dioptricis, pro curvatura radii in medio continue variante. Nihil potuit dici aptius.

Postremo *Fratrem* tuum celeberrimum Virum, rogo ut a me officiosissime salutes. BOISOTIUS Abbas ex *Comitatu Burgundiæ*, vir egregius, spem mihi fecit monumentorum quorumdam historicorum: rogavi, ut *Basileam* ad Dominum *Fratrem* Tuum [a cujus benevolentia id humanitatis spero, & mereri conabor,] mitteret, quoniam locorum situs ita ferre videtur. Inde *Lipsiam*, occasione nundinarum deferri poterunt ad communem amicum Dnum. MENCKENIUM. Vale.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{6}{16}$ *Decembris* 1694.

Cultor studiosissimus

G. G. LEIBNITIUS

P. S. Duos noveram olim Eruditos Schafhusinos, OTTIUM & SCRETAM. Audio SCRETAM obiisse diem suum. Quid OTTIO factum sit, scire gratum foret.

EPIS-

EPISTOLA VII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De quadratura curvæ exponentialis, & integratione quantitatis logarithmicæ. De Serie universali pro quadraturis. De Problemate curvæ æquilibrationis. De propagatione Calculi differentialis.

Vir Amplissime ac Celeberrime, Fautor Honoratissime,

QUoties litteras Tuas aspicio, toties amissa Tui videndi spes reacerbat dolorem; sistunt enim profundissimi ingenii amplam imaginem, sed ipsius Archetypi fruitione destituor. Invitus & invidus intelligo juniorem STURMIUM obtinere locum qui mihi paratus erat. Siqua alia commoda occasio pace aliquando *Europæ* reconcessa sese offerat, eam avide acciperem, si modo Tibi me propiorem redderet: hìc enim quia alia omnino agere debeo, vereor, quod & ipse vereris, ne tandem studiis mathematicis valedicere cogar. 1695 Januar.

Non video qua ratione quadratura figuræ cujus ordinata est x^x possit citra seriem dari. Si verò in serie abstinendum ab lx, per Tuam methodum inveniuntur quidem æquationes destructitiæ satis ordinatæ, ipsa autem quæ inde emergit Series non ita evidenter procedit, ut sepositis æquationibus destructitiis, a quovis alio continuari posset. Recte mones quod si adhibere velimus ipsam quantitatem logarithmicam, hoc est, ordinatam artificialem, res simplicissima ratione fieri possit: interim etiam observo, quod, sine calculo & formatione æquationum destructitiarum, primo intuitu habeatur: etenim $ly = x\,lx$ & $x = 1 + z$, $lx = \frac{1}{1} z - \frac{1}{2} \times$

1695 Januar. $z^2 + \frac{1}{3}z^3$ &c; Ergo multiplicando x per lx, habetur $ly = \frac{1}{1} \times$

$$z \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \text{ \&c.} \\ +\frac{1}{1} \quad -\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{3} \end{matrix} \right\} = z + \frac{1}{1.\,2} z^2 - \frac{1}{2.\,3} z^3 + \frac{1}{3.\,4} z^4$$

&c. quæ eadem est quæ Tua.

Integrale termini $x^m lx^e dx$ unica operatione invenio per additionem & subtractionem terminorum æqualium, nempe sic,

$$x^m lx^e dx = x^m lx^e dx + \frac{1}{m+1} x^{m+1} dlx^e - \frac{e}{m+1} x^m lx^{e-1} dx - \frac{e}{\overline{m+1}^2} x^{m+1} dlx^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^2} x^m lx^{e-2} dx + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3} x^{m+1} dlx^{e-1} - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^3} x^m lx^{e-3} dx - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4} x^{m+1} dlx^{e-3}$$

&c. Nam termini 2us & 3us, 4us & 5us, 6us & 7us se destruunt ob $dlx = \frac{dx}{x}$: Verum 1us & 2us, 3us & 4us, 5us & 6us &c., simul sumti per constructionem summari possunt, fiet itaque $\mathrm{I}x^m lx^e dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \times lx^e - \frac{e}{\overline{m+1}^2} x^{m+1} lx^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3} x^{m+1} lx^{e-2} - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4} x^{m+1} lx^{e-3}$, &c. ubi statim patet, quod si e sit numerus integer & positivus, series futura sit finita, & quidem tot terminorum, uno subducto, quot in e continentur unitates. Integrale ejusdem quantitatis $x^m lx^e dx$ aliter insuper inveniri potest per seriem infinitam in quocunque casu; ponatur enim $\overline{m+1}\, lx = s$, erit $x^{m+1} = ns$ (per ns intelligo numerum ipsius s) & $lx^e = \frac{s^e}{\overline{m+1}^e}$: Est autem $ns = 1 + \frac{1}{1}s + \frac{1}{1.2} \times$

$s^2 +$

$s^2 + \frac{1}{1.2.3} s^3 + \frac{1}{1.2.3.4} s^4$ &c., & differentiando hanc seriem habebitur dns seu $\overline{m+1}\, x^m\, dx = ds$ 1695 Januar.

$\overline{\times 1 + \frac{1}{1} s + \frac{1}{1.2} s^2 + \frac{1}{1.2.3} s^3 + \text{\&c.}}$, ideoque multiplicando illud per $\frac{l x^e}{m+1}$ & hoc per æquale $\frac{s^e}{\overline{m+1}^{e+1}}$ erit $x^m\, lx^e\, dx = \frac{ds}{\overline{m+1}^{e+1}}$

$\overline{\times s^e + \frac{1}{1} s^{e+1} + \frac{1}{1.2} s^{e+2} + \frac{1}{1.2.3} s^{e+3} + \frac{1}{1.2.3.4} s^{e+4}}$, &c.

Ergo sumendo integralia terminorum singulorum proveniet,

$$\int x^m\, lx^e\, dx = \frac{1}{\overline{m+1}^{e+1}} \times \frac{s^{e+1}}{e+1} + \frac{s^{e+2}}{1.\overline{e+2}} + \frac{s^{e+3}}{1.2.\overline{e+3}}$$

$$+ \frac{s^{e+4}}{1.2.3.\overline{e+4}} \text{ \&c.} = \text{(substituto loco } s \text{ ejus valore } \overline{m+1}\, lx)$$

$$\frac{lx^{e+1}}{e+1} + \frac{\overline{m+1}.\ lx^{e+2}}{1.\ e+2} + \frac{\overline{m+1}^2\, lx^{e+3}}{1.2.e+3} + \frac{\overline{m+1}^4\, lx^{e+4}}{1.2.3.e+4} \text{ \&c.}$$

Hæc itaque Series erit etiam æqualis illi supra inventæ x^{m+1}

$$\times \frac{1}{m+1} lx^e - \frac{e}{\overline{m+2}^2} lx^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3} lx^{e-2} - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4}$$

lx^{e-3} &c. Quod hic obiter tanquam consectarium dictum velim. Cæterum speculationes istæ adhuc ulterius extendi possunt, si nempe quantitates logarithmicæ lx, lx^2, lx^3, &c., cum numeris x, vel x^2, x^3, &c. vel constantibus quomodocunque componantur, & compositæ sint comprehensæ sub signis radicalibus, possunt enim plerumque summari, vel per vel citra series, vel etiam per extensiones curvarum, Ex. gr. $\int dx \sqrt{xx + lx^2}$ est $=$ curvæ extensæ cujus coordinatæ sunt $\frac{1}{2} xx$ & $x\, lx - x$. Plura alia, eaque non contemnenda circa hanc materiam animadvertere possem, quæ verò, brevitatis ergo, omitto, Tuæ relinquens industriæ, cui nihil

1695 Januar. effugere poteſt: Nondum ſatis tentavi extenſionem ipſam curvæ $x^x = y$, num commode per ſeriem, vel etiam ſine ſerie exhiberi poſſet; Vellem ut ipſe diſquireres, meretur enim Tuam applicationem.

Quod concernit alteram meam ſeriem & quidem univerſaliſſimam pro omnibus quadraturis & integralibus $Iy\,dx = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{2}x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3}x^3 \frac{ddy}{dx^2}$ &c., jam forſan in *Actis* * videbis me ejus originem non ita longe accerſere; cum in eum finem nihilo alio opus ſit, quam continuâ additione & ſubtractione terminorum æqualium, ceu ut ſupra feci: præclariſſime tamen eandem deducis ex ſerie tua decreſcente, ejuſque differentiis primis, ſecundis, tertiis, &c.; quo non parum gaudeo; multas enim proprietates de quibus antea non conſtabat circa numeros figuratos exinde detexi: Obſervo etiam quod ſi ſeries decreſcens ſit harmonica, non ſolum coincidunt termini a, b, c, d, &c. ipſis a, e, l, p &c., ſed etiam e, f, g, h, &c., ipſis b, f, m, q, &c. & l, m, n, o &c. ipſis c, g, n, r &c. & ita conſequenter. Item, ſi progreſſio harmonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ &c., continuetur, ut numerus terminorum ſit x, erit ſumma progreſſionis $= x - \frac{x.x-1}{1.2.2} + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3.3} - \frac{x.x-1.x-2.x-3}{1.2.3.4.4}$ &c. Hinc tamen nondum perſpicio, quomodo ſumma progreſſionis harmonicæ finitæ, expeditè per compendium exhiberi poſſit, uti exhibentur ſummæ progreſſionum figuratarum, vel etiam arithmeticæ & geometricæ: ſi quem noveris modum pro hoc, mecum haud gravatim communicabis.

Dum hæc ſcribo recipio litteras a Dno. *Marchione* Hospitalio, in quibus mittit novam ſolutionem cujuſdam Problematis, quod mihi jam ante bimeſtre communicavit, una cum ſuâ tum inventa

* Act. Erud. 1694. 437, *vel* Joh. Bernoulli Opp. Tom. I. N°. XXI. p. 125.

inventa solutione *, quam ut quantocyus *Lipsiam* mitterem rogavit, quod etiam feci sine mora, adnectens schediasmati *Hospitaliano* animadversionem meam, ubi exhibui aliam solutionem ejusdem Problematis, sed generalem, quam per communem Geometriam & simplicissime inveni, cum tamen *Hospitaliana*, quæ specialis est, multo differentialium calculo opus habeat. Quod cum Dno. HOSPITALIO indicassem, Problemati se de novo applicuit, invenitque etiam generalem Solutionem, quam nunc mittit †, quamque a mea parum differre reperio: optaret ut prior sua, ut & mea supprimerentur, & nova sua substitueretur: sed cum eam *Lipsiæ* non satis mature appulsuram putem, rogo Dnum. MENCKENIUM per literas quibus præsentes Tuæ inclusæ, ut hanc novam solutionem HOSPITALII priori subnectere, vel saltem subsequenti *Actorum* mensi inserere velit; qua ratione ipsi quodammodo satisfieri spero. Problema autem est tale: Sit (*Fig.* 5.) pons sublicius AB, convertibilis circa Axem A, sitque trochleæ C circumductus funis BCM, cujus una extremitas sustinet pontem, altera pondus vel sacoma M: Quæritur qualis debeat esse curva CMN, sic ut ubicunque existens pondus M in curva, semper æquilibrium faciat cum Ponte AB. Hoc Problema ita generaliter propono. Dato (*Fig.* 6.) in plano verticali curva quavis AB, quæritur in eodem plano altera curva LM; ita ut duo pondera data B, M, communi funiculo BCM trochleam positione datam C ambienti alligata, & curvis ubicunque imposita semper sibi mutuo æquilibrentur, vel quod tantundem est, ut minima vi moveri possint. Prius comprehendi sub hoc posteriori evidens est, gravitas enim dimidia pontis sublicii concentrari intelligitur in extremitate B, & sic curva data AB in hoc casu est peripheria circuli. Ubi hoc animadversione dignum reperio, quod, in speciali casu, curva CMN fit Cyclois ex rotatione circuli super circulo æquali descripta. Cæterum, ex occasione hujus, aliud mihi venit in mentem Problema quod etiam

1695 Januar.

TAB. II.

TAB. II.

 ad

* *Ill.* Marchionis HOSPITALII *Solutio Problematis Phisico-Mathematici, ab Erudito quodam Geometra propositi.* Acta Erud. 1695. Febr. p. 56. 59. *vel* Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XXII. XXIII. p. 129. 132.

† *Hanc vide in* Act. Erud. Suppl. Tom. II. Sect. VI. pag. 289. vel. *Joh.* BERNOULLI Opp. T. I. N°. XXV. p. 140.

1695 Januar. TAB. II. ad calcem novæ ſolutionis HOSPITALII Geometris ſolvendum propono: Vellem horulam otioſam ipſi impenderes, ut viderem an ſolutio tua meæ correſponderet. Quæro (*Fig.* 7.) in plano verticali curvam ABC ſecundum quam pondus B libere deſcendendo ſemper æquali vi tendat filum annexum BE, quod ex evolutione curvæ DE deſcribit quæſitam ABC; vel, ſi mavis curvam ABC concipere rigidam, ut pondus B non annexum filo & propria gravitate deſcendens illam quovis momento premat æquali vi centrifuga. Reperio curvam ABC poſſe eſſe tranſcendentem & algebraïcam trium dimenſionum, & etiam rectam.

Nicolaum FATIUM DUILLERIUM in Anglia ſtationem inveniſſe lubenter audio; lubentius tamen ipſi aliquam in Patria ſua optarem, ubi mihi vicinior foret: ſed vel hinc intelligo, in *Anglia*, alibique, Mathemata pluris æſtimari quam hîc loci; quod ille apud exteros commorari malit, quam in Patria, in qua omnibus bonis abundat. Fratrem ejus *Johannem Chriſtophorum*, qui natu major eſt, familiariter novi *Genevæ*: tanto autem judicii acumine non gaudet ac *Nicolaus*; hinc practicis magis delectatur quam theoreticis: nihilominus fundamenta peritioris Geometriæ à me *Genevæ* edoctus, nunc paulo diligentius noſtram colit: hunc in finem, quas ipſi feceram Lectiones ſedulo conſcripſit, ut volumen ſatis amplum efformarent. Cum *Pariſiis* agerem, inter alios Mathematicos intimum mihi reddidi Dnum. VARIGNONIUM, cui auctor extiti, ut ineffabilem voluptatem caperet ex Tuo differentialium calculo, teſtibus litteris nuper ad me datis, in quibus ita erumpit: *Je ne ſaurois du tout perdre de vuë le charmant & merveilleux calcul differentiel de M.* LEIBNITZ, *de ſorte qu'il ſe paſſe peu de jours, que je n'en faſſe quelque choſe: devinez, ſi, avec cet invincible penchant, j'ai pu lire ſans tranſport les* Actes de Leipſic *de l'Année paſſée qu'on m'a prêté il y a quelques jours*, &c. Alii inſuper quam-plures *Galliæ* Mathematici imbiberunt principia hujus calculi, qui cum ante meam peregrinationem Gallicam neutiquam innotuiſſet, nunc (abſit jactantia dictis) ibi paſſim inclareſcit. Hinc vides, Vir Celeberrime, mihi ſemper ſummæ curæ fuiſſe, ut inventa Tua, tam utilia, propalarem noviſque propagarem; non melius

melius talentum meum collocasse credens, quam si aliis prodesse potuissem; non enim nobis, sed aliis sumus nati, quod sæpissime ex ore MALEBRANCHII audivi. . . . . 1695 Januar.

. . . .

Quid Dnus. DE TSCHIRNHAUS agat scire percuperem: miror nunquam amplius in *Actis* apparere. Injurius es, tam in Te ipsum, quam in totum Orbem literatum, quod Opus Tuum *de Scientia infiniti*, quod sub manibus habes, eidem diutius invides: Si quando publicatum fuerit, possem aliquas notulas, in modum Commentarii adnectere, si ita visum Tibi; ipsum enim Opus jam per Te satis completum erit. SCRETAM audio mortuum. OTTIUS, qui de vitiis oculorum scripsit, fuit senator Scaphusianus, ... nunc autem extra urbem in suo prædio particulariter vivit. Vale & Fave.

Amplissimi Tui Nominis

Cultori studiosissimo

J. BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA VIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad praecedentem.

Valetudinis suæ rationem reddit. De curva æquilibrationis. Nemo sibi natus est. De Jacobo BERNOULLIO. *Series summatoriæ.*

Nobilissime & experientissime Domine Fautor Honoratissime.

1695 Febr. UTinam quam gratæ sunt mihi Tuæ, imo proficuæ, possem ego vicissim referre par pari: sed tot laboribus distrahor, & valetudine sum tam dubia, ut cogar attentiores meditationes præsertim abstractas fugitare, quantum possum. In æstate 1693 febri tentatus fueram: superiori æstate, pro febri, cujus jam initia aderant, venere mirabiles quædam phlogoses, ut nulla statuta hora, jam a multo tempore, plerisque diebus sentiam extraordinarium quemdam dolorem, blandum quidem & nulla ratione molestum, timendum tamen in futurum; præsertim cum illis, qui me aliquandiu non videre, visus sim macilentior factus, ipse jam sum satis natura macilentus. Porro calor ille inprimis acriore meditatione manifestissime excitatur; quæ res facit, ut ægrè ad problemata solvenda accedam, optemque saltem perficere atque in ordinem redigere posse dudum a me effecta; quid de tali effectu sentias, nosse velim. . . . .

. . . .

Pulcherrima mihi profecto Tua seriei obtinendi ratio visa est, quam in *Actis* * explicuisti, & inexpectata.

Fateor & ego, nec mihi occurrere rationem x^x summandi, nisi per seriem; & summationem terminorum numero finitorum progressionis harmonicæ (nam si infinitus sit numerus, & summa infinita

* Act. Erud. 1694. Nov. p. 437. vel Opp. Tom. I. N°. XXI. pag. 125.

finita est,) non possum exhibere, nisi forte per approximationes. 1695 Febr.

Elegantissimum est Problema *Hospitalianum*, cum augmento tuo.* Utinam me quoque in talibus excercere liceret. Nunc quidvis potius cogitare cogor. Nolim tamen hoc interpreteris, quasi ego jactem, me statim ista solvere posse, si attingerem. Nam eo sum ingenio, ut gaudeam me a vobis superari, cum scientiæ profectu. Idem dico de Tuo Problemate circa vim centrifugam. Et gratissimum erit Vestro beneficio intelligere tales solutiones.

Ingratus sim, si non agnoscam quantum Tibi debeam, quod plurimum ad meditationes meas qualescunque, apud egregios Viros, *Parisiis* & alibi commendandas, suffragio & exemplo Tuo consuluisti; aut ut verius dicam, quod illis ex ingenio Tuo, usuque felicissimo, pretium addidisti. Dnum VARIGNONIUM quoque nostrorum gustum habere, hactenus ignorabam. Nosse velim quinam sint alii, & an inter alios, sit Dnus OZANAM, qui non admodum bene se erga me gessit, † ut fortasse noveris.

Cæterum plane probo optimi MALEBRANCHII nostri, quam memoras sententiam; omnino occasione similia inculco, ut quisque intelligat, se (quod jam & CICERO dixit,) sibi natum non esse. Imo hoc meum dogma est, quanto quisque ardentius sinceriusque quærat commune bonum, eo magis felicitati suæ consulturum: quod sane invictis argumentis ostendi potest. Itaque laudo admodum, quod ad alios juvandos, augendasque generis humani opes propensum Te ostendis; præsertim cum præ aliis plurimis facere operæ pretium possis.

Fratrem tuum egregiæ sane doctrinæ Virum semper conatus sum habere amicum & faventem; nec puto quicquam a me profectum, de quo queri possit. Nescio quomodo tamen ille visus est se subinde ostendere, si non aversum, certe nonnihil alienum. Neque

* Opp. Tom. I. Nis. XXII--XXV. pag. 129-141.

† *Scil. Geometria, quæ inter reliquas* Cursus *sui* Mathematici *partes, prodiit* Parisiis A°. 1693. in 8°. *inseruit* OZANAM, *pag.* 163. seq. *Quadraturam Circuli* Leibnitianam, *fere verbotenus, ex ejus* Opusculo Quadraturæ Arithmeticæ *desumptam, ne nominato quidem* LEIBNITIO. *Vid.* Epist. *sequentem* ut & LXVIam. ac LXVIIam.

1695 Febr. vero illa designo, quæ aliquando objecit in *Actis*; id enim summo jure potest: sed illud potius non potui non mirari quod ad litteras quasdam meas, olim satis prolixe scriptas, quibus quæsitis ejus utcunque satisfaciebam, non respondit. Fateor ultra annum responsionem meam hæsisse; sed hoc contigerat ob absentiam: nam cum ejus litteræ huc venissent, ego in *Italiam* iveram, easque demum reversus inveneram, & tunc quidem nullam feceram respondendo moram. Quæ ad schediasma * ejus Junio ultimo insertum † responderim, videris nunc haud dubie, gratumque mihi erit intelligere judicium Tuum.

De radiis osculorum observabis, quomodo ex meo calculo differentiali reciproco (ubi x & y considerantur ut indifferentiabiles,) talia multo generalius & tribus verbis deriventur. Dedi etiam constructionem Isochronæ per rectificationem curvæ ordinariæ, sed Vestra constructio postea data †† est simplicior. Notavi etiam per quodvis datum punctum duci posse talem Isochronam; non, ut illi visum, unicam esse; eadem scilicet altitudine lapsus primi. Denique ea occasione addidi aliquid de controversia inter illum & me, circa numerum radicum in casu osculi; quin & explicui modum generalem per polygona, seu appropinquationem, construendi curvam ex data tangentium proprietate, seu æquatione differentiali, diversissimum ab eo quem postea vidi a Te datum. ** Tuum notavi derivari ex ea consideratione, quod, data tangentium curvæ quæsitæ proprietate, ordinatim positione dantur infinitæ numero curvæ ipsi quæsitæ occurrentes in punctis, ubi curvæ, seu tangentis ejus inclinationes, sive anguli ad axem dantur. Hanc rem sæpe:

* J. B. *Curvatura Laminæ Elasticæ*, &c. Acta Erud. 1694. Jun. 262. Jac. Bernoulli Opp. N°. 58. pag 576. Ejusdem *solutio Problematis* Leibnitiani *de Curva accessus & recessus æquabilis a puncto dato.* &c. Ibid. pag. 277. Jac. Bernoulli Opp. N°. 59. pag. 601.

† G. Gl. *Constructio propria Problematis de Curva Isochrona Paracentrica.* Ibid. Aug. p. 364. Jac. Bernoulli, Opp. N°. 64. pag. 627.

†† Joh. Bernoulli *Constructio facilis Curvæ recessus æquabilis a puncto dato, per rectificationem curvæ Algebraicæ.* Ibid. Oct. p. 394. Joh. Bernoulli Opp. T. I. N°. XIX. pag. 119.

** *Modus generalis construendi omnes æquationes differentiales primi gradus, Auctore* Joh. Bernoulli. Ibid. Nov. p. 435. Opp. Tom. I. N°. XX. p. 123.

pe consideravi, ut viderem an aliquid inde possem ducere, & videtur adhuc nonnihil subesse nondum satis exploratum. 1695 Febr.

Æmulationem Fraternam notatam in *Actis* putabam nihil prorsus affectui mutuo officere. Sed homines sumus, difficileque est æquo animo ferre, ut alii nos præcurrant, vel saltem æquent, qui longissime antea post nos fuerunt. Quod ego æquius animatus sum, causa fortasse est diversitas materiarum, in quibus habeo campum exercendi me, consolandique. Sunt enim in quibus sperem præstare aliqua Calculo differentiali non inferiora, si vel sanitatem, vel auxilia amicorum mihi spondere possem. . . . .

Quod scopum nos videndi propius consecuti non sumus, forte ambo nonnihil in causa sumus; dum non satis omnia prolixè utrinque exposuimus. Quid! si alia sese aliquando offerat non inferior occasio. Nosse velim, an, quam in Tuis memoras, pacem *Europæ* sis necessario expectaturus. Hoc anno vix audebo manum admovere meæ *scientiæ infiniti*; nam alii a me labores exiguntur Superiore jussu. Ubi habebo delineatam, Tuis animadversionibus libentissime submittam. Vale & fave

Hanoveræ 28. Febr. 1695.

Cultori studiosissimo

LEIBNITIO.

P. S. Tametsi plane constituissem temperare mihi nonnihil valetudinis causa ab analyticis meditationibus, non potui tamen impetrare a me, quin pulcherrimam illam rationem, qua seriem generalem indagasti, considerarem attentius. Quo facto vidi, altero termino destructo, simili methodo talem seriem haberi:

Posito $ddz = 0$ Nota $d^2 n$ est ddn, $d^3 n$ est $dddn$;
$\int n = \int (dzn)$ & $\int\int n = \int (dz(dzn))$; posito $dz = 1$

 $\int (z$

1695 Febr.

$$\int(z^e d^m n) + e\int(z^{e-1} d^{m-1} n dz) = z^e d^m n$$
$$- edz\int(z^{e-1} d^{m-1} n) - eedz\int(z^{e-2} d^{m-2} ndz)$$
$$= - ez^{e-1} d^{m-1} n dz$$
$$+ eedz\int(z^{e-2} d^{m-2} n) + e^3 dz^2 \int(z^{e-3} d^{m-3} ndz)$$
$$= + e^2 z^{e-2} n dz^2 e$$

Ergo

$$(1) \int(z^e d^m n) = z^e d^m n - ez^{e-1} d^{m-1} ndz + e^2 z^{e-2} d^{m-2} ndz^2$$
$$- e^3 z^{e-3} d^{m-3} ndz^3, \text{ \&c.}$$

ubi notandum, poſſe quidem e eſſe numerum non integrum, ſed m ſemper integrum eſſe; niſi quis adinſtar metaphyſicarum potentiarum (ſeu Logarithmorum) etiam metaphyſicas neſcio quas differentias (vel ſummas) fingere vellet.

Etſi autem ſic exhauriri m videatur, poſito eſſe integrum affirmativum, non tamen hoc fit, nam $d^0 n = \int^0 n = n$ & $d^{-1} n = \int^1 n$ & d^{-2} eſt $\int\int$ ſeu $\int^2$.

Hinc, poſito exempli gratia $m = 1$, & poſito eſſe $dz = 1$, ex æquatione (1), fit (2) $\int z^e dn = z^e dn - ez^{e-1} n + e^2 z^{e-2} \int n - e^3 z^{e-3} \int\int n + e^4 z^{e-4} \int^3 n$ &c. & (3) $\int z^e ddn = z^e ddn - ez^{e-1} dn + e^2 z^{e-2} n - e^3 z^{e-3} \int n + e^4 z^{e-4} \int^2 n$ &c.: ex quibus etiam intelligitur, quam apte ponatur ſumma differentiis reciproca, adeoque ſumma ſummarum reciproca differentiis differentiarum. Idem ex ſeriebus patet in infinitum decreſcentibus.

Termini a, b, c, d, e, &c. ſummæ

Differentiæ l, m, n, p, q, &c. Termini

Nempe l diff. inter a & b; m diff. inter b & c, & ita porro.

Sed a ſumma $l + m + n$ &c. & b ſumm. $m + n + p$, &c. & ita porro.

Unde Tibi deliberandum relinquo, annon, pro Integralibus veſtris, præſtet in poſterum, uniformitatis & harmoniæ gratia, non

inter

inter nos tantum, sed & in ipsa doctrina, adhiberi Summatorias expressiones; ita ut, exempli gratia; $\int y\,dx$ significet summam omnium y in dx respondentes ductorum, seu summam omnium hujusmodi rectangulorum: præsertim cum, tali ratione, summationes geometricæ, seu quadraturæ, optime cum arithmeticis, seu serierum summis conferantur. Nolim tamen vobis præscribere quicquam; sed tantum ejus, quod maxime rationi consentaneum videbitur, putem rationem maxime habendam. Ego certe in totam hanc methodum me fateor, ex hac consideratione reciprocationis inter summas differentiasque, incidisse; & a Seriebus numerorum ad linearum, seu ordinatarum, considerationes processisse. 1695 Febr.

Unum addam, quod etiam hanc reciprocationem confirmet. Si ponamus in æquatione (1) m esse numerum negativum seu $m = -r$, fore $d^m = \int^r$ unde ex æquatione (1) fiet (posita $dz = 1$.) (4) $\int(z^e \int^r n) = z^e \int^r n - e.z^{e-1} \int^{r+1} n + ee.z^{e-2} \int^{r+2} n - e^3.z^{e-3} \int^{r+3} n$, &c. semper tamen Series tales infinitas ita decrescere intelligendum est, ut termini continuando fiant quibusvis datis minores. Venere etiam nonnulla adhuc in mentem, quæ te rogarem. In celsissimi Principis *Abbatis St. Galli* Bibliotheca, extare Chronicon ALBERICI *Monachi Trium fontium* in litteras relatum est. Ita enim VOSSIUS narrat in libro *de Historicis latinis*: Habemus idem in his regionibus ab anno 960 inclusive, usque ad finem, seu annum 1241; sed desunt præcedentia ab initio mundi usque ad annum 960; minus quidem necessaria, quia antiqua melius in aliis habentur, sed quæ tamen suppleri desideramus. Similiter habemus Historiam JOHANNIS *Vitodurani*, quæ itidem in Monasterio *S. Galli* extare dicitur. In nostro codice habentur quidem omnia ab initio, sed desunt postrema ab anno 1277 ad annum 1348, in quo finire scriptor dicitur. Obstringeres me Tibi magis magisque, nec mediocriter, si è vicinia, per amicum aliquem, apud Celsissimum & Reverendissimum Principem, vel saltem Monasterii illius principalis Bibliothecarium, descriptionem nostris sumptibus impetrares.

Cui ſi ſimile beneficium addi poteſt, per aliquem amicum cui occaſio eſſet, ſollicitandi pro me Dnum. ***Abbatem*** BOISOT, qui abbatiæ *S. Vincentii* prope ***Veſontionem*** præeſt, ut mitteret, quorum ſpem fecit; cumulus accederet his deſideratis meis. Iterum Vale.

EPISTOLA IX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De illius infirma valetudine, MALEBRANCHII *remedio univerſali*, *Seriei ſummatoriæ correctione. Spatiis quadrabilibus. De quibuſdam Mathematicis Gallis. Dnus.* CHIRAC *Calculi infiniteſimalis diſcendi cupidus. De curvarum oſculo. De* GRAIGIO & TSCHIRNHAUSIO. *De Profeſſione mathematica apud Batavos vacante.*

1695 April. TArde quidem ad venerunt poſtremæ Tuæ, quod forſan moram fecerunt ***Lipſiæ***; maturè tamen ſignificatrices fuere vacillantis Tuæ valetudinis, de qua non ſum parum anxius. Optimus Deus avertat mali incrementum, faxitque ut hæ præſentes priſtinæ exoptatæque ſanitati te reſtitutum offendant. Non eſt inſolens, quod qui febre laborarunt, ſi non radicitus curetur, ſingulis annis novos & inordinatos paroxyſmos ſentiant; eandem forte ob rationem, ob quam vina quandoque, præſertim tempore vindemiarum, de novo ebullire & fermentari deprehendantur. Sic nullus dubito, reliquias febriles in corpore tuo adhucdum hoſpitari, quæ cum manifeſtum paroxyſmum producere non valeant, excitant ſaltem phlogoſes illas mirabiles. Illis itaque tempeſtive remediis idoneis occurrendum, ne, quod multoties accidit, quartanam, vel etiam hecticam, poſt ſe trahant. Interim à vigiliis & occupationibus nocturnis omninò abſtinendum, & recte facis quod attentiores meditationes fugitas; nihil enim eſt, quod humores pravos, tarta-

tartareos, & viscidos, alimentum nempe febrium intermittentium magis foveat & cumulet, cruditates pariat & coctionem impediat: dissipant enim laudabiles, tenuiores & spirituosas humorum partes, crassiora vero sedimenta relinquunt. Hic autem medicum agere nolim; habetis enim, haud dubie, expertos practicos, quos consulere poteris. Memini, cum *Parisiis* agerem, P. MALEBRANCHIUM, qui etiam natura est valde macilentus sed procerus, simili fere affectu aliquandiu laborasse; is sibi ipsi est medicus, & mirabilem medendi methodum habet: quemadmodum enim unicam causam primariam omnium morborum, depravationem nempe massæ sanguineæ, statuit; sic unicum remedium, idque simplicissimum, agnoscit: Quotiescunque ægrotat, singulis mane jejunus ingurgitat magnam quantitatem aquæ fontanæ purissimæ; incipiendo primis vicibus à minori, & postmodum augendo numerum haustuum, ad-instar acidularum, ad duas vel tres usque mensuras Parisienses: aqua autem non debet esse calida, ne nauseam moveat, nisi forsan ventriculum data opera per vomitum purgare velit, nec etiam debet esse frigida, ne fibrarum stomachalium & intestinalium tono noceat; sed eam nonnihil tepidam assumit. Principium, quo nititur; non adeo absurdum est; cum enim aqua omni sapore careat, debitam habeat consistentiam, nec nimis crassam, nec nimis fluidam, idoneam esse dicit, ad omnia sanguinis vitia corrigenda, dum ejus particulas acriores infringet, nimis crassas & viscidas diluet; nimis tenues & volatiles coercebit, tandemque omnem materiam morbificam absterget, & per urinam educet. Et revera per iteratam istam potationem aquæ omnino se liberaverat à molestissimo affectu à quo detentus fuerat, mihique affirmavit se nullo alio remedio per totam vitam usum fuisse. Postea ab Ill. HOSPITALIO intellexi, conjugem suam eodem hoc remedio ab angina & inflammatione faucium curatam fuisse. Quantum ad me, nemini id consulerem, nisi prius complexionem suam probe exploratam haberet, & securus esset vires suas tot aquis perferendis pares esse, alioquin natura quasi succumbere & suffocari posset; præsertim si non eadem quantitate statim per urinam redderentur.

1695 April.

Cum Tua mihi sit carior sanitas quam mea; ei hac vice rebus mathe-

1695 April mathematicis non ero molestus: id saltem monebo, quod in Tuis ultimis annotavi. Egregia sunt quæ ex ratione mea seriem generalem indagandi deduxisti; mihi sufficit, si inventa mea, ut ut tenuia, magnis viris occasionem dederint ad majora: Interim in calculo tuo lapsum reperio, quem haud dubie præcipitanter commiseris: quique facit ut series pro $\int(z^e d^m n)$ sit longe alia & notabilior, quam ipse putaveris. Ut discrimen videas, calculum Tuum hic repeto. Posito $ddz = 0$

$$\int(z^e d^m n) + e\int(z^{e-1} d^{m-1} n dz) = z^e d^m n$$
$$- edz\int(z^{e-1} d^{m-1} n) - eedz\int(z^{e-2} d^{m-2} n dz)$$
$$= - e z^{e-1} d^{m-1} n dz$$
$$+ eedz^2\int(z^{e-2} d^{m-2} n)$$
$$+ e^3 dz^2 \int(z^{e-3} d^{m-3} n dz) = + e^2 z^{e-2} d^{m-2} n dz^2.$$

Ergo

$$\int(z^e d^m n) = z^e d^m n - e z^{e-1} d^{m-1} n dz + ee z^{e-2} d^{m-2} n dz^2 - e^3 z^{e-3} d^{m-3} n dz^3 \text{ \&c.}$$

Hæc, meo judicio, ita corrigi debent. Posito $ddz = 0$

$$\int(z^e d^m n) + e\int(z^{e-1} d^{m-1} n dz) = z^e d^{m-1} n$$
$$- e\int(z^{e-1} d^{m-1} n dz) - e.\overline{e-1}\, dz.\int(z^{e-2} d^{m-2} n dz) = - e.z^{e-1} d^{m-1} n dz$$
$$+ ee-1\, dz\int(z^{e-2} d^{m-2} n dz)$$
$$+ e\,\overline{e-1}.\overline{e-2}\, dz^2\int(z^{e-3} d^{m-3} n dz = + e.\overline{e-1}\, z^{e-2} d^{m-2} n dz^2$$

Ergo vera Series

$$\int(z^e d^m n) = z^e d^{m-1} n - e z^{e-1} d^{m-2} n dz + e.\overline{e-1}.z^{e-2} d^{m-3} n dz - e.\overline{e-1}.\overline{e-2}\, z^{e-3} d^{m-4} n dz^3 \text{ \&c.}$$

Unde

Unde liquet, ſi e ſit numerus integer & affirmativus, quantitatem $z^e d^m n$ (quod memorabile prorſus eſt) eſſe ſummabilem: eo enim in caſu e exhaurietur, proindeque ſeries abrumpitur, & fit finita; id quod per Tuam non fieret: oportet autem ut m ſit major quam e: ſecus enim unus vel plures ſeriei termini involverent ſummas ipſarum n; quia tunc d^{-1}, d^{-2}, d^{-3}, &c., degenerant in $\int, \int\int, \int^3$; &c. ceu Tu ipſe annotaſti. Hinc poſito, exempli gr. $e = 1$, $m = 2$, & $dz = 1$, erit $\int zddn = zdn - n$, & poſito $e = 1$, $m = 3$, erit $\int zdddn = zddn - dn$, & poſito $e = 2$, $m = 3$, erit $\int zzdddn = zzddn - 2zdn + 2n$, quod etiam olim *Pariſiis*, ſed alia via inveneram, & Dno. Hospitalio, tanquam ſingulare quid communicaveram. Hinc etiam inſignes proprietates, circa quadraturas ſpatiorum eliciuntur. Data, ex. gr. (*Fig.* 8.) curva quacunque AB, ſive Algebraïca, ſive tranſcendente, ſive etiam libera manu ductâ, ſi ad illius axem AC conſtruatur alia curva AD, cujus ordinatæ DC ſint in ratione compoſita ex abſciſſis AC ad poteſtatem quamcunque elevatis, & differentiis cujuſcunque gradus (ad minimum unitate excedentes numerum poteſtatis) applicatarum BC: dico ſpatium curvilineum ADC ſemper eſſe quadrabile. Cæterum, quod nomenclationem differentialium ſummæ attinet, lubentiſſime pro Integralibus noſtris Tuas in poſterum adhibebo Summatorias expreſſiones; quod diu ante feciſſem, ſi nomen Integralium non adeo invaluiſſet apud quoſdam Geometras, qui me hujus nominis authorem agnoſcunt; ut ſatis obſcurus viſus fuiſſem, unam eandemque rem, nunc hoc, nunc alio nomine deſignans. Fateor enim nomenclationem iſtam (quæ, conſiderando differentialem tanquam partem infiniteſimam totius vel *integri*, mihi non ulterius cogitanti, venit in mentem) rei ipſi non apte convenire.

1695 April

TAB. II.

Non memini me unquam vidiſſe Dn. Ozannam, niſi forſan in conferentiis apud P. Malebranchium hebdomadatim haberi ſolitis: eo enim tempore quo *Pariſiis* agebam, verſabatur totus in practicis, quibus non admodum delectabar. Quid Tibi rei cum illo fuerit plane ignoro, & noſſe percuperem. Hoc ſcio, quod

1695 April. in compendio suo Geometriæ practicæ methodum tradit quadrandi circulum per Seriem, quæ methodus, ni fallor, Tua est; ejus verò inventionem sibi arrogavit. Alii, quos noveram, Mathematici, qui nostris delectabantur, non sunt celebres per litteras, adeoque nescio an Tibi sint noti: inter alios fuerat P. BYSANCE, ordinis qui vocatur *Oratorii*, cujus etiam est MALEBRANCHIUS: is in juventute a Mahometano Christianus factus est, huncque ordinem adoptavit. Cum apud Dn. *Marchionem* HOSPITALIUM in Arce sua prope *Blesium* sita commorarer, visum nos venerat. P. REYNEAU, ejusdem ordinis, Professor Mathematum *Angeriensis* & PRESTETI successor, qui mirum quantum delectamenti capiebat ex paucis quæ ipsi ostenderam de differentialibus: hoc calculandi genus ipsi omnino insolitum & divini quid in se continens videbatur. Dn. *Abbas* CATELANUS talia scire etiam valde gestiit, quem autem frequentare non curabam, quia tum temporis in dissidio fuerat cum Dn. HOSPITALIO, ob librum quemdam, quem ille composuerat, * hic autem refutarat † ob plures quibus scatebat paralogismos & errores, quorum amplius non memini; nunc, ut audio, reconciliati sunt.

Inter scribendum afferuntur mihi litteræ omnino ignotæ: quibus resignatis, video nomen Dn. CHIRAC, Professoris Anatomiæ Regii *Monspeliensis*, nunquam mihi ante-hac noti; is Dissertationem meam *de Motu musculorum* legisse quidem, sed, ob insuetatum calculandi modum, maximam & præcipuam partem non intellexisse queritur, meque propterea, humanissimis verbis & multis in Calculum differentialem elogiis, rogat ut ex quibus Auctoribus prin-

* *Logistique pour la Science generale des lignes Courbes, ou Maniere universelle & infinie d'exprimer & de comparer les puissances des grandeurs* 12°. Paris. 1692.

† *Remarques sur un Livre nouveau intitulé.* Principe de la Science generale des lignes courbes. Journal des Sçavans. 1692 15. Journ. du 21. Avr. pag. 257. Ed. de Holl.

Respondit CATELANUS in eodem Diario.

Memoire touchant une Methode pour les Tangentes des lignes Courbes &c. 32. Journal du 18. Aoust. pag. 557. Ed. de Holl.

Item,

Reponse à quelques Objections contre un Ecrit intitulé Principe de la Science generale des lignes courbes. 36. Journ. du 25. Sept. pag. 636. Ed. de Holl.

principia hujus calculi haurire possit, viamque qua ego ad illius cognitionem pervenerim, significem. En propria verba. *Il faut, s'il est possible, que j'entre dans cette Analyse; mais comme je suis en pays, où malaisément on trouve des Algébristes, voudriez-vous bien ajouter à la grace que je vous ai demandée celle de m'aprendre les routes que vous avez tenu pour arriver à la connoissance de cette excellente Methode. Que faire pour abreger le tems? Quels autheurs seront les plus propres?* &c. Quid ipsi hac super re consuleres nosse vellem. Nulli, ut credo, Libri reperiuntur, qui de nostro supputandi genere ex professo agant. Integram autem Methodum ex *Actis* ediscere velle difficile erit, dum pleraque absque Demonstrationibus ibi proponantur. 1695 April

Litteras Tuas *Fratri* meo legendas exhibui...... Certus...... sum *ipsum* propediem ad Te litteras daturum esse....... Vestra Disceptatio de Natura Osculi, (1) me judice, mera est Logomachia, præsertim cum in indagatione longitudinis radii circuli osculantis uterque conveniatis. Quid de verbis disputandum, quando constat de re! Verum est ex Tuo Calculo differentiali reciproco (2) hunc radium paucis verbis derivari, non minus tamen expedi-

quibus etiam respondit HOSPITALIUS.

*Reponse de Mr. G*** sur un memoire inseré dans le 32. Journ. de cette année*, 41. Journ. du 15. Dec. pag. 724. Ed. de Holl.

Et *Nouvelles Réflexions de Mr. G*** sur la Réponse a quelques Objections contre un Livre intitulé*, Principe &c inserée dans le 36. Journal de cette Année, 42. Journ. du 22. Dec. pag. 736. Ed. de Holl.

(1) Videantur. G G. LEIBNITII *Meditatio nova de natura anguli contactus & osculi*, &c. Act. Erud. 1686. Jun. pag. 289.

Item, *Jac.* BERNOULLI *additamentum ad Solutionem curvæ causticæ, una cum Meditatione de Natura evolutarum & variis osculorum generibus.* Act. Erud. 1692. Mart pag. 110. vel Opp. N°. 47. pag. 473.

LEIBNITII, *Generalia de Natura linearum, anguloque contactus & osculi* &c. Ibid. 1692. Sept. p. 440. vel Jac. BERNOULLI Opp. N°. 55. p. 543.

Jac. BERN. *Curva Dia-caustica* &c. *Natura osculorum uberius explicata*, &c. Ibid. 1693. Jun. p 244. Opp. N°. 56. p. 549.

LEIBN. *Constructio propria Problematis de Curva Isochrona Paracentrica*, &c. sub finem Act. Erud. 1694. Aug. pag 374. vel Jac BERN. Opp. N°. 64. p. 627.

Jac. BERNOULLI *Explicationes Annotationes*, &c. Act Erud. 1695. Dec. p. 542. à medio ad finem. Opp. N°. 66. pag. 647.

LEIBN. *Addenda ad Schediasma mensi Julio insertum.* Ibid. 1695. Aug. pag. 372. versus medium.

(2) Act. Erud. 1694. Aug. pag. 365. vel Jac. BERNOULLI Opp. N°. 64. p. 627.

1695 April te invenitur differentiando ipsas differentiales, hoc enim modo unica proportione eo pervenitur.

Optime notasti, & ipso HUGENIO teste, per quodvis punctum datum infinitas duci posse Isochronas, (3) eadem scilicet altitudine lapsus primi, quod etiam affirmavi Nupero *Actorum* Februario; (4) ubi haud dubie jam videris meam solutionem Problematis *Hospitaliani* (5) & fraternam: (6) vellem ut examinares utra sit succinctior & naturalior, & etiam generalior. Judicium quoque Tuum exoptarem de CRAIGII tractatu novo, annon legitime objecerim ea quæ ibidem in *Actis* annotavi. (7) Non laudo quod ita graviter invehatur in Dn. TSCHIRNHAUSEN; minus autem, quod hic illi ansam dedit: injuriosa enim litigatio viros bonæ educationis minime decet. Utique in modo construendi generaliter æquationes differentiales per appropinquationem sive polygona, (8) adhuc nonnihil desidero, quod nondum satis est exploratum, & hoc est, quod publicationem ejus adhuc retardavit: diu enim ante in hanc speculationem incideram: interim methodus quam inde deduxi determinandi curvam transeuntem per puncta flexuum omnium curvarum eidem æquationi differentiali satisfacientium non adeo invenusta est; quam curvam ostendi perpetuo esse algebraïcam.

Quod mihi in commissis dedisti ad amussim executus sum: *Ad Vesontionem* scribi curavi, ut, per occasionem Dn. Abbas BOISOT promissorum Tuo nomine admoneretur. Et per amicum, cui cum Bibliothecario Monasterii *S. Gallensis*, nomine P. *Burchardo* HERR. commercium litterarum intercedit, eundem humaniter rogavi, ut eorum

(3) Act. Erud. 1694. Aug. p. 373. vel Jac. BERN. Opp. N°. 64. p. 635.

(4) Act. Erud. 1695. Febr. pag. 65. vel Joh. BERN. Opp. T. I. N°. XXIII. p. 138.

(5) Act. Erud. 1695. Febr. p. 59. vel Joh. BERN. Opp. T. I. N°. XXII. XXIII.

(6) Act. Erud. 1695. Febr. p. 65. vel Jac. BERN. Opp. Tom. I. N°. 63. pag. 624.

(7) Respondit LEIBNITIUS in *Notatiuncula ad constructiones* &c. Acta Erud. 1695. April. p. 184. Joh. BERN. Opp. Tom. I. N°. XXIV. pag. 140.

(8) *Modus generalis construendi omnes æquationes differentiales primi gradus. Aut.* Joh. BERNOULLI. Act. Erud. 1694. Nov. p. 435. Opp. Tom. I. N°. XX. pag. 123.

eorum quæ Tibi desunt descriptionem concedat. Non dubito quin eam facile impetraturus sis: Est enim, ut mihi depingitur, vir officiosissimus & comitatis plenus. Interim, statim ac quid rescivero, Tibi notum faciam. 1695 April

Dn. *Marchio* Hospitalius nuper de Professione Mathematica, vacante in *Hollandia* scripsit, quam mihi procuraturum sperat: ipsi respondi, ut conditiones atque circumstantias hujus Professionis, & in quo loco sit, mihi quantocyus rescriberet: etenim mihi deliberandum est, an conditio sufficiens sit, ut cum uxore illuc abeam.

Vale & Fave

Tui celeberrimi Nominis Cultori
devotissimo,

J. Bernoulli.

EPISTOLA X.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De conſenſu inter poteſtates & differentias. De Curvis maximi vel minimi proprietate gaudentibus. Tentamen Solutionis per ſeries infinitas. De curvis tranſcendentibus quarum infinita puncta aſſignari poſſunt. De Problemate Curvæ æquilibrationis. De methodo quadraturarum Craigiana. *De mechanica æquationum differentialium conſtructione. De Profeſſione mathematica.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1695 Maii MUltum Tibi debeo, quod in mei gratiam *Veſuntionem* & ad *ſanGallenſis* Monaſterii Bibliothecarium P. HERR. ſcribi curaſti; quanquam de *Veſuntione* verear ne fruſtra mihi aliquid promiſerim, quoniam Dominum *Abbatem* BOISOTIUM obiiſſe ex *Gallia* nuper intellexi. Gratias etiam ago, quod valetudinis meæ curam Tibi eſſe teſtaris, perſcriptis ad me monitis minime vulgaribus, neque ſpernendis; de quibus cogitabo diligentius. Omnino enim tempus eſſe video, ut majus aliquod malum præveniam.

Recte correxiſti calculum meum. Nam dum feſtinabundus in chartam conjicio, quod litteras ſcribenti calculus ſuggerit, errorem admiſi, ſeriemque male expreſſi. Multa adhuc in iſtis ſummarum & differentiarum progreſſionibus latent, quæ paulatim prodibunt. Ita notabilis eſt conſenſus inter numeros poteſtatum a binomio, & differentiarum rectanguli; & puto neſcio quid arcani ſubeſſe. Exempli gratia

$(x+y)^1 = 1x + 1y$, vel $1x^1y^0 + 1x^0y^1$, $d^1xy = 1ydx + 1xdy$, vel $1d^1xd^0y + 1d^0xd^1y$

$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$. $\quad$ $d^2xy = 1yddx + 2dydx + 1xddy$

$(x+y)^3$

$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, $d^3xy = 1yd^3x + 3\,dy\,d^2x$ 1695
$+ 3\,d^2y\,dx \quad + 1\,xd^3y$ Maii

$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$; $d^4xy = 1\,y\,d^4x$
$+ 4\,dy\,d^3x \quad + 6d^2yd^2x + 4\,d^3y\,dx + 1xd^4y$ & ita porro.

Ubi perfectiſſimus eſt conſenſus. Nempe ubi ab una parte ponitur $x^m \; y^n$, ab altera ponitur $d^m x d^n y$. Ita reſpondent ſibi x^2 & $y\,d\,d\,x$. Nam x^2 eſt x^2y^0 & $y\,d\,d\,x$ eſt d^0ydx^2. Nam $d^0y = y$. Atque ita realis quidam conſenſus inter potentiarum indices, ſeu Logarithmos, & noſtros differentialium quaſi-Logarithmos reperitur, qui etiam ad polynomia & multi-rectangula ſeu rectangula ſolida & ſuper-ſolida extenditur, ut ſi conferamus $(x+y+z)^m$ & $d^m xyz$. Quod ſi occurrat potentia ipſius x, ut $d^m x^2 y$, conſiderari debet ut rectangulum ſolidum xzy, conſentientibus eo caſu x & z; unde operæ pretium erit proſequi comparationem inter $(2x+y)^m$, exempli gratia, (ſeu $(x+x+y)^m$) & inter $d^m \; x\,x\,y$. Nam, ubi ſuccedit extractio, ſuccedet & ſummatio. Quin & $(x-y)^m$ & $d^m \frac{x}{y}$ ſeu $d^m xy^{-1}$ poterunt comparari. Imo videndum, annon in ſummationibus concipere aliquid liceat reſpondens radicibus irrationalibus, imo affectis. Excogitavi autem olim mirabilem regulam, pro numeris coefficientibus poteſtatum, non tantum a binomio $x+y$, ſed & a trinomio $x+y+z$, imo a polynomio quocunque, ut data potentia gradus cujuſcunque, verbi gratia, decimi, & potentia in ejus valore comprehenſa, ut $x^5y^3z^2$, poſſim ſtatim aſſignare numerum coefficientem, quem habere debet, ſine ulla Tabula jam calculata; quam conſiderationem puto huic quoque meditationi profuturam; eſt enim geneſis poteſtatum generalis.

Video & novam meditationem ſupereſſe circa maxima & Minima, materiam, nondum exhauſtam. Neque enim ſemper facile eſt Problema reducere ad Tangentium inverſam, ſeu differentiales. Exempli cauſa, in inquiſitione Catenariæ, ſi non per Theoremata mechanica aliunde noviſſemus, proprietatem tangentium ejus dari, reſ-

pectu

1695 Maii TAB.II. pectu centri gravitatis, difficile fuisset obtinere lineæ constructionem, nempe (*Fig.* 9.) datis punctis A & C, & longitudine catenæ, vel funiculi AC; quæritur natura curvæ talis, ut AF sit omnium possibilium minima. Hoc profecto Problema deberet analytice solvi posse, recta via; etiamsi ignoretur Tangentes AT & ET, concurrere in T, sub G centro arcus AC vel aliquid simile. Quam ergo methodum adhibendam putas, si ipsum Problema in terminis propositis consideremus.

Inter alias cogitationes hæc mihi in mentem venit, per quam Problema, saltem videtur posse reduci ad seriem infinitam: AB sit x, & arcus AC sit z & fiat (1) $z = ax + bxx + cx^3$, &c. & AF erit $\int xdz : z =$ minimo possibili. Et quia z longitudo curvæ est constans in omnibus diversis curvaturis, ex quibus ea eligitur, per quam maximus centri gravitatis descensus obtinetur; ideo etiam (3) $\int xdz =$ minimo; seu erit $\int x\,dz = (4)\ \frac{1}{2} axx + \frac{2}{3} bx^3 + \frac{3}{4} cx^4$ &c. $=$ (5) m posito m significare minimum valorem. Sed quæruntur cœfficientes a, b, c; &c. Harum inventionem puto tentari posse, per unicam litteram quærendam e, unamque datam r, faciendo (6) $a = 10e + 11a$ (7) $b = 20e^2 + 21ea + 22aa$. (8) $c = 30e^3 + 31e^2a + 32ea^2 + 33a^3$ & ita porro, ubi numeros 10, 11, 20, &c. adhibeo loco litterarum; præterea explicabo x, faciendo (10) $x = y + r$, cujus rationem postea dicam. Explicando jam æquationem (5) per (6), (7), (8), &c., & per æquationem (10), & ordinando secundum (y), habebo æquationem cujus forma est (11)... $y^0 + \ldots y^1 + \ldots y^2$ &c. $= m$. Hanc jam oportet differentiari, sed ita ut sola littera e in ipsa consideretur, ut differentiabilis; ita habetur æquatio nova duodecima, in qua sublata est m. Sed oportet etiam in ea tolli y, quod fit divellendo ipsam in tot æquationes destructitias, quot sunt termini, quæ omnes, cum sint secundum unam incognitam e, debent coincidere inter se, id est arbitrariæ 11, 12, 20, &c. ita explicandæ sunt, ut quævis harum æquationum dividi possit per eandem æquationem finitam valorem ipsius e exhibentem; quo invento, ad seriem infinitam

nitam pro Curva quæsita perventum erit, sed præstaret si semper talia Problemata possent reduci ad æquationes differentiales. Cæterum nisi explicuissem x per $y + r$, vel simile, non potuissem instituere divulsionem, quia numeri ipsius æquationis (5) non fuissent ingressi calculum. Et in universum Artis foret, mihi nondum satis cognitæ, posse seriem infinitam revocare ad æquationem finitam differentialem cujuscunque ea demum sit gradus, quoties nempe res fieri potest. Nam dubito an semper sit possibilis.

1695 Maii

Talia adhuc plura habeo desiderata, ex quibus apparet quantum Analysi adhuc desit, cujus defectus supplere, ingenio Tuo inprimis dignum videtur; quemadmodum illud quoque cujus mentionem in *Actis* * injeci, cum de Isochrona paracentrica nuper agerem, ut prosequamur illas curvas transcendentes, quarum puncta quotvis per communis Geometriæ constructiones inveniri possunt ad imitationem sectionum anguli & rationis. *Integralium* appellatio mihi non displicet, & a me quoque interdum Tui imitatione adhibita est; plerumque tamen *summationis* vocabulo uti malo, quia magis luciferum est, & originem ipsam meditationis ostendit.

Gaudeo intelligere, quæ Dominus CHIRAC Tibi scripserit, & quæ de R. P. REYNEAU refers. Domino CHIRAC nemo, credo, Te melius consuluerit. Dnus. CATELANUS minus sincere egit, quemadmodum & Dnus. OZANAM. Ille enim Calculum differentialem; hic meam circuli seriem, pro parte cum percepissent, laureolam in mustaceo quæsivere; cum nihil de suo addidissent. CATELANUS vero, alioqui mihi contrarius, etiam mea hæc qualiacunque deprimere, ut audio, conatus est. Ante paucas septimanas *Lipsiam* scribens adjeci schediasma, Te quasi invitante, sed brevissimum; † ibi notavi etiam sine consideratione centri gravitatis, uno velut momento, ad prædictam illam constructionem Tuam perveniri posse, ope solarum differentialium. Nam descensus vel ascensus verticales ponderis & contra pondii sunt elementa ordinatarum;

* 1694. Aug. pag. 366.-368. vel Jac. BERN. Opp. N°. 64. p. 635. & seq.

† G. G. L. *Notiuncula ad constructiones lineæ in qua sacoma, æquilibrium cum pondere moto faciens incedere debet.* &c. Acta Erud. Lips. 1695. *April.* pag. 184. Joh. BERN. Opp. T. I. N°. XXIV. pag. 139.

1695 Maii rum; ut ergo maneat æquilibrium in motu, debent ascensus hi, vel descensus, elementares, esse ponderibus reciproce proportionales. Ergo & summa eorum, id est, ipsæ ordinatæ; quæ est ipsissima constructio Tua.

Quod Dnum. CRAIGIUM attinet, notavi ea occasione, verissimum mihi videri, quod terminus summator termini irrationalis debeat continere eandem irrationalitatem. Cujus rei demonstratio, quam junxi, pendet ab hàc consideratione generalissima, &, ni fallor, momentosa; quod terminus integralis & differentia, vel summa & terminus, debent habere eundem numerum radicum, seu valorum; quoniam quivis valor termini suum habebit valorem differentiæ respondentem. Hinc etiam duxi considerationes, quibus multum contrahitur quadraturarum inquisitio; sed prosequi non vacavit, etsi talia dudum consideraverim. Si Tibi aliquando vacabit eo advertere animum, libenter mittam qualescunque meas in eam rem considerationes. Notavi sane ibidem osculationes revocari ad differentias-differentiarum; Visus tamen est usus calculi reciproce differentialis hic non contemnendus.

Non miror, si diu pressisti considerationem Tuam æquationum differentialium mechanice construendarum; † possum dicere me quoque ibi speravisse aliquid ad constructionem plusquam mechanicam: Videbam scilicet generaliter, data æquatione differentiali primi casus, dari curvas algebraïcas quæsitæ occurrentes in punctis, ubi curva quæsita inclinationes habet datas, seu angulum datum facit ad horizontalem, vel verticalem. Sperabam ergo motum excitare puncti per has curvas secundum leges inclinationis trajicientis; sed nondum successit. Res huc redit: Curvis ordinatim positione datis punctum ita per eas continuè trajicere, ut ubi illis occurrit, habeat angulos ordinatim datos ad horizontem. Hoc effecto, haberetur constructio omnium curvarum datarum per æquationem differentialem primi gradus.

Egregie notasti, more Tuo, posse definiri lineam ordinatarum transeuntem per omnia puncta flexus omnium curvarum differentia-

litate

† *Modus generalis construendi omnes æquationes differentiales primi gradus. Auctore* Joh. BERNOULLI. Acta Erud. 1694. Nov. p. 455. Opp. Tom. I. N°. XX. pag. 123.

litate eadem datarum; quin & poterit linea definiri transiens per 1695
omnia puncta maximæ earum vel minimæ latitudinis; nam, eo ca- Maii
su, evanescunt differentiæ, angulusque nullus est, vel rectus; Eamque in rem complura notare memini; sed non tamen ideo ipsum curvæ transcendentis quæsitæ punctum incognitum definitur; puto tamen aliquando rem successuram, ubi constabit lineæ, exempli gratia, per omnia puncta maximæ latitudinis transeuntis, concursum cum curva quæsita, cujus est ea latitudo, non intersectionem esse simpliciter, sed contactum, vel osculum, vel saltem esse anguli dati.

Quod Dominus *Frater* Tuus in meis notavit circa numerum radicum osculi, * non displicuit; nihil enim mihi gratius quam doceri; puto tamen vos non admodum dissentire, ut Tute indicas, interim gratissimum erit judicium super ea quæstione Tuum. Officiosam ipsi a me salutem nuntiari peto.

Gaudeo Tibi aliquam conditionem offerri apud Batavos, quæ non contemnenda videtur. Scito me quoque nuper Illustrissimo viro *Eberhardo* DANKELMANO, intimo Potentissimi *Electoris Brandeburgici* Ministro, per amicum Te nominari curasse ad Professionem Mathematicam novæ apud *Halas Saxonum* Academiæ; rescriptumque mihi est, dedisse illum in mandatis, ut de Te, & fortasse apud Te quæreretur: quæ causa quoque est, ut hoc ad Te responsum maturandum putarim. Saltem ergo electionem puto habebis. Utrovis modo viciniorem Te habere gaudebo, si modo Tibi in ea re æque ac nobis consulatur. Vale, dabam

Hanoveræ $\frac{6}{16}$ May. 1695.

Cultor studiosissimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

* *Vide* Epist. *præcedentem.*

EPISTOLA XI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad praecedentem.

De consensu inter potestates & differentias, atque inde promovendo Calculo integrali. De coefficientibus minorum potestatum inveniendis. De Curvis maximi vel minimi potestate gaudentibus. De maximis maximorum, vel minimis minimorum. De maximis numeris. De regressus puncto. De curvis transcendentibus per puncta describendis. De quadraturarum methodo Craigiana. *De osculis curvarum. De dynamica & viribus corporum. De Professione* Groningensi.

Vir Celeberrime & Amplissime Fautor Honoratissime.

1695 Jun. V*Esontione* responsi nihil adhuc accepi, sed cum ex postremis Tuis Dominum *Abbatem* BOISOTIUM mortuum intellexerim, amplius haud sollicitabo. Quid P. HERR rescripserit ipse videas ex adjunctis hisce ad Bibliopolam exaratis: Est ut opinor speciosus praetextus, quo petitum Tuum honeste declinet; quoniam forsan ex Bibliotheca sui Principis descriptionem concedere non audet. Doleo sane vicem meam, quod mea Tuis commodis inserviendi promptitudo non ex voto cesserit; optime facis, si valetudini Tuae consulis: Deus det ut omnia prospere cedant.

Nihil elegantius est quam consensus quem observasti inter numeros potestatum a binomio & differentiarum rectangulo: haud dubie aliquid arcani subest. Nondum satis vacavit examinare an quid inde pro summationibus elici possit. Videtur tamen quantitatem propositam differentialem cujusvis gradus summari posse, eam primo differentiando, & dein sumendo tertiam proportionalem hujus novae quantitatis differentialis ad differentialem propositam, consideratis interim d, d^2, d^3, d^4, &c. tanquam quantitatibus algebraïcis, & non ut litteris tantummodo caracteristicis. Sic, exempli gratia; tertia

tertia proportionalis d^3 ad dd erit d, & d^4 ad d^3 erit dd, & ita de aliis. In hunc finem esto proposita quantitas differentialis tertii gradus hæc $xd^3y + dxddy$, cujus summa invenienda sit; differentietur ea, & habebitur $xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$; posito pro x, d^0x; sumatur tertia proportionalis $d^0xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$ ad $d^0xd^3y + dxddy$, quæ erit $d^0xddy = xddy$. Dico $xddy$ esse summam vel integrale quantitatis propositæ $xd^3y + dxddy$; quod quidem ante calculum primo intuitu patebat; non tamen incongruum est ostendisse, quomodo per methodum eo perveniri possit. Nota, quod in hoc scrutinio litteræ ipsæ quæ alias quantitatem denotant x, y; non considerandæ sunt ut tales, sed dumtaxat quatenus determinant d, d^2, d^3, &c. Hoc modo quadratum ipsius d^3y non est d^3y^2, sed d^6y: cubus ipsius d^3y non d^3y^3, sed d^9y: Idem puta de multiplicatione, divisione & extractione radicum $d^2y \times d^3y = d^5y$, $\sqrt[3]{d^6y} = d^2y$; item $\frac{d^2y}{d^2y} = d^0y = y$, & hac ratione $\frac{x}{x}$ non est $= 1$, sed $= \frac{d^0x}{d^0x} = d^0x$; quoniam autem $d^{-m} = \int^{+m}$; erit exempli gratia $\frac{d^4y}{d^5y} = d^{-1}y = \int y$, & $\frac{d^3y}{d^2x} = d^3y\, d^{-2}x = d^3y\int^2x$: idem intelligendum si plures sint indeterminatæ, x, y, z, &c. 1695 Jun.

Accidere potest, ceu prævideo, ut summa quantitatis differentialis propositæ, hoc modo inventa, exprimatur per seriem; tunc nempe quando proposita differentialis non est summabilis. Exempli gratia summanda sit $xd^3y + 2dxddy$; si differentiatur prodibit $xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy$: Ergo tertia proportionalis hujus ad illam, more nostro sumpta erit $\frac{d^0xd^6y + 4dxd^5y + 4ddxd^4y}{d^0xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy}$; instituta itaque divisione continua, incipiendo a primo denominatoris membro, prodibit hæc series $d^0xddy + dydx - d^0yddx + d^{-1}yd^3x - d^{-2}yd^4x + d^{-3}yd^5x$ &c. $= xddy + dydx - yddx + \int yd^3x - \int\int dy^4x + \int^3 yd^5x$, &c: quæ proinde æqualis est $\int(d^3y + 2dxddy)$. Alia invenitur series incipiendo divisionem ab ultimo membro, nimirum.

1695 Jun.

mirum hæc $2d^0 xddy - d^{-1} xd^3y + d^{-2} xd^4y - d^{-3} xd^5y + d^{-4} xd^6y$ &c. vel $2xddy - \int xd^3y + \int\int xd^4y - \int^3 xd^5y + \int^4 xd^6y$, &c. adeoque priori æqualis eſt. Video me hic inter ſcribendum, & quidem ex inſperato, incidiſſe in methodum univerſalem ſummandi vel per, vel citra ſeriem, quantitatem differentialem cujuſcunque gradus; Video etiam infinita alia adhucdum abſcondita hic latere; ea autem eruere, & ſtudioſius excolere nunc non vacat: ita enim diſtractus ſum aliis his minime affinibus cogitationibus, ut mirer ſufficientem pro his attentionem mihi, neſcio qua inquietudine agitato, ſupereſſe.

Cœterum conſenſus quem obſervaſti inter $(x+y)^m$ & $d^m xy$, vel etiam inter $(x+y+z)^m$ & $d^m xyz$, non ſuccedit, uti putabas, ubi occurrit potentia ipſius x: Ratio operanti patebit; ſi enim comparatio fiat inter $(2x+y)^m$ ſeu $(x+x+y)^m$, & inter $d^m xxy$; locum illa non habebit, niſi confundatur ddx cum $dxdx$; id eſt, differentia ſecunda, cum quadrato differentiæ primæ dx. Sumatur, exempli gratia, poteſtas ſecunda ipſius $2x+y$, & differentia ſecunda ipſius xxy, habebitur $4xx+4xy+yy$, comparanda cum $2yxddx + 2ydxdx + 4xdxdy + xxddy$; quod fieri nequit; quia ibi tria tantum, hic autem quatuor diverſa membra reperiantur: ſin autem $4xx$ diſpeſcatur in duas partes $2xx$ & $2xx$, poterit prior conferri cum $2yxddx$, & poſterior cum $2ydxdx$; quia utrobique littera d cum x affecta bis reperitur: ſed, uti jam dixi, ddx & $dxdx$ ſumendæ ſunt pro quantitatibus homogeneis, ceu ſupra feci. Idem etiam ſentiendum de comparatione inter $(x-y)^m$ & $d^m \frac{x}{y}$ ſeu $d^m xy^{-1}$; aliter enim quam conditione dicta non ſuccedit.

Regula mirabilis, quam Tibi eſſe ais pro inveniendis numeris coefficientibus poteſtatum, non tantum a binomio, ſed a trinomio, imo polynomio quocunque, fecit ut & ego aliquam tentarem; video enim ſummum ſuum uſum habere poſſe expedite elevandi quantitatem aliquam ad certam potentiam. Et reapſe, perluſtratis quibuſdam proprietatibus numerorum, aliqua illico mihi venit in mentem.

tem. Esto enim polynomium quodcunque $s + x + y + z$, &c.
elevandum ad potentiam quamcunque r; quæritur cœfficiens ter-
mini $s^a x^b y^c z^e$, &c. Dico cœfficientem illum fore $\frac{r.\,r-1.\,r-2.\,r-3.\,r-4\,\ldots\,a+1}{1.\;2.\;3\ldots b \times 1.\;2.\;3\ldots c \times 1.2.3..\,e,\ \&c.}$ id est, productum omnium terminorum progressionis arithmeticæ, a numero potestatis multinomii incipientis & unitate descrescentis, usque ad numerum unitate auctum potestatis primi nominis, productum, inquam, hoc divisum per productum omnium terminorum tot progressionum arithmeticarum unitate ascendentium usque ad numerum sui respective nominis potestatis, quot sunt reliqua, præter primum, nomina, dabit coefficientem quæsitum. Ubi notandum quod tædiosa divisio & maxima pars multiplicationis evitari potest, destruendo ante operationem partes multiplicantes, numeratoris, quæ sunt communicantes cum partibus multiplicantibus denominatoris. Exemplum sumamus, quod Tu ipse proponis: Quærendus nimirum coefficiens termini $s^5 x^3 y^2$ comprehensi in valore trinomii $s + x + y$ ad decimam potestatem elevati: substituantur in formula generali valores, nempe pro r, 10; pro a, 5; pro b, 3; pro c, 2; habebitur pro coefficiente quæsito $\frac{10.\,9.\,\overset{4}{\cancel{3}}.\,7.\,\cancel{8}}{1.\,\cancel{2}.\,\cancel{3}.\times 1.\,\cancel{2}} = 10.\,9.\,4.\,7 = 2520$. Si quadrinomii $s+x+y+z$, ad 20 potentiam elevati, quæratur numerus cœfficiens termini $s^8 x^6 y^4 z^2$, erit $= \frac{\cancel{20}.\,19.\,\cancel{18}.\,17.\,\cancel{16}.\,\overset{5}{\cancel{15}}.\,\overset{7}{\cancel{14}}\,13.\,12.\,11.\,10.\,9}{1.\;\cancel{2}.\;\cancel{3}.\;\cancel{4}.\;\cancel{5}.\;\cancel{6} \times 1.\;\cancel{2}.\;\cancel{3}.\;\cancel{4} \times 1.\,\cancel{2}}$ $= 19.\,17.\,5.\,7.\,13.\,12.\,11.\,10.\,9 = 1745944200$. Gratissimum esset Tuam nunc videre regulam; ut experiri liceret, an inter se consentiant. Tua fortasse simplicior erit; interim saltem, nec mea opus habet tabula jam calculata.

Nova Meditatio, quam affers, circa maxima & minima, mihi certe non est nova; quinimo prima fuerat speculatio, per quam solutionem Problematis curvæ catenariæ tentaveram; sed optatum successum tum non assequutus, diu post, plenariam solutionem inveni, & quidem non ex proprietate tangentium ejus, respectu centri

1695 Jun. TAB. II. tri gravitatis, sed ex eo quod infimum, vel aliud quodvis punctum B (*fig.* 10.) catenulæ, in E & F suspensæ, semper eandem vim firmitatis requirit, in quocunque demum alio puncto S suspendatur. Consule, si placet, schediasma meum Actis anni 1691, * juxta Tuum & Hugenianum insertum, & videbis inter proprietates, quas ibi recensui, hanc ultimam: *Si super* EF *infinitæ intelligantur descriptæ curvæ ipsi funiculariæ* EBF *æquales, illæque in rectas extendantur, & in singulis singulæ extensæ punctis applicentur rectæ ipsis respective distantiis a linea* EF *æquales, erit omnium spatiorum, quæ sic efficiuntur, illud, quod a funicularia gignitur, maximum.* Ex quibus luculenter apparet, me innuere voluisse, inter omnes curvas æquales super linea data EF descriptas, funiculariam habere centrum gravitatis remotissimum ab EF, & consequenter horizonti proximum. Hactenus, ut fatear, hujusmodi Problemata insolubilia mihi visa fuere, & etiamnum videntur; nec mihi ratio Tua, ea ad series reducendi, plene satisfacit. Videris enim unam eandemque litteram, nunc constantem, nunc differentialem supponere, quando dicis z longitudinem curvæ esse constantem, [quod volo, sed certo modo consideratam] & paulo ante ponis $z = ax + bxx + cx^3$, &c. quam seriem, [ideoque ipsam z] differentiasti & multiplicasti per x, eamque iterum summasti ponendo $\int xdz = \frac{1}{2} axx + \frac{2}{3} bx^3 + \frac{3}{4} x^4$, &c. ex qua operatione simul apparet coefficientes a, b, c, &c. Tibi hucusque fuisse constantes; postea vero easdem differentiabiles ponis, faciendo $a = 10e + 11a$, $b = 20e^2 + 21ea + 22aa$, $c = 30e^3 + 31e^2a + 32ea^2 + 33a^3$; ubi litteram e proindeque ipsas coefficientes a, b, c, &c. ut differentiabiles consideras. Plura alia sunt, quæ non satis capio; videtur etiam series, quæ inde nasceretur, prolixissima: Ita ut optem Methodum Tuam applicatam videre in leviori quodam exem-

TAB. III. plo, quale est hoc. Invenire (*Fig.* 11.) naturam curvæ ABC, datæ longitudinis, super recta data AC descriptæ, quæ cum recta data AC includit maximum spatium possibile ABCA. Demonstrare possum

* *Solutio Problematis funicularii* &c. Acta Erud. 1691. Jun. pag. 274. Joh. Bern. Opp. Tom. I. N°. IV. pag. 50.

possum curvam A B C esse circularem; sed per quam methodum analytice eo perveniendum sit, ne minimum quidem lumen affulget. Cæterum, multa olim circa maxima & minima observabam, quæ nondum animadversa reperio, quæ tamen in potestate sunt; quandoque nempe infinita maxima, vel minima, in eodem Problemate occurrunt, quorum illud quod maximum vel minimum est, [hoc est maximum maximorum, vel minimum minimorum] determinandum sit: Ut si quæratur (*Fig.* 12.) triangulum, vel aliud polygonum A B C, omnium curvæ cuidam ellipticæ datæ inscriptibilium, maximum. Ad hoc solvendum, video supponi debere duo puncta A & C data, ex quibus quærendum tertium B, ita ut duæ ductæ B A, B C faciant, cum data assumpta A C maximum triangulum, saltem eorum quæ super data A C describi possunt, verticem habentia in curva Elliptica: Et sic triangulum A B C esset maximum simpliciter dictum, vel primi gradus. Postea pono unicum punctum A datum, & quæro alterum C, & ex hoc B; ita ut triangulum A B C sit omnium maximorum maximum, vel maximum secundi gradus. Denique & ipsum A quæro, & ex hoc C, & ex hoc B, & habebo triangulum A B C omnium maximorum secundi gradus maximum vel maximum tertii gradus. Sic si loco trianguli, aliud quodvis polygonum, omnium in hoc ordine maximum, inscribendum esset; haberetur maximum tanti gradus, quantus foret numerus laterum polygoni: Et hac ratione spatium ipsum Ellipticum est maximum gradus infinitesimi. Eodem modo se res habet cum determinatione minimi polygoni curvæ ellipticæ inscribendi.

1695 Jun.

Tab. III.

Habeo & aliam speciem maximorum & minimorum; nimirum quando quantitates non elementaliter, sed saltatim crescunt & decrescunt; quod contingit in seriebus in quibus termini aliquousque crescunt, postea vero decrescunt, vel contra; oporteat analytice maximum vel minimum terminum invenire, ut in hac $\frac{a}{b} + \frac{a.a+1}{b^2} + \frac{a.a+1.a+2}{b^3} + \frac{a.a+1.a+2.a+3}{b^4}$, &c. quæritur quotus sit terminus minimus: Dico, si series continuetur ut numerus ter-

1695 Jun. minorum fit $b - a + 15$ fore duos ultimos terminos omnium totius feriei minimos : funt enim æquales.

Data progreffione arithmetica, ab unitate incipiente, & eo modo difpofita quo hic vides; determinanda eft generaliter feries tranfverfalis C, cujus fumma fit omnium maxima. * Sit numerus terminorum primæ feriei tranfverfalis $A = a$, numerus quotus feriei quæfitæ $= x$: dico x fore $= a + \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{3} aa + \frac{1}{3} a + \frac{1}{4})}$.

A	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
B	7 + 8 + 9 + 10 + 11
C	12 + 13 + 14 + 15
D	16 + 17 + 18
E	19 + 20
F	21

Si hæc quantitas eft numerus rationalis & integer; erunt duæ feries tranfverfales maximæ æquales ; nempe illa quæ inventa eft, & quæ immediatè fequitur : fin vero quantitas inventa fit numerus irrationalis, vel fractus; erit ille fumendus integer qui proxime major eft, & erit unica feries maxima. Efto exempli gratia $a = 6$ erit $a + \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{3} aa + \frac{1}{3} a + \frac{1}{4})} = 6\frac{1}{2} - \sqrt{(14\frac{1}{4})}$; cujus numerus integer proxime major $= 3$: dico itaque feriem tranfverfalem tertiam C effe omnium maximam : Si $a = 30$, invenietur feries maxima effe decima tertia; & fic quantuscunque fit numerus a, e veftigio quafi affignari poteft, quota fit maxima tranfverfalium feries; quod certe plures alii non reperirent nifi forfan mechanice, id eft, operatione tædiofa, & ipfa formatione omnium numerorum.

Multa adhuc adducere poffem, quæ olim circa maxima & minima meditatus fueram, quæque non contemnenda videntur. Et fane, non ita pridem, hujufmodi materia commercium litterarium, quod mihi cum Domino Hospitalio intercedit, diu fatis alebat;

* *Vid.* Joh. Bernoulli Opp. Tom. IV. N°. CLIII. pag. 27.

bat; ubi inter alia videmus, quod in vulgari differentialium methodo, differentiale maximi vel minimi non semper sit nihilo æquale faciendum; cum quandoque possit esse infinitum, imo in quavis ratione cum cæteris differentialibus. Ostendi enim potest curvas illas (*Fig.* 13.) ABC [quas ego Gallice *courbes rebroussantes*, & punctum B *point de rebroussement* nuncupo, in quarum censu habetur parabola cubicalis secunda] habere maximam applicatam BD, cujus elementum, vel differentiale, non solum est infinitum, sed simul in quavis alia ratione, cum differentiali abscissæ AD; quod cuipiam paradoxum videretur. Notavimus etiam, ut id obiter innuam, in puncto flexus curvarum, radios circulorum osculantium non semper esse infinitos, ut hactenus creditum est, & ut Tute alicubi in *Actis* supponere videris; dantur enim curvæ, ubi evidentissime demonstrari potest, quod radius circuli osculatoris, in puncto flexus, omnino evanescat. Interim & hoc verum est, quod radius ille semper sit aut infinitus, aut nullus; nunquam autem finitæ magnitudinis; sed properandum ad alia. 1695 Jun. TAB.III.

Summo jure objecisti *Fratri* meo, quod putaverit unicam tantum dari transcendentem, videl. Logarithmicam, cujus puncta quotvis per communem Geometriam inveniri possint; egregie enim notasti alteram transcendentem pro sectionibus Anguli, cujus puncta etiam per communem Geometriam facillime habentur. Ego nullus dubito plures alias hujusmodi dari, pro quibus autem methodum excogitare nondum vacavit: saltem jam video illam in eo consistere, ut inveniatur æquatio differentialis constans duobus membris omnino inter se similibus & non integrabilibus, quæ tamen æquatio sit pro curva algebraïca, qualis est hæc, $\frac{dx}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$ ubi duo membra $\frac{dx}{\sqrt{(aa+xx)}}$ & $\frac{dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$ sunt similia; id est, dx cum a, & x, eodem modo componitur, ac dy cum a & y; non autem sunt integrabilia, quia eorum integralia, vel summæ, dependent a quadratura hyperbolæ. Interim æquatio differentialis comprehendit [præter rectam, quam omnes hujusmodi æquationes necessario comprehendunt, quam autem hic non puto] aliam cur-

 vam

1695 Jun. vam algebraïcam, quam sic invenio, $\frac{dx}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa+yy)}}$ dat $\frac{y.xdx}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{x.ydy}{\sqrt{(aa+yy)}}$, eorumque summæ $y\sqrt{(aa+xx)} - \int dy\sqrt{(aa+xx)} = x\sqrt{(aa+yy)} - \int dx\sqrt{(aa+yy)} \pm bb$. Est autem $dy\sqrt{(aa+xx)} = dx\sqrt{(aa+yy)}$, per æquationem datam: ergo etiam $\int dy\sqrt{(aa+xx)} = \int dx\sqrt{(aa+yy)}$: illis itaque destitutis, manebit æquatio algebraïca $y\sqrt{(aa+xx)} = x\sqrt{(aa+yy)} \pm bb$: quæ determinat modum spatium hyperbolicum dividendi in quotvis partes æquales; ex qua divisione ipsa Logarithmica producitur. Sic ex æquatione differentiali membrorum similium, & non summabilium $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$ invenio curvam algebraïcam $y\sqrt{(aa+xx)} = x\sqrt{(aa+yy)} \pm bb$, qua ostenditur etiam circuli divisiones producere curvam transcendentem, cujus puncta quotvis algebraïce possunt inveniri, quæ ipsa Tua est curva sectionum anguli. Idem præstari potest, si inveniatur curva algebraïca, quando alterum membrum æquationis differentialis similis, per quemvis numerum multiplicatur, ut si fiat $\frac{ndx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$.

Optime notasti in *Actorum Aprili*, * constructionem meam curvæ æquilibrii immediate inveniri posse, ope solarum differentialium; sed hoc ipsum est, quod mihi ansam dederat cogitandi, annon hujusmodi perbrevis constructio, per vulgarem Geometriam elici posset; quod commodissime fieri posse videbam per notissimum illud Axioma mechanicum, quod jam ab ipso ARCHIMEDE, ni fallor, fuit receptum; & hac ratione ostendere volui, quod mediocris etiam Geometra, differentialium calculi omnino ignarus, genuinam Problematis solutionem invenire potuisset; itaque non satis possum mirari, qui acciderit, ut *Frater* meus ad tam prolixam, etiam pro specialissimo casu, pervenerit constructionem. † Eandem difficultatem moves, contra objectionem meam CRAIGIO factam, quam

* *Vel* Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XXIV. pag. 139.
† *Act. Erud.* 1691. Febr. pag. 65, vel Jac. BERN. Opp. N°. 63. pag. 624.

quam jam & Dominus HOSPITALIUS mihi movit; verum video, quod ambo meam mentem non recte percepiſtis; veriſſimum enim, & mihi videtur, quod terminus ſummator termini irrationalis debeat continere eandem irrationalitatem; contra quod non fuit objectio mea; ſed illud non verum mihi videtur, quod CRAIGIUS tacite ſupponit, terminum ſummatorem non ſolum idem ſignum radicale, quod verum eſſet, ſed etiam ſemper eandem quantitatem ſub ſigno radicali contentam habere, quam habet terminus ſummandus; Poſterior enim hujus propoſitionis pars falſa eſt; in quam rem Domino HOSPITALIO dedi exemplum, & complura alia dare poſſem in quibus methodus CRAIGII manifeſtiſſime non ſuccedit, ob ſolam ſuam falſam hypotheſim; Forte occaſio dabitur de his in *Actis* aliquid publicandi. 1695 Jun.

Cæterum, quod dicis obſervationem meam, quod nempe ſummatio ordinatarum $\sqrt{(a^4 + x^4)}$ pendeat ex dimenſione curvæ parabolicæ cubicalis primæ, etiam Tibi fuiſſe factam a Domino *Marchione* HOSPITALIO; ſcias quod illam a me primo habuerit, cujus forte alias Te non admonuiſſet. Interim, vix credo ſummationem dictam connectionem habere cum dimenſione curvæ hyperbolicæ. Conſiderationes Tuas, quas pro contrahenda quadraturarum inquiſitione detexiſti, mihique communicandas promiſiſti, grato animo recipiam, quandocunque venerint.

Totus perſuaſus ſum oſculum circuli cum curva eſſe concurſum trium interſectionum in eodem puncto, niſi in vertice curvæ; ubi aliquando quatuor concurrunt. Concipe enim punctum aliquod, tanquam centrum, fluere in recta indefinita perpendiculari ad curvam; nunquid circulus, centro ubivis exiſtente deſcriptus, tangit curvam, alibique adhuc bis ſecare poterit: punctum vero contactus eſt concurſus duarum interſectionum, ſed unicum eſt punctum, in quo centro circuli exiſtente, tertia interſectio coincidat cum duabus permanentibus; eſt enim accidens, ſi quarta ſimul concurrit: Exempli gratia, ſectionem conicam circuli in pluribus quam quatuor punctis ſecare non poteſt, ut demonſtratur in doctrinâ Conicorum; evidentiſſimum autem eſt circulum radii evolutæ, ideſt, ipſum oſculatorem, præter quam in puncto oſculi, adhuc alibi ſecare ſectionem Conicam: ſic itaque, ſi oſculum eſſet concurſus quatuor

1695 Jun. tuor interſectionum, revera ſectio conica quinquies a circulo ſecaretur. Hoc interim verum eſt, quod quævis curva in ſe rediens, ideoque & ipſe circulus, aliam curvam quamcunque in punctis imparibus ſecare nequit; & ob hanc rationem, oſculum non datur abſque quarta interſectione alibi facta. Plura de hac materia addere non poſſum; eorum enim quæ veſtram diſputationem concernunt nunc non recordor, nec *Acta Lipſienſia* mihi ſunt ad manus, ut ea relegere poſſem.

Jucundiſſimum fuit legere meditationes Tuas metaphyſicas, quas ſub *Specimine Dynamico*, * in eodem *Actorum Aprili*, publicaſti. Ejuſdem tecum ſum opinionis, quod Corporum natura primario non conſiſtat in extenſione; hæc enim & ipſi vacuo competit, ſine quo ſane motum concipere nequeo. In quo autem corporea natura præciſe conſiſtat, hoc utique facile dictu non eſt. Tu quidem illam ponis in vi naturæ utique ab Authore indita, quam primitivam appellas; ipſam autem extenſionem in continuatione ſive diffuſione hujus ſubſtantiæ nitentis, vel vi primitivâ inſtructæ; ſed videris mihi ſupponere id quod eſt in quæſtione. Subjectum enim vis, in quo nempe ea inhæret, eſt ipſum corpus; & ſic corpus tanquam præexiſtens concipi debet: niſi forte diſtinctionem feceris inter vim potentialem & actualem; illam, quæ animabus competit corpora ad nutum voluntatis movendi; hanc, quam corpora a priori vi commota, ſibi invicem communicant; & ſic eo redires quod, niſi vehementer fallor, a Te olim ſtatutum alicubi me legiſſe memini, corpus eſſe *mentem momentaneam*. Unde conjicio Te nunc eo collimare, quando dicis *Vim primitivam reſpondere Veterum formæ ſubſtantiali.*

Optime notaſti contra *Carteſianos*, quod factum ex mole corporis in velocitatem non ſit quantitas motus; ſed quantitas *impetus*, ſeu, ut poſtea appellas, *motionis*; ex quarum aggregato naſcatur quantitas motus. Quæ dein dicis de tubo circa centrum rotato, de globo in cavitate ejus exiſtente, de niſu, ſeu ſollicitatione, de vi viva & mortua &c. veriſſima debent videri iis, qui ex noſtra interiori

* G. G. L. *Specimen Dynamicum, pro admirandis Naturæ Legibus, circa Corporum vires & mutuas actiones detegendis, & ad Cauſas ſuas revocandis.* Acta Erud. 1695. April. pag. 145.

teriori Geometria norunt, qua ratione quodlibet quantum ex infinitis differentialibus, & quodlibet differentiale ex infinitis aliis, & quodlibet horum aliorum adhuc ex aliis infinitis, & ita in infinitum, componi intelligendum sit; quibus consideratis, certe destruitur unico ictu, Atomistarum opinio. 1695 Jun.

Hæc & alia similia, quæ, in Mathesi abstracta, attentius consideranti obvenerunt, olim etiam mihi ansam dederunt ad plurimas speculationes Tuis non multum absimiles, circa rerum exordia & proprietates; quarum aliquæ si publicarentur, procul-dubio quam plurimis pro mero lusu ingenii, ne dicam pro ridiculis, haberentur, quæ tamen rationi quam-optime consentanea mihi videntur. Quod vero sub finem de virium æstimatione dicis, fateor Tuas rationes me nondum convincere; non ideo, quod opinio Tua sit prorsus nova, & contra eam, quæ hucusque fuit ubique recepta, & nunquam in dubio posita; sed ideo quod eam ab effectu deducas, qui tamen non est perpetuus & constans. Quod enim Corpora ascensus faciant quadratis celeritatum proportionales, non ideo etiam vires erunt in hac ratione, existentibus Corporibus æqualibus: ascensus quippe isti, licet sint homogeneum quid, non sunt effectus, nisi ut ita dicam, accidentales; qui solummodo dependent à Legibus gravitatis & motus materiæ ætheréæ; quas ubique summus rerum Arbiter, si aliter constituere voluisset, etiam Corpora celeritatibus suis iisdem, & proinde viribus iisdem, facerent ascensus omnino in alia ratione; unde constat hujusmodi effectus non immediate, & unice, provenire a viribus Corporum motorum; quæ procul dubio pergerent moveri in infinitum, si ab alio peregrino non impedirentur: quod itaque ad certam tantum altitudinem ascendant, potius est effectus retardationi materiæ ambientis adscribendus.

Sed quid multis opus; idem Tuum argumentum in Te retorqueri potest; quo ostendam vires Corporum æqualium esse in ratione celeritatum ipsarum. Concipiamus enim duo corpora æqualia, A celeritate ut 2, & B celeritate ut 1, moveri, si vis horizontaliter in vacuo; & nunc in via simul offendere medium aliquod uniformiter densum, & retardans quod ingrediuntur; Nunquid celeritates utriusque corporis successive imminuuntur, & imminutiones,

in

1695 Jun. in medio uniformi, sunt in ratione spatiorum percursorum. Sic itaque ambobus corporibus tandem ad quietem redactis, corpus A nonnisi duplo altius in medium penetraverit, quam corpus B. Ergo, Tuo more loquendo, vis corporis A est ad vim Corporis B, ut effectus illius ad effectum hujus, id est ut 2 ad 1. Eodem omnino modo ostendere possem vires corporum motorum esse in alia quavis ratione, si modo medium non uniformiter penetrabile supponatur: in quavis enim suppositione corpora vires suas convertunt in penetrationem, vel potius in superationem resistentiæ continuatæ medii. Multa alia super hac materia dicenda haberem, sed Epistolæ forma jam præter spem nimis excrescit.

Ex quo ultimas meas ad Te dedi, jam ter litteras [quarum postremas nudius-tertius] accepi a Domino BRAUNIO Theol. Doctore & Professore *Groningensi*; qui mihi dicit, me forte brevi a Proceribus Academiæ suæ invitatum iri, ad Mathesin publice ibi docendam; sed eos velle certiores esse de adventu meo, ideoque à me quærit, num hanc spartam acciperem, cum stipendio annuo mille & ducentorum florenorum hollandicorum præter emolumenta Academica. Et sane respondi, ante acceptas Tuas ultimas, verbumque dedi, ut vix retrahere possim, nisi forte novum aliquod incidens interveniat. Interim, plurimum Tibi debeo, pro cura quæ Tibi mei est, dum laborasti ad obtinendum pro me Professionem Mathematicam novæ apud *Halas saxonum* Academiæ. A longo jam tempore, non diffiteor, nova hæc Academia mihi appetitum movit. Quid autem nunc, rebus sic stantibus, faciendum, Te ipsum consulo, qui meus es patronus, & in quem omnem fidem pono, quidnam mihi utilius, & utrum alteri præferendam censes, indica. Vale & ama, ut soles

Basileæ d. $\frac{8}{18}$ Junii 1695.

Celeberrimi tui nominis
Cultorem assiduum.
J. BERNOULLI.

EPIS-

Fig. 6.

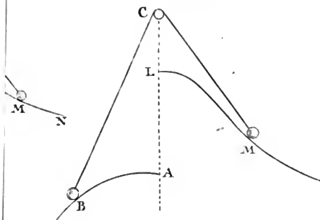


Fig. 8.

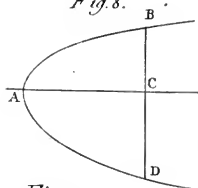
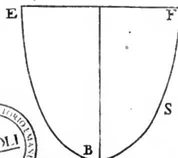
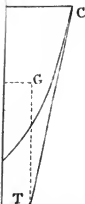


Fig. 10.







EPISTOLA XII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Responsio ad præcedentem.

De Calculo differentialium promoto. De coefficientibus terminorum potestatum. De curvis maximi proprietate gaudentibus. De curvarum osculis. De viribus corporum. De Hugenio. *De* Nieuwentiitio, *&* Tschirnhausio, *& Jac.* Bernoullio. *Quomodo literatos agere deceat.*

Vir Celeberrime, Amice Honoratissime!

Gratias ago, quod apud *Sangallenses* inquisisti. Non dubito quin R. P. Heer candide scripserit quod res est, *Vitodurani* postrema tantum mihi desunt, quæ fortasse non difficulter ab *Einsidelensibus* impetrari possent. Sed nolim Tibi negotium facessere, quem distractum video, præsertim cum de familia transferenda sit cogitandum. Idem dicam de *Abbate* Boisotio. Oblit ille, non ideo minus tamen Dnus. *Præses* Boisotius Frater ejus talia ad me libenter mittet; præsertim cum in Elogio *Abbatis*, typis edito, facta sit perhonorifica mentio consilii mei, & voluntas defuncti in me juvando inter laudes ejus referatur. Ipsum elogium mihi missum est. Quanquam & translata inde in *Diarium Eruditorum* † viderim, quæ me tangebant. Sed quid commodè facere possis judicare Tuum est, meum vero de Te [si possem] ornando, potius-quam onerando cogitare; quem quanti faciam, mallem rebus quam verbis ostendere. 1695 Jun.

Non sine admiratione vidi, quam facile, & quam alte penetraveris in ea quæ proposueram de singulari calculi genere, quo rectangulorum differentiales cum polynomiorum potentiis conferuntur; tantum pro litteræ x exponentibus substituendo exponentes ipsius

† *Journal des Savans.* 1695. 22. Journal.

1695 Jun. *d* ipsam *x* afficientis. Et pulchre notasti, hoc modo ipsas *d* tractari quasi litteras, non considerando ipsas *x*, vel *y*, nisi tanquam afficientes litteram *d*, versa rerum vice, cum alias *d* sit tantum nota quædam syncategorematica, *x* autem, & *y* sint quantitates. Quod seriem infinitam attinet, poterit ea interdum commodè finiri, aliquam ex ipsius *d* quasi-potentiis ponendo nihilo æqualem; quemadmodum & per alias hypotheses variari calculus potest, quoniam alicui quasi-potentiæ ipsius *d* valorem pro arbitrio tribuere licet. Ex his jam magis intelligi arbitror, quanto jure dudum differentias potentiis, summas radicibus comparaverim; quod nunc reali harmonia comprobatur; præsertim respectu termini ipsius, seu summæ primæ, quæ etiam quasi extractione quadam invenitur. Et omnino, quæ in geometrica progressione & logarithmis operationes locum habent, eas hic imitari licet, quod sane ingeniosissimè in rem contulisti. Nec dubito, quin egregium aliquid in animo habueris, cum scribis Te, inter scribendum, ex insperato incidisse in methodum universalem, vel per seriem, vel citra seriem summandi quantitatem differentialem cujusque gradus, infinitaque alia adhucdum abscondita hic latere, quæ nunc excolere non vacet. Quod si mihi eam methodum, & quæ alia in his occurrent, communicaveris, habebis me præclarorum inventorum Tuorum præconem candidissimum. Successit consensus etiam inter $(x+x+y)^m$ & inter $d^m xxy$; modo scribas $(x+\xi+y)^m$ & $d^m x\xi y$; ita enim si m sit, 2, fiet $x^2+\xi^2+y^2+2x\xi+2xy+2\xi y$, & $d^2x+d^2\xi+d^2y+2dxd\xi+2dxdy+2d\xi dy$. Sic enim manet comparatio, modo x & ξ non confundamus, etsi coincidant. Hinc libertas variandi, quæ poterit prodesse ad summandum.

Regula pro coëfficientibus potestatum a polynomiis, seu generali potestatum generatione, quæ mihi aliquando naviganti in mentem venit, non abludit a Tua. Soleo tamen enuntiare, ad evitandam divisionum mentionem, per numeros combinatorios, veluti in decima-septima potentia existens forma $a^5 b^4 c^3 d^3 e^2$ habet coëfficientem, qui fit, cum in se invicem ducuntur numeri exprimentes 17 rerum quaterniones, 17–4 rerum terniones, 17–4–3 rerum

rerum terniones, 17--4--3--3 rerum biniones. Sed numeri combinatorii rursus ex productis arithmetice progredientium fiunt, ut constat, unde res in effectu cum Tua forma coincidit. 1695 Jun.

Problemata, in quibus quæritur ex lineis omnibus una præstans aliquid in desideratis maximum, non possunt Tibi esse nova. Sed novum fortasse est, rem methodo quadam aggredi, qualis illa est, quam ad Te nuper perscripsi, in qua quæ contra moves, non obsunt. Cum curvam quæsitam assumo ut datam, eique assigno certam seriem; utique quamdiu hanc unam respicio, sumo x & z pro variabilibus, & a, b, c &c. pro constantibus. Sed hoc modo semel assecutus æquationem a differentialibus liberam, eamque jam ad maximam accommodans; considero plures tales series potuisse intelligi, eas autem habere x & z communes, sed a, b, c, &c. sunt variantes; has ergo tunc differentiari oportet, non illas. Et omnino se res habet, ut in meo calculo differentiali reciproco; ubi aliquando, non ordinatæ, sed parametri differentiantur. Itaque non est quod mireris, eandem quantitatem a me, nunc ut constantem, nunc ut variabilem sumi. Etsi autem via ad seriem perveniendi prolixiuscula videatur, fortasse tamen series ipsa satis simplex fiet, cum ipsa curva quæsita est simplex. Quanquam hic id tantum quæratur, ut certam ad hæc perveniendi methodum obtineamus.

Arcum, qui maximum segmentum data longitudine includat, esse circulum, non alia methodo quærere instituebam, cum hæc meditarer. Oportet veniri ad aliquid omnibus curvis commune, ut inde fiat electio; nec aliud hactenus occurrit aptum, quam series infinita, quæ verum est ad talia Analyseos supplementum. Inquisitione maximæ inter maximas, [repetita etiam replicatione,] interdum & in mechanicis Problematibus opus habui. Inquisitio Tua maximæ inter terminos serierum, ad imitationem maximæ inter ordinatas figurarum, non videtur contemnenda. Verissimum est esse in curvarum punctis quibusdam quasi irregularitates circa maxima vel minima, flexus, & tangentes; & sæpe fit, ut curva in uno puncto infinitas habeat tangentes, ut si in curvis qualis adjecta est (*Fig.* 14.) caput continue minuatur tandemque evanescat in punctum; Tunc enim infinitæ illæ tangentes, quarum totum TAB. III.

 caput

1695 Jun. caput erat capax, in unum illud punctum quadrant. Subtilissima mihi visa sunt, quæ commentus es, circa usum æquationum differentialium, inter terminos similes, ad inveniendas curvas transcendentes, quarum puncta haberi possint algebraïce, quæ velim prosequaris. Optime feceris, si ad *Acta* miseris, in quibus CRAIGIUM putas errasse. Non observavi Circulum Conicam, præter osculum, adhuc alio in puncto secare solere, & regulariter, ni fallor, in osculo concurrunt duo contactus, id est, quatuor radices.

TAB. III. Duæ normales ad curvam regulariter se secant ut (*Fig.* 15.) BA, & CP, in P; accedente autem C ad B, variatur ipsum P, donec ad ultimum P, nempe A deveniatur, quod est centrum osculi in B. Hæc ut conciliemus cum Tuis, ad exemplum quod innuis, sed non exponis, in Conica venire utile erit. Id gratum erit, si mihi Tuam sententiam uberius perscripseris; cui eo libentius deferam, quo minus mihi tribuo, quoties rem satis examinare non possum.

Quod vero meum *Specimen Dynamicum* attinet; puto Te vicissim non satis meditatum, quæ scripseram; judicasse paulo festinantius. Eandem conclusionem consecutus sum, non tantum ab affectu, sed & à priori, ut innuisse me observabis, etsi non posuerim modum, qui habet aliquid elegans & inexpectatum. Minime autem putare debes effectum, quo usus sum, relatum ad gravitatem, habendum pro accidentali. Sume quemcunque effectum vim habentem, cujus adeo productione vis consumitur, idem prodibit; gravitatem autem elegi, quia aptissima est ad æstimationem, ut explicui. Et nihil refert, quomodo fiat gravitas, cujus causam esse ab ambiente non nego. Quod de medio affers, vim in se penetrantis absorbente, non facit ad rem nostram; quia vim, quam absorpsit, non reddit, seu non est effectus vim habens. Ast ambiens, quod est causa gravitatis, vim quam absorpserat, restituere potest, & tali effectu ego utor ad æstimandum. Pro medio igitur ut in eo quoque Tibi sa-
TAB. III. tisfaciam, fingamus (*Fig.* 16.) seriem elastrorum æqualium, & similium, & æqualiter dispositorum, quæ transitu corporis sint flectenda, seu deprimenda, & acceptam flexionem retineant, objecto velut pessulo, adeoque sint tensa; reperies Corpus A libræ unius, cele-

celeritate ut 2, & Corpus B, librarum quatuor, celeritate ut 1, æqualiter in tale medium penetrare, seu vim suam consumere, æquali elastrorum numero depresso; adeoque cum vim suam consumserint, æquali vi producta, æquali scilicet tensione, etiam æqualem vim habuisse. Nam effectum integrum, producere aptum, causæ æquipollere suppono. Ex his intelliges, me non tam perfunctoriè in statuendis hujusmodi versari, quam Tibi, quod miror, persuasisti. Hugenius quoque a mea sententia non est alienus. Nec minus miror, quod putas me supponere quod est in quæstione, dum corporis naturam in vi primitiva nitendi, retinendique colloco. Esto subjectum illud, cui vis inhæret, vel cui attribuitur esse ipsum corpus, non ideo tamen sequitur corpus concipi debere ut præexistens; pari enim jure etiam Ens esset prius essentia, quia hæc ei inhæret. Et quicquid demum pro primario prædicato afferri posset, talem objectionem pateretur. Quin potius hoc prædicatum, sumtum cum prædicato communi Entis, substantiæ, vel subjecti, constituit corporis notionem. Sed etsi attulissem aliquid posterius corporis essentia, non ideo principium petiissem; si modo attulissem attributum aliquod reciprocum intelligibile, quod a me factum puto, ab aliis non item. De Commercio Animæ & Corporis mirabilem habeo sententiam, per quam puto omnia intelligibiliter explicari; eam nunc Tibi perscriberem, si tempus pateretur; faciam tamen prima quaque occasione, Tibi gratulatus, quod etiam his meditationibus non indelectaris. Ita enim judico, præclara agitantem non solis mathematicis circumscribi debere: Imo hunc usum debere esse Matheseos, ut etiam ad cætera acuat mentem. Vacuo non puto esse opus, non magis quam atomis, nec arbitror Te dissensurum, ubi rationes meas intellexeris. 1695 Jun.

Perturbasti me mirifice, dum nuntiatam Tibi incomparabilis Hugenii mortem scribis. Cum nihil tale ad me pervenerit, erratum spero. In eo eram ut darem ad eum litteras. Aliquoties mihi infausta obtigit litterarum mearum remissio, ob extinctos, quibus destinabam. Velut Ernestum *Hessiæ Landgravium,* Seckendorffium, & alios. Pelissonius & Abbas De la Roque, *Diarii Gallici* pristinus author, meas accepere pene mo-

1695 Jun. ribundi. Si obiisset HUGENIUS maximam jacturam passi fuissemus. Frustra precaremur, ne obierit; sed si vivit, ut spero, precabimur Deum, ut diu vivat, ipsumque rogabimus ut præclaras cogitationes edere maturet.

Groningensem Professionem non possum Tibi dissuadere; re præsertim eo usque provecta; eoque magis, quod non plane exploratum habeo quantum *Halis Saxonum* detur. Quidquid statues; opto ut ex sententia procedat; quo ingenium Tuum ad ea convertere totum possis, quibus Scientias augeas, ut præclare cœpisti.

Pene oblitus eram dicere *Bernardum* NIEUWENTIIT, Mathematicum Batavum, duos libros contra nostrum Calculum scripsisse, † quos & mihi misit; sed cum honorificam nostri mentionem faciat, respondebo in *Actis*, * & par pari reddam. Putat dx esse aliquid, sed $dxdx$, item ddx esse nihil, nec iteratas differentiationes capere potest, pro dx, dy, utitur litteris a, e, &c. & ita nostra primi gradus, aliis tantum notis in suam rem transferre studet. Sed quantos usus habeant nostræ notæ, pulchrè admodum ostendunt, quæ inter nos inde ab aliquot mensibus per litteras sunt agitata. Putat etiam nostrum calculum non porrigi ad $z = y^x$, si x, y, z sint indeterminatæ. Hunc, quem credit, defectum ut suppleat, comminiscitur æquationem mirabilem, quæ meo more erit $y^{x+dx} + xy^{x+dx-1}\,dy - y^x = dz$. Sed ex tali æquatione nulla potest duci constructio, cum non servet leges homogeneorum transcendentium. In responsione mea ostendam, quod nos huic, quem sibi persuasit, defectui dudum & melius providerimus, & quod Tu etiam per Te ad idem, quod ego in eo negotio repereram, perveneris. Eo enim ingenio sum, ut libenter suum cuique tribuam. Abutitur interdum nostris ratiocinationibus, ut tales calculos non esse tutos probet; velut, cum ex eo quod ipsæ dx constantes assumuntur, secundum nos sequi putat etiam ipsas

dy

† *Considerationes circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatæ Principia & Calculi differentialis usum.* Amstel. 8°. 1694.
Analysis infinitorum seu Curvilineorum proprietates, ex polygonorum natura deducta Amstel. 8°. 1695.

* G. G. L. *Responsio ad nonnullas difficultates a Dno* B. NIEUWENTIIT *circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas.* Acta Erudit. 1695. Jul. p. 310.

dy fore constantes; quare breviter indicabo in quo peccaverit, etsi omnia non sim persecuturus. 1695 Jun.

Puto ad Te pervenisse secundam editionem *Medicinæ mentis* Domini de Tschirnhaus; miror quod ne nunc quidem recte dederit modum enumerandi lineas algebraïcas cujusque gradus, & quod nostra evitare affectet, spe [quam frustraneam puto] ex vulgaribus notis omnia non minus commode ducendi: quanquam fortasse facile ad hæc perventurus, nonnisi quia nostra admonuere.

Constitui numerum curvarum cujusque gradus foret operæ pretium. Ubi illud dispiciendum esset, an umbilici, seu foci, & rectarum ab iis ad curvam ductarum summa vel differentia sufficerent ad omnes curvas enumerandas. Domino *Fratri*, egregio Viro, rogo ut me commendes. Ego, tametsi visus sit paulo frigidius agere, non ideo minus ingenium ejus & doctrinam maximi facio, speroque vobis convenisse. Ita autem animatus sum, ut optem omnes, quibus serio cordi est profectus solidarum Scientiarum, animis non minus quam ingeniis consentire, nihilque omittere quod alere amicitiam queat; cui consequens est, & omnibus modis, & captare quod conciliare, & evitare quod offendere possit; ita tamen ut veritatis jura non lædantur. Possunt vero hæc inprimis facere, mutuis conatibus, uti mutuo inventis, tum summa in dissentiendo moderatio, candor in consentiendo, ut agnoscamus ingenue, quid cuique debeamus; postremo communicare libenter, & facere vicissim, ne alium pœniteat communicasse. Hæc sunt, quibus mire augeri posse putem & perfectionem inventionum, & voluptatem invenientium.

Passim autem peccatur ab egregiis hominibus, dum vel gloriolam in reprehendendo captant, vel alienæ laudi, etiam tacitis actibus, detrahunt. Utrumque rectis ingeniis indignum; præclaris etiam supervacuum censeo; imo gloriæ quam expetunt noxium. Nam qui aliquid egregie possunt, vereri non debent ne materia præripiatur. Cum potius juvari eos certum sit aliorum inventis, ut tanto meliora per se possint. Tuum ego pluris feci acumen maximum, quod conjunctum esse visum est cum candore, & moderatione, quæ sæpe deesse solent juvenibus etiam præstantissimis,

1695 Jun. at nondum expertis, quantum ſit momentum in recto videndi inſtituto. Cui ſi inſiſtis, de quo dubitare non poſſum, nihil eſt quod à Te non expectem ad incrementum Scientiarum. Optarim autem ut nonnihil temporis etiam Medicinæ meditandæ conſerves, quæ vel maxime indiget ingenio Tuo, & vides quo applauſu Tua de muſculis † fuerint accepta. . . . .
Vale. Dabam

Hanoveræ 24. Junii. 1695.

Cultor ſtudioſiſſimus
Gothefridus Guillelmus
LEIBNITIUS

† *Diſſertatio de Motu muſculorum* ſæpius edita, Opp. Tom. I. N°. XVIII. p. 93. & ſeq.

EPISTOLA XIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Diſceſſum paranti quædam negotia commendat.

Vir Celeberrime Amice Honoratiſſime!

1695 Jul. CUm amicus nuper ex *Batavis* veniens mihi inter alia narraverit, ſe *Groninga* tranſeuntem intellexiſſe una die tres Profeſſores vocatos, atque inter illos Te, cujus nomen enuntiabat; ego Tibi ex animo gratulor, nec dubito quin, ita ferente ipſa itineris Tui ratione, videndi Tui copiam nobis ſis facturus, cujus tamen rei tempus prænoſſe velim, quia ſæpe alioſum mihi eſt excurrendum, ne caſu aliquo ſpe gratiſſima excidam.

Nunc

Nunc illud rogo, ut ante discessum a Domino *Fratre* Tuo, Celeberrimo Viro, multa salute a me nuntiata succedaneam Tuæ curam mihi impetres, circa ea quæ rogavi, sive a Domino *Præside* BOISOTIO aliqua adveniant, sive ex *Einsidelensi* Cœnobio obtinere liceat VITODURANI quæ mihi desunt, sive quid aliud occurrat, in quo favore ejus sit opus, quem vicissim officiis demereri velim, si qua occasio offeratur. 1695 Jul.

Johannis VITODURANI Chronicon habeo ab initio usque ad hæc verba: „INNOCENTIO V. successit JOHANNES XXI, „natione Hispanus, qui sedit pauco tempore, num cum Camera, „quam ipse pro se in Viterbii *circus* Palatium construxerat solum „corruit, & intra ligna & lapides collisus, die VI post casum, „Sacramentis omnibus perceptis, expiravit. Sedit autem anno „1277. "

Hic finit Chronicon meum. Secundum VOSSIUM autem [in libro *de Historicis Latinis*] continuari debet usque in Seculum sequens. Quod si extat illa continuatio, eam mihi communicari rogo; paucarum sane plagularum erit; cum integrum Chronicon non sit admodum prolixum.

Quod cætera attinet, me ad priores refero, Tibique iter felix & cætera quoque omnia prospera precor.

Hanoveræ 5°. Jul. 1695.

Cultor studiosissimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPISTOLA XIV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad praecedentem.

Ad Professionem Groningensem *vocatus, Patriam relinquere parat. Seriei universalis pro quadraturis nova demonstratio. De puncti regressus difficultate. De Curvis percurrentibus. De curvarum osculis. De* NIEUWENTIITIO, & *medicina mentis* TSCHIRNHAUSII. *De sua indole & valetudine. De dimensione curvarum per arcus circuli. De* HUGENIO.

Vir Amplissime atque Celeberrime, Fautor Honoratissime.

1695 Jul. DEnuo *Vesuntionem* scribi curavi, ad sollicitandum Dominum *Præsidem* BOISOTIUM, Fratrem *Abbatis* defuncti, ut monumentorum, quæ hic Tibi promiserat, Te compotem reddat. Hactenus occasionem nullam nactus fui scribendi ad *Einsidelenses*, quam tamen jam ante acceptas postremas Tuas diligenter quærebam. Interim spero me tandem quamdam impetraturum, & quidem per amicum, qui eo litteras ferri curabit. Nihil enim non tentabo, quando agitur de Tuis desideriis explendis, & libenter omnia seponam negotia, mei licet ipsius incommodo, si Tuis commodis obstetricandum sit.

. . . .

Nudius tertius iterum litteras accepi a Domino *Doctore* BRAUNIO, in quibus significat rem feliciter confectam, meque ab Amplissimis Curatoribus ad Professionem Mathematicam destinatum, a Celsissimis Ordinibus vero approbatum & confirmatum fuisse; ita ut forte, ante octiduum, Publicas Vocationis Litteras sim accepturus; simulque de rebus meis, tanquam cito *Basileam* deserturum, disponere me jubet, quod jam mense Octobri *Groningæ* desideret. Expeditam adeo itineris aggressionem a me exigi certe non expectabam,

bam, quia ad minimum hyemem adhuc *Basileæ* ſperabam tranſige- 1695
re. Citiſſimus iſte diſceſſus me non mediocriter turbat, præſertim Jul.
cum hactenus de transferendo domicilio nondum cogitaverim, nec uxorem meam, cui patriam, parentes, conſanguineos, & filiolum nondum ſemeſtrem, qui pro itinere perferendo nimis delicatus eſt, deſerere moles inſuperabilis videtur, ad iter mecum ſuſcipiendum proclivem reddere potuerim. Verbo, mille me curæ & ſollicitudines, ceu hiſce caſibus fieri ſolet, obruunt: Ignoſce igitur, ſi ad tempus meditationibus Mathematicis valedixero, dum fata quietiorem reconceſſerint ſtatum. Non poſſum tamen quin ad ſingula ultimarum Tuarum puncta breviter reſpondeam.

Quanquam egregium aliquid in animo habuerim, & peculiare compendium ſperarim pro ſummationibus, & inprimis pro methodo tangentium inverſa, ex iis quæ in prioribus meis animadverti, circa comparationem rectangulorum differentialium cum polynomiorum potentiis; non tamen per otium hucuſque licuit ea ulterius proſequi. Et ſane multarum imagine rerum ita ſum confuſus, ut, nonniſi in ipſo ſcribendi articulo, hiſce animum adhibeam, & quidem ſatis oſcitanter. Memineris me ſeriem univerſalem inveniſſe pro quadraturis & rectificationibus, per continuam additionem & ſubtractionem quantitatum æqualium, quæ Tibi non diſplicuit: En nunc aliam non minus curioſam. Quærenda eſto $\int n\,dz$; differentietur $n\,dz$, habebitur $n\,ddz + dn\,dz$; ergo, modo meo, ſumenda eſt tertia proportionalis ipſius $d^0 n\,ddz + dn\,dz$ ad $d^0 n\,dz$; quæ itaque erit $\frac{d^0 n\,ddz}{d^0 n\,ddz + dn\,dz}$ = [dividendo numeratorem & denominatorem per dz] $\frac{d^0 n\,dz}{d^0 n\,dz + dn\,d^0 n}$: facta diviſione continua, inchoando a priori denominatoris membro, proveniet $\int n\,dz = d^0 n\,d^0 z - dn\,d^{\overline{\,1}} z + d^2 n\,d^{\overline{\,2}} z - d^3 n\,d^{\overline{\,3}} z$ &c. $= nz - dn\int z + d^2 n \int^2 z - d^3 n \int^3 z$ &c. inchoata vero diviſione à poſteriori membro, erit $\int n\,dz = d^{\overline{\,1}} n\,dz - d^{\overline{\,2}} n\,ddz + d^{\overline{\,3}} n\,d^3 z - d^{\overline{\,4}} n\,d^4 z$ &c. $= dz\int n - d^2 z \int^2 n + d^3 z \int^3 n - d^4 z \int^4 n$, &c. quoniam nunc [poſita dz conſtan-

1695 Jul. te $\int z, \int^2 z, \int^3 z, \int^4 z$, &c. æquantur ipsis $\frac{zz}{1.2.dz}$, $\frac{z^3}{1.2.3.dz^2}$, $\frac{z^4}{1.2.3.4.dz^3}$, $\frac{z^5}{1.2.3.4.5.dz^4}$, &c. prior series $\int n dz = nz - dn\int z + d^2 n \int^2 z - d^3 n \int^3 z$ &c. convertetur in hanc $\int n dz = nz - dn \frac{z^2}{1.2.dz} + d^2 n \frac{z^3}{1.2.3.dz^2} - d^3 n \frac{z^4}{1.2.3.4.dz^3}$, &c. quæ omnino eadem est, quam in *Actis* publicavi, quod valdopere miror: hunc enim eventum, cum hæc inciperem scribere, non sperabam; putans longe aliam seriem hac methodo proventuram: Elegans iste consensus mirifice methodorum probitatem, præsertim hujus posterioris, ubi tam mirabiliter & contra omnem consuetudinem cum litteris d proceditur, confirmat. Sic etiamnum sum in opinione, infinita alia & inaudita inde erui posse, dummodo aliquis, attentiori scrutatione, illa prosequi vellet; quod certe a me nunc exigi non potest. Cæterum si ponamus dn constantem, erunt $\int n, \int^2 n, \int^3 n, \int^4 n$ &c. $= \frac{nn}{1.2.dn}$, $\frac{n^3}{1.2.3.dn^2}$, $\frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}$, $\frac{n^5}{1.2.3.4.5.dn^4}$ &c. hoc modo altera series $\int n dz = dz\int n - d^2 z \int^2 n + d^3 z \int^3 n$, &c. mutabitur in hanc, $\int n dz = dz \frac{nn}{1.2.dn} - d^2 z \frac{n^3}{1.2.3.dn^2} + d^3 z \frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}$; &c. ubi pariter in applicatione $dz, d^2 z, d^3 z$ &c. destruuntur per dn, dn^2, dn^3, &c. ita ut proveniant quantitates pure algebraïcæ, quæ series itidem per additionem & subtractionem reperitur.

TAB.III. Eodem modo, quo ego, concipis curvam retrogradam (*Fig.* 13.) quæ punctum habet in quo infinitæ lineæ tangunt, & proinde dx ad dy omnes habet possibiles rationes; illud enim punctum nihil est quam evanescentia capituli quod considerari potest, vel sic (ut in
TAB.III. *Fig.* 14.) vel sic (ut in *Fig.* 17.); id quod manifeste patet in cycloïdibus, & conchoïdibus interioribus; cycloïs enim protensa refert speciem primi, & contracta secundi, coalitus vero protensæ & contractæ facit curvam retrogradam. Interim difficultas hic se prodit,

prodit, quam nondum mihi eximere potui: Concipiatur enim (*Fig.* 18.) curva ABC evolvi, & evolutione describi curva AFGH; Filum utique BF evolvens evolutione semper crescit; ita ut curva AFGH sit una continua curva: Intelligatur nunc caput BC evanescere, proindeque BF, CG evadere æquales; quo fit ut portio curvæ FG degeneret in semiperiphæriam circuli, adeoque continua curva AFGH constet tribus diversis portionibus, AF, FG, GH: Et hac consideratione sequitur, [si quidem ab universali ad particulare sit argumentandum] si (*Fig.* 19.) $\alpha\zeta\epsilon$ sint, exempli gratia, duæ semicycloides communes, curvam ex evolutione genitam non esse cycloïdem integram, $\alpha\phi\epsilon$ ut hactenus creditum est, sed esse $\alpha\phi\gamma\zeta$ compositam ex semicycloïde $\alpha\phi$, ex semicircumferentia $\phi\gamma$, & ex portione $\gamma\zeta$; Hæ cum sint diversæ curvæ, quomodo unicam & continuam curvam producere censendæ sint, non video. 1695 Jul. TAB. III. TAB. IV.

Jam satis ostendi Domino *Marchioni* Hospitalio, ubi erraverit Craigius; verum illud publice faciendum non puto, antequam ipse Craigius ad priores meas objectiones responsionem fecerit. Præter illas curvas transcendentes, quarum in ultimis meis mentionem feci, nimirum quarum puncta possunt algebraïce haberi; video omnes esse in earum censu, quarum natura exprimitur per æquationem ad dimensionem indeterminatam ascendentem, qualis est $x^x = y^x$ (quibus etiam accenseri possunt Quadratrix, Spiralis *Archimedea*, Loxodromica plana aliæque.) Possunt enim in his curvis puncta quotvis geometrice determinari. Hinc Tibi deliberandum relinquo, annon jure hujusmodi curvas peculiari nomine Percurrentium nuncupaverim, ad distinctionem earum quæ omnino sunt transcendentales; id est, quarum ne unicum quidem punctum algebraïce invenitur; & annon medium tenere censendæ sint inter algebraïcas & transcendentes: cui & Dominus De Tschirnhaus suffragari videtur, in nova editione *Medicinæ Mentis & Corporis*, pag. 109 & seqq. ubi etiam aliquas harum curvarum species profert; quas vero absolute inter geometricas *Cartesianas* referri debere contendit.

1695 Jul. Libenter concedo in osculo occurrere duos contactus, ea ratione qua Tu intelligis; adeoque certamen Te inter & *Fratrem* meum, est pura puta logomachia, ut jam in præcedentibus meis innui; sed nego eapropter osculum esse concursum quatuor radicum: duo enim isti contactus non sunt unius ejusdem circuli, sed duorum diversorum qui in unum coalescunt; sic in problemate quodam possent, exempli gratiâ, sex circuli curvam quamdam certa ratione tangere, qui tamen in certo casu omnes sex coalescerent; anne ideo contactus iste censendus esset concursus duodecim intersectionum unius circuli, vel concursus duodecim radicum? Absonum utique hoc foret; posset enim circulus hac ratione quamlibet curvam secare in tot punctis quot liberet.

TAB.IV. Ego osculum sic concipio: Esto (*Fig.* 20.) curva quædam ABCDE, ex ejus puncto quopiam C indefinita ducta intelligatur perpendicularis CG: Centro alicubi G sumpto, satis à C distante, describatur circulus BCD, qui utique simpliciter tangit curvam in C, & alibi adhuc bis secat curvam in B & D: intelligatur nunc centrum G paulatim moveri versus punctum C mobile; quo fiet, ut etiam duæ intersectiones B, D, magis accedant ad idem punctum C, donec tandem alterutra earum, B vel D, [utramque enim simul impossibile est, nisi forsan partes curvæ CB, CD, sint similes, id est si punctum C sit vertex summus] coincidat cum puncto contactus C; hoc casu, dico GC esse radium circuli osculatoris BCD; manifestum autem est, hocce modo osculum esse concursum trium tantum intersectionum; nimirum contactus simplex C, qui æquivalet duabus intersectionibus, coincidit cum tertia intersectione B vel D; & quia hæ intersectiones omnes semper in eodem circulo considerantur, ubicunque existat centrum G, erit osculum revera concursus trium & non plurium radicum.

Nisi candorem meum & ingenuitatem, ut ipse fateris, jam satis compertam haberes, subdubitarem sane annon ægre tuleris, quod fecerim quasdam objectiunculas, vel potius difficultates contra *Specimen* Tuum *Dynamicum*. Stylus enim, quo uteris, ad sententiam Tuam defendendam solito nervosior videtur. Mihi sane nunquam persuasi *Te tam perfunctorie in statuendis hujusmodi versari*; sed

sed si non satis meditatus sum quæ scripseras, sique judicavi paulo festinantius, condonabis: quæ enim dixi non minus mature mihi perpensa existimaveram. Interim persuasum Te velim, nullam contradicendi libidinem, sed merum veritatis amorem me eo impulisse; & credas ejusmodi pruritum, qui omnibus Philosophastris communis est, quia quod aliud agant non habent, ab indole mea longe esse alienum. Patere ergo ut scrupulum, discendi gratia, proponam, quem in Tua responsione reperio. 1695 Jul.

Dicis duo Corpora A & B, quæ sint mole ut 1 & 4, celeritate vero ut 2 & 1, æqualiter in medium uniformiter elasticum penetrare, seu vim suam consumere æquali elastrorum numero depresso. Supponamus autem corpora A & B æqualia, sed celeritatibus moveri ut 2 & 1: secundum opinionem tuam, corpus A quadruplo altius penetrabit in medium quam corpus B: Videor autem mihi posse demonstrare, profunditates corporum æqualium in medio uniformiter elastico peractas esse in ratione subduplicata, non vero duplicata celeritatum. Sit enim (*Fig.* 21.) corpus A, TAB.IV. quod penetret in medium AB uniformiter elasticum, idest, cujus quodlibet punctum C æquali elastro sit præditum, adeoque ut omnes elasticitates simul sumptæ in abscissa AC designentur per applicatam CF trianguli ABG....: Et sit Corporis A celeritas prima AD. Si itaque invenienda sit ejus celeritas CE, quam in puncto C habebit, construenda est curva DEB, cujus differentiales applicatarum CE sint ut applicatæ trianguli CF, id est, ut retardationes sint elasticitatibus proportionales: Demonstratur autem facile, quod curva DEB sit parabola, cujus vertex D, & axis DA. Habeat nunc corpus A celeritatem aliam primam A*d*; ad inveniendas celeritates cæteras C*e*; haud dubie construenda est altera parabola de *b*, verticem *d* & axem *d*A habens, quæ sit eadem cum priori DEB, quia utrobique elasticitates sunt eædem. Est autem, ob identitatem parabolarum, $AB : Ab = \sqrt{AD}.\ \sqrt{Ad}$. Ergo numerus elastrorum depressorum celeritate AD, est ad numerum elastrorum depressorum celeritate A*d*, in subduplicata ratione celeritatum ipsarum: Ideoque, juxta hanc demonstrationem, corpus A requireret celeritatem

1695 Jul. ritatem quadruplam ad producendum effectum duplum, loco quod secundum Te requiritur celeritas tantum dupla pro effectu quadruplo.

Quæ mihi narras de *Bernhardo* NIEUWENTIIT omnino lepida sunt: Ecquis a risu abstinere posset, cum ille, ... de nostro Calculo, velut cæcus de coloribus, ratiocinatur? Quid, quæso, sibi vult mirabilis ista æquatio quam comminiscitur? Erunt sane irriti conatus, quos intendit contra aliquid cujus nequidem ideam habet; nec felicius ipsi cedet quam CATELANO, aliisque, qui deprimere voluerunt Calculum differentialem, eam ob causam tantum quia illum assequi non poterant: Ars enim non habet osorem, nisi sui ignorantem; Aggressores autem diversi sunt, alii modesti, alii vehementes; ad quos priores refero NIEUWENTIIT, eumque laudo, quod ita moderate procedit. Optarim interim ut mihi contingat videre ejus duos Libros.

Forte fortuna in manus meas incidit secunda Editio *Medicinæ Mentis* Domini DE TSCHIRNHAUS: miror & ego, qui fieri potuerit ut insufficientem dederit enumerationem curvarum algebraïcarum, siquidem statim ad oculos cuilibet patet, omnes illas omisisse, quarum æquationem ingrediuntur diversæ potentiæ ipsius y. Cæterum ejus librum obiter quidem perlustravi; modus tamen scribendi non ubique placet, dum suos errores olim commissos palliare, propria inventa, ut ut satis communia, exaggerare, aliorum vero imminuere tam scite novit. Non puto ope focorum, ut quidem jactat, omnes curvas & vel solas algebraïcas construi posse. . . . .

. . . .

Cæterum optime me mones, ut nonnihil temporis etiam Medicinæ meditandæ conservem; sed excusabis me, cum noveris meditationibus assiduis a tenera ætate adeo me tradidisse, ut inde mea constitutio corporis delicata admodum facta sit, quæ non permittit ut actionibus, quæ non quidem mentis, sed corporis applicationem postulant diu immorer. Hinc [quod doleo] ægre feror ad diuturnam lectionem librorum, ad scribendum, ad calculandum, verbo, ad omnia quæ corpus & inprimis oculos fatigant. Ob hanc rationem

nem paucos omnino evolvi authores, imò nequidem Cartesii *Geometriam* attente me perlegisse asserere possum; præcipua namque quæ in Mathesi facio inventa, inter nocturnas horas [quas jam lecto decumbens somno suffurari soleo, quod meditationibus commodissimum videatur] mihi sola attentio suggerit; nullo plerumque arrepto calamo ad faciendum calculum; quem licet prolixissimum, sola mente, longe expeditius instituo, quam si notas in chartam conjicerem. 1695 Jul.

Cum nuper meditarer super rectificatione Curvarum, inveni modum generalem & promptum, data curva qualibet, construendi curvam aliam, quæ cum proposita sit æqualis arcui circulari. Unde determinare me posse puto, utrum curva aliqua sit rectificabilis, vel saltem cum circulo comparabilis, nec-ne. Si mihi tempus suppetierit, aliquid de hoc ad *Acta* * referri curabo. Ex *Hollandia* intelligo Nob. Hugenium, non quidem mortuum, sed per integrum quadrimestre jam graviter decumbere; ex *Gallia* vero mihi scribitur illum in mentis impotentiam incidisse, quod ipsi jam olim etiam solemne fuisse *Parisiis* audivi. Precor Deum ut incomparabili Viro, & mentis, & corporis sanitatem quamprimum restituat. Vale & ama, Vir celeberrime.

Tuum ad officia paratissimum

J. Bernoulli.

P. S. Hasce jamjam itineri traditurus, Tuas 5°. Julii datas accipio. Gratias debitas refero, pro congratulatione, qua vocationem meam comitaris, Tibi vicissim prospera quæque precor. Domino *Marchioni* Hospitalio dudum promisi, me, si absque uxore proficiscar, iter suscepturum *Parisios*, Dicas mihi, quæso, qua ratione nunc fieri possit, ut & tua præsentia mihi sane super omne gratissima frui detur; ita tamen ut immensas itineris ambages evitem; quæ quidem

 me

* *Meditatio de Dimensione linearum curvarum per Circulares* Acta Erudit. 1695. Aug. p. 374, vel Opp. Tom. I. N°. XXVI. pag. 142.

me non impedirent, si modo id commode, & sine periculo, fieri posset. Cætera quæ me jubes omnia fideliter exequar, ut jam supra innui. . . . .

. . . .

EPISTOLA XV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De HOSPITALIO. *Difficultatis circa punctum regressus Solutio. De Curvis transcendentibus, amnon percurrentes omnes. De osculis curvarum.* De TSCHIRNHAUSIO. *De viribus corporum vivis.* De HUGENIO.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime.

1695 Jul. CUm Te discessum e Patria meditantem oporteat occupatissimum esse rebus necessariis & propriis; intempestivum, imo iniquum foret ingerere Tibi aliena, & pertinentia ad internum illud mentis theatrum, quod externa quiete indiget. Itaque pleraque hujus Epistolæ differas licet, dum vacabit examinare. . . . .

De me in itinere adeundo non erit cur sis sollicitus, quoniam ubi *Groningæ* eris, satis ad ea se se per otium occasio dabit; cum non adeo magno hinc intervallo tunc sis absfuturus. Itaque quanquam non facile venire huc possit hospes gratior, ferenda tamen est mora necessaria. Ubi ad Illustrissimum HOSPITALIUM perveneris, cultum a me Tuo, quæso, testimonio confirma. Mirum est solum ipsum in *Gallia* in Geometriæ profundiora penetrasse; dum tot alii, qui ab his studiis etiam præsidia vitæ petunt, inter vulgares notitias torpent. Itaque magna nobis ab ejus ingenio adhuc promitto.

De Medicina optarim ut sis sollicitus, vel Tui ipsius causa, non quasi ego Te velim ad praxim illam fastidiosissimam damnari, sed quod

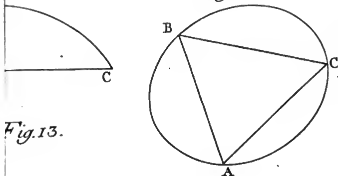
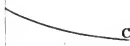


Fig.13.



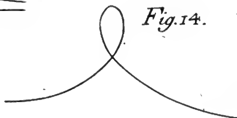
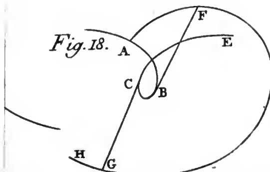


Fig.16.







quod putem meditando a Te magna quædam erui posse ad interiora naturæ cognoscenda, quibus praxis ipsa juvetur. Nam quæ hactenus CARTESIUS, vel alii, in Physicis dedere, parum admodum ad usum faciunt. 1695 Jul.

Mathematicis nolim ut nunc mentem occupes; volo tamen paucis tangere loca Litterarum Tuarum, quæ id postulare videntur; de quibus aliquando cogitabis cum plus otii nactus eris. Ubi comparationem illam inter polynomii potentias & rectanguli differentias porro prosecutus fueris; spero Te nos reperta Tua ignorare non passurum. Ego quoque per otium de re tanti momenti cogitabo. Elegantissima interim methodi hujus nostræ mirabilis confirmatio, novo hoc seriem tuam prodeundi modo, sese prodit. Quod difficultatem attinet lineæ unius continuæ ex Circulari & Cycloïdali compositæ, non puto nos ea re turbari debere; cum revera unius lineæ perfecta generalisque notio non detur, quæ vetet partem ipsius A uniri cum parte ipsius B; & quæ naturæ sunt diversissimæ, certis describendi modis, sæpe unam componant. Ubi suo tempore tibi vacaverit, gratum erit nosse paulo distinctius, quæ contra Dnum. CRAIGIUM ad Dnum. *Marchionem* HOSPITALIUM scripseris.

Cogitandum puto, annon omnes lineæ transcendentes sint simul percurrentes; licet nondum id nobis semper sit exploratum; quemadmodum certe omnium illarum, quæ a Circuli & Hyperbolæ quadratura pendent, nota nobis ratio percursus. Artis jam foret, simile quiddam & in aliis invenire. Estque id ipsum ex meis desideratis unum, quæ vobis valentioribus, perspicacioribusque commendo.

Quod controversiam de radicibus osculi attinet, scito me jam dedisse manus, &, ante dies complures, iis quæ *Frater* tuus vir egregius responderat, olim perfunctorie, sed nunc occasione præcedentis Epistolæ Tuæ curatius inspectis, omnino deprehendisse verissima ejus monita fuisse: jamque Dno. MENCKENIO scripsisse, ut retractationem meam inferat *Actis*, * quo *Frater* tuus candorem meum intelligat. Vereor enim ne sequius de me existimaverit,

L 2 quem

* 1695. Aug. pag. 371, versus medium.

1695 Jul. quem forte credidit palliare errorem voluisse. Cum tamen dilatæ agnitionis non alia fuerit causa, quam distractio animi, longe diversa studia plerumque volventis. Hoc rogo, ut ei cum salute plurima significes. Nullas equidem hactenus ab eo accepi litteras; sed tamen nec velim ei laborem scribendi fortasse ingratum imponi.

Si rationem invenires determinandi, quæ curva sit rectificabilis, vel per se, vel saltem cum circuli arcu; rem maximi momenti in hoc negotio præstares. Itaque hortandus es, ne hujus meditationis obliviscaris.

Aliquid egregium dedisset Dnus. Tschirnhausius, si ostendisset modum, data linea algebraïca, inveniendi ejus focos, seu modum describendi lineam per fila circa quædam puncta fixa, per convergentes, aut divergentes, aut vicarias iis parallelas, aut ostendendi impossibilitatem. Equidem potest eo perveniri, si calculo deducamus curvas ex focis, & æquationes ad curvam inventas comparemus datæ; sed ego optarem Methodum directiorem & breviorem. Modus, quo ipse percurrentes cum algebraïcis comparat, coactus est, & in speciem detortus. Ego majores ex nova Libri ejus Editione progressus expectabam. Præclara tamen in Physica experimentali observasse puto; quæ vellem ut ederet, potius quam Geometricis solis immoraretur, in quibus mihi optimas vias ingredi non videtur, dum commodas meditandi rationes ab aliis monstratas evitare affectat.

Nunc venio ad controversiam inter nos agitari cœptam, de æstimatione potentiæ motricis; speroque nos rectissimam viam terminandæ ejus ingressos, per penetrationem scilicet in medium Elasticum, aliterve æqualiter ubique resistens. Sed opus est, ut rem ordiar paulò altius. Aio igitur, in universum, Artem æstimandi in eo consistere, ut omnia reducamus, quoad licet, ad mensuram quamdam congruam, cujus simplici repetitione sit opus, ut in numeris est unitas Itaque concipiamus jam corpus B, in medio liberrimo, sine ullo impedimento moveri, certa velocitate, ut a, & successive aliquot globis inter se æqualibus, & ejusdem materiæ, nempe L; M; N, &c. eundem dare gradum velocitatis, ut e, atque hoc effectu, eoque solo peracto, conquiescere, omni vi agendi omissa

omissa & huc impensa; tunc dico unum ex globis, motum celeritate *e*, quam accipit, posse haberi pro mensura potentiæ; Et cum omnium globorum L, M, N, æqualis sit potentia, & aggregatum potentiæ omnium, id est, totus effectus causæ toti, seu potentiæ, corporis B, in hunc quippe effectum impensæ, æquetur; [quod unum suppono, sine quo nulla erit possibilis virium æstimatio,] sequetur potentiam corporis B, velocitate *a* præditi, exprimi per potentiam globi L, moti velocitate *e*, numero globorum multiplicatam, seu potentiam corporis B esse ad potentiam globi L, ut numerus globorum est ad unitatem. Hinc porro, si aliud sumatur Corpus C, motum celeritate *b*, quod itidem vim suam exacte consumat in globorum dictorum numerum certum, dando cuivis velocitatem *e*; tunc dicam ego potentias Corporum C & B ita esse inter se, ut sunt numeri globorum æqualium in velocitatem *e* concitatorum. Sed jam pro globis æqualibus, certa velocitate præditis, assumamus alios effectus æquales repetitos, exempli gratia, certa pondera ad certam altitudinem elevanda; dico nos eam proportionem potentiæ, quam per viam præcedentem globorum, pure mechanicam, nihilque physicum involventem consecuti sumus, etiam consecuturos, si jam gravitatem adhibeamus. Nempe finge (*Fig.* 22.) λPL normam, seu angulum rectum, ita ut pertica λP sit verticalis, & PL horizontalis, sustinens grave L; idemque esse in normis μQM, νRN, &c. sustinentibus gravia M & N; quæ gravia sint æqualia, & per omnia similia inter se, ceu globi, qui ante; & normæ sint etiam per omnia sese eodem modo habentes, ita ut λ, μ, ν, sint in eadem recta horizonti parallela, & L, M, N, itidem in eadem; patet corpus B incurrens successive in perticas λP, μQ, νR, quas fingimus esse lineas rigidas, ponderis & resistentiæ expertes, elevare hos globos graves L, M, N, ad eandem altitudinem, veluti L ad altitudinem (L) unde globus L elevatus ad (L), & delabens per arcum (L)S deveniet in horizontem TS, vel LQM; ibique procurret ea velocitate, quam postulat descensus altitudo, & quam adeo dedit ipsi corpus B, elevando; idemque erit in cæteris M, N, adeoque perinde est, ac si æstimemus numerum gravium æqualium ad eandem altitudinem elevato-

1695 Jul.

TAB. IV.

1695 Jul. rum, an vero corporum æqualium numerum eandem velocitatem nactorum; si scilicet tantus sit ascensus, ut præcise illam velocitatem producere possit. Unde intelligitur posse nos tuto adhibere gravium æstimationem, ad æstimandam potentiam. Est autem gravitatis consideratio pulchre apta ad hanc æstimationem; quia in homogeneas partes commodissime dividi potest. Finge scilicet B consumere potentiam suam incurrendo in duas perticas λ & μ, sed C incurrendo tantum in unam λ, utique dupla erit potentia ipsius B, at potentia ipsius C erit tantum simpla. Hinc patet potentiam ipsius B, quæ elevat duas libras L & M, ad altitudinem unius pedis, si (L) vel (M) ponamus pedali altitudine esse super horizontem L M, esse duplam potentiæ ipsius C, quæ elevat solum unam libram L ad altitudinem unius pedis; similiter etiam hinc sequitur, potentiam, quæ elevat libram ad duos pedes, esse duplam potentiæ quæ elevat libram ad unum pedem. Nam finge grave L, elevatum incursu ipsius B in normam λ, tradi in (L) ipsi normæ μ, facili quadam connexione seu machinatione, ut ejus ope rursus tantundem elevetur ubi B in μ incurrerit; patet B non minus integram suam vim consumere hoc modo quam ante, nihil enim refert, sive (L), sive M, ad pedem secundo incursu elevet, cum a normæ ipsius, machinationisve resistentia animus abstrahatur. Itaque potentia ipsius B consumitur in elevationem ipsius libræ ad pedes duos; unde sequitur porro etiam ejusdem potentiæ esse elevare libram ad duos pedes, cujus est elevare duas libras ad pedem unum.

TAB.IV. Jam veniamus ad elastra, seu ad medium elasticum; vides facile quo tendam; nempe finge (*Fig.* 23.) L λ, M μ, N ν, esse elastra æqualia, & similia, eodem modo tendenda procursu mobilis B: utique [ex principio æstimandi nostro] potentiam ipsius B æstimabimus numero talium elastrorum æqualiter tendendorum, totam ejus potentiam in hoc unum consumentium. Pono autem ejusdem potentiæ esse elastrum aliquod tendere, & grave quoddam attollere ad altitudinem, ex qua cadens id ipsum elastrum sic tendere possit; sive ejusdem esse potentiæ Elastrum aliquod mediate, vel immediate, ad determinatum tensionis gradum producere:

ducere: Ex principio ſcilicet noſtro, quod effectus integer ſuæ cauſæ æquipolleat, ſeu quod æquipollentia ſint, quæ idem poſſunt. Hinc neceſſe eſt, ut pro elaſtris ſubſtitui poſſint pondera, aut vice verſa. 1695 Jul.

Itaque ut nunc ad id veniamus, de quo proxime inter nos agebatur; neceſſe eſt corpus B, habens celeritatem ut duo, quadruplo altius penetrare poſſe in medium, talibus elaſtris æqualiter diſſeminatis inſtructum, quam corpus æquale D, habens celeritatem ut unum. Nam ſi corpus D poteſt attollere unam libram ad altitudinem pedis, potentiam ſcilicet ſuam conſumendo; poterit corpus B duplæ celeritatis attollere unum libram ad quatuor pedes, vel quatuor libras ad unum pedem, vel ut utrumque una locutione complectar, poterit quater attollere unam libram ad unum pedem, antequam vim ſuam conſumat; vel quod idem eſt, ſi unum elaſtrum poſſit intendi, lapſu libræ ex pede; conſequens eſt B celeritate dupla poſſe quatuor elaſtra intendere; ſi D æquale, celeritate ſimpla, tantummodo intendat unum.

Ita ratiocinationes ſemper ſibi reſpondent & ſatisfaciunt. Si vero non procederent, & alia proportio virium, inter duo corpora datæ celeritatis, oriretur, conſumendo ipſa in Elaſtris intendendis, quam prodiret in ponderibus attollendis, aut in motibus imprimendis, caderet tota Scientia Dynamica; ſeu impoſſibile eſſet vires æſtimare: imo potentia non eſſet quantitas certa, ſed quiddam vagum & abſonum. Sed hæc fuſius explicui, ut aliquando per otium examinares. Res enim magni momenti eſt.

Cæterum, ſi ad priora nuper reſpondere viſus ſum ſolito excitatius; hoc ſtudio augendi utriuſque noſtrum attentionem factum, Tibi facile ſpero, re conſiderata, perſuadebis. Ego facillime objectiones fero; a Te vero adeo non refugio, ut potius expetam; quod ſciam mihi fructuoſas eſſe ſolere, præſertim ubi animum intenderis. Et quanquam in re, diu a me conſiderata, aliquid præſtitiſſe ſperem; facile tamen agnoſco, eo Te ingenio eſſe, ut diuturnos labores noſtros, brevi non æquare, ſed & vincere poſſis. Puto autem Dynamicum negotium a Te feſtinatius tractatum fuiſſe; quod omnia tam pulchre determinata haberi poſſe, quam mihi

1695 Jul. mihi deprehendere visus sum, non suspicabaris. Quod superest, vale, & ubicunque sis, me ama, & felicibus utere fatis. Dabam

Hanoveræ 29. Jul. 1695.

P. S. Incomparabilem HUGENIUM obiisse haud dubie intellexisti. Quanta hæc sit jactura dici satis non potest; ob summum viri judicium, cum maxima, profundissimaque rerum notitia conjunctum; Utinam, quemadmodum spero, reperiantur in ejus schedis, ex quibus pars eorum, quæ meditatus est, erui & publico commodo produci in lucem possit. Dolendum est quod vis morbi, quæ mentem obfuscaverat, non permisit ut ipse, quod optimum visum fuisset, ea de re non statuerit, atque ordinarit. Nisi forte [ut fieri solet] paulo ante mortem ad se rediit, ultimamque voluntatem suam aperuit; quod si factum est, non diu latebit.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA XVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Halensis *Professio* BERNOULLIO *offertur*..

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime.

1695 Sept. CUm forte *Berolinum* nuntiassem Te a *Groningensibus* vocatum esse; jussu Illustrissimi DANKELMANNI, mihi commissum est, ut inquiram annon commode effici possit, ut *Halam Saxonum* potius accedas: Itaque volui hoc Tibi significare, ut mihi, si videbitur, mentem Tuam amica fiducia aperias, statumque Professionis *Groningana*, atque emolumenta indices; ita enim fortasse

taſſe in Te exorando elaborare majore cum fructu poſſem. De cæ- 1695
tero, me ad præcedentes meas refero, incertus an hæ Te *Baſileæ* Sept.
ſint inventuræ. Vale.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{5}{15}$ Septemb. 1695.

Doctrinæ tuæ
æſtimator perpetuus
Godefridus Guillelmus
LEIBNITIUS.

P. S. Ubi mea de penetratione in medium elaſticum reſponſa expendere vacaverit, ſententiam noſſe velim.

Nolim, ut mea de quibus a Te in prioribus ſcripſeram, vel minimum officiant tempori Tuo; cujus nunc potiſſimum habenda ratio eſt, dum iter magnum paras. Itaque ſi [quod ex ſilentio ſuſpicor] Tibi nunc ad hoc animum adhibere non licuit, ſcito ea me æquitate eſſe, ut nolim commoda mea cum aliorum incommodo conjungi. Fortaſſe aliquid ex Te didicero, cum tempus & locus ſcribere patientur.

EPISTOLA XVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

Proficiſcitur Groningam. *De Studiis Mathematicis apud Gallos. De Oſculis Curvarum. De comparandis Curvis cum arcubus circularibus. De viribus corporum. De* HUGENIO.

Vir Celeberrime & Ampliſſime, Fautor Honoratiſſime.

1695 Sept. PUblicas Vocationis Litteras, quod bono ſit omini, accepi ipſo meo natali die, vigeſimum nonum aggrediens annum. In eo ſum, ut nunc quovis die relicturus ſim patriam, quod ſane intra octiduum fiet: Tandem uxorem induxi, ut ſe mihi præbeat comitem in itinere, unà cum puerulo noſtro............. Hanc ob cauſam, iter non ſuſcipiemus per *Galliam*; ſed recta *Francofurtum* petemus. Cum advenero *Groningam*, de adventu meo Te quantocius certiorem reddam; ideoque reſponſionem meam eouſque differas. VITODURANI Chronicon, nec apud *Einſidelenſes* reperire eſt, ut ex Bibliothecarii, cui ipſemet ego ſcripſi, reſponſione, quam Tibi mitto, videre poteris. Jam tertia vice *Veſuntionem* ſcribi curavi, ſed nihil adhuc venit.....................

. . . .

Ubi *Groningæ* fuero, omnia tentabo ut mihi aliquando Te videndi copia detur; hoc enim unicum eſt, quod ardenter deſiderem. Si ſolus profectus fuiſſem; multos Patronos, quos in itinere adiiſſem, mihi propoſueram: ſic ſpe excidi perveniendi ad Dnum. HOSPITALIUM, quem etiam propediem rus abiturum intelligo. Mirum non eſt illum ſolum in *Gallia* in Geometriæ profundiora penetraſſe; ideo enim tot alii, qui his ſtudiis incumbunt, inter vulgares notitias torpent, quod noſtra non putent eſſe de pane lucrando.

Bono

Bono oportet sint signo nati Dni Hospitalius, Varignonius, & pauci alii, quod æquius sint animati; plurimos enim alios novi, qui ægre & indigne satis ferebant, cum de nostris loqueremur, ut torvus eorum vultus satis indicabat: nescio annon me juvenem, cum hominibus gravibus ita loquentem, audire dedignati fuerint; ita ut inventa Tua forte ab illis benignius recepta fuissent, si præconem habuissent graviorem. 1695 Sept.

Vix puto omnes lineas transcendentes esse simul percurrentes; omnes enim percurrentes, ope Logarithmicæ, construere possum; & hoc modo quadraturæ circuli & hyperbolæ, imo omnium spatiorum ab invicem dependerent, quod egregium inventum esset.

Gaudeo Te nunc nobiscum in eadem opinione, circa numerum radicum osculi: certe credideram aliud quid subesse quòd ita firmiter contrariæ sententiæ inhæseras; sæpe enim contigit, ut rem diversimode considerantes etiam eam diverso modo concipiamus, licet in puncto quæstionis conveniamus. Hujusmodi controversia agitata fuit inter Clavium & Peletarium, de angulo contactus; quamvis, quod verius videtur, neutrum ejus naturam bene percepisse crediderim. Dnus. Hospitalius etiam in nostram opinionem transiit, & miratus est Te in re tam clara a nobis discrepare.

Fratri reduci ex acidulis retractationem hanc, cum salute, a Te significavi; se proxime Tibi scripturum dicit. Nolui ipsum latere quæ hactenus inter nos agitata fuere, quorum novitate non parum illum commotum sensi; præsertim eorum quæ de Polynomii potentiis, & Rectanguli differentiis comparandis invenimus: his enim plane nihil simile quid antea inaudierat.

De ratione comparandi curvas cum arcubus circularibus aliquid ad *Acta* * misi; sed Speculationem illam, de comparandis Polynomii potentiis cum Rectanguli differentiis, nunc prosequi plane non licet, ob plurima alia negotia quibus distringor.

Nescio cuinam causæ tribuam, an stupiditati ingenii mei, an vero distractionibus animi, quod modum tuum æstimandi poten-

M 2 tias

* *Meditatio de Dimensione linearum curvarum per circulares.* Acta Erudit. 1695. Aug. p. 374. Opp. Tom. I. N°. XXVI. pag. 142.

1695 Sept. tias motrices nondum capiam; tertium enim Te hallucinari, absit ut dicam. Verissima mihi videntur principia Tua, nempe effectum integrum suæ causæ æquipollere; item Corporis B, cujus velocitas *a*, potentiam mensurari debere per numerum globorum L, M, N, &c. quibus eodem velocitatis gradu *e* impresso, illud quiescit; Hinc potentiam Corporis B, velocitate *a* moti, esse ad potentiam corporis C, velocitate *b* moti, ut numerus globorum ab illo, ad numerum globorum ab hoc, in velocitatem *e* concitatorum: Hæc, inquam, omnia concedo; imo & hoc quod, pro globis æqualibus certa velocitate præditis, assumi possint alii effectus æquales repetiti, nempe certa pondera ad certam altitudinem elevanda; & proinde duplam potentiam elevare duplo plura pondera æqualia ad eandem, puta, altitudinem; triplam, triplo plura; quadruplam, quadruplo plura, &c. vel quod eodem redit, si loco ponderum æqualium, quæ successive elevanda sunt, sumamus idem pondus, sed quod toties elevandum sit, quot fuerunt pondera, habebimus utique eundem effectum, & proinde æqualem potentiam: nihil enim refert, sive semper idem pondus successive novum ictum recipiat, sive aliud æquale substituatur. Sic facile concedo potentiam, exempli gratia, quadruplam elevare unum pondus, quater, ad eandem, vel æqualem altitudinem, id est, pondus illud ascendet *per vices* ad altitudinem quadruplam; sed [in quo controversiæ cardo versari videtur] nego illud pondus, si potentiam motricem, quam per vices exhauriebat, uno ictu absumat; ad altitudinem tantum quadruplam *uno saltu* ascendere. Differentiam omnino faciendam puto inter elevare pondus aliquoties ad altitudinem, & inter elevare idem pondus ad eandem altitudinem toties sumptam; non enim eadem potentia utrobique requiritur; contra quam Tu statuere videris, quando dicis, *unde sequitur ejusdem potentiæ esse elevare libram ad duos pedes* [ego addo duabus vicibus] *cujus est elevare duas libras ad pedem unum.* Aliter se habet in medio æqualiter elastico; cum enim in eo elastra æqualia, & similia, æqualibus intervallulis sint disseminata; haud dubie, dupla potentia duplo plura elastra deprimentur, & proinpe spatia percussa erunt in ratione potentiarum. In hoc itaque convenimus;

venimus; sed & hoc ipsum arguit elevationes ponderum æqualium, uno saltu factas, non esse horum ponderum potentiis proportionales; nam si gravitatis causam elastrorum resistentiis comparemus, videbimus elastra ista, id est, sollicitationes ad gravitatem, non fieri spatii percursi, sed temporis intervallulis æqualibus; ita enim gravitas explicatur: ceu notum est Galilæum accelerationes gravium descendentium deduxisse ab impulsionibus materiæ ambientis, singulis momentis æqualibus grave stimulantis. Hoc posito, evidentissimum est pondus, ascendendo ad quadruplam altitudinem, non nisi duplo plures impulsiones superare; siquidem etiam nonnisi duplum tempus requiratur, & tempora sint ut numerus impulsionum. Ergo, si superatio unius temporis sumatur pro communi mensura potentiarum, juxta Tuum ipsum principium, sequitur ad elevandum pondus, uno jactu, ad altitudinem quadruplam, duplam dumtaxat requiri potentiam; adeoque elevationes esse in ratione duplicata potentiarum: & cum elevationes etiam sint in duplicata celeritatum, potentias esse ut ipsas celeritates, & non ut quadrata harum. Sed diutius his immorari non possum; quia aliæ cogitationes me ab his abducunt; quamquam plurima adhuc alia habeam, quæ mihi in Tuas partes transire non permittunt. Optarim ut scrupulum hunc meum diluas, & ingenue dicas, in quo me erravisse putes; a Te enim doceri mihi semper summa voluptas fuit. Interim quæ a me Tibi objectiones fiunt, non objiciendi, sed discendi gratia, factas puta: non dubito quin & Tibi interdum utiles esse possint.

1695 Sept.

Tristissimum nuncium, de obitu Incomparabilis Hugenii, jam ex *Belgio* acceperam. Ego, ut puto, præ aliis summam feci jacturam, si vel solam eum videndi spem amissam considerem. Dnus. Hospitalius mihi scribit habuisse illum *66* annos, & *Fratri* suo exheredato substituisse heredes nepotes suos. Solatium nobis est, quod ante mortem de Manuscriptis suis optime disposuerit: nominavit enim, ut audio, duos Mathematicos *Batavos*,† quibus schedas suas committi jussit, ut præstantiora typis mandentur: Quantum damnum si ea intercidissent!

J. Bernoulli.

† Volderum & Fullenium.

EPISTOLA XVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

Transcendentes Curvæ annon percurrentes omnes. De viribus corporum & potentiæ æstimatione ex ponderum elevatione. De actione gravitatis. De HUGENIO. *De Serie summatoria. De* VOLDERO.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime!

1695 Octob. QUod vigesimum nonum ætatis annum ingredienti Tibi, ipso natali die, vocatorias *Groninganorum* Litteras redditas scribis, facit ut Tibi grautler de tempore hactenus tam bene collocato. Itaque optima quæque porro non possum non ominari, ac vovere. Gratias ago, quod *Vesuntionem* pariter, & ad *Einsidelenses* scripsisti, aut scribi curasti. *Abbas* NICASIUS, *Divionensis* Canonicus, Vir Doctus & Clarus, mihi *Præsidis* BOISOTII litteras ad se pollicitatorias nuper misit. Nec dubito quin sit promissis staturus. . . . .

Nondum pro certo possum affirmare omnes transcendentes simul esse percurrentes, ut appellas, id est per puncta secundum Geometriam ordinariam designata descriptibiles; est tamen cur de plurimis suspicer ita esse, nec dum video quid de reliquis prohibeat. Id fateor fastigium foret Geometriæ transcendentis, si huc res, actu ipso, deducta habetur, ut alias dicere memini. Nondum tamen ostensum est, necesse esse ut omnes percurrentes ad quadraturam Circuli & Hyperbolæ reducantur, cum sint resolutiones algebraïcæ, quæ, nec per anguli, nec per rationis sectionem construi possunt; quibus duabus, Circuli & Hyperbolæ quadratrices per puncta describuntur; & cæteras tamen itidem ad curvarum per puncta

puncta inventionem adhiberi, transeundo de gradu in gradum, 1695
non video quid prohibeat. Octob.

Quod ad æstimationem potentiæ attinet; videris mihi tam prope nunc accessisse ad mentem meam, ut tenue illud velum intergerinum, quod nos separat, facile tolli posse videatur. Hoc unum Te moratur, quod aliam potentiam requiri putas, pro elevando pondere L ad altitudinem PQ quater repetitam, seu ad altitudinem PT quadruplam ipsius PQ, percursam quatuor vicibus, quam quæ requiritur ad idem pondus A elevandum ad altitudinem PT, [vel ei æqualem,] percursam una vice. Sed ubi aliquando de his meditari attentius vacaverit, ipse credo miraberis hic Te discrimen suspicari potuisse. Ita enim comparata est natura, ut sive per vices, sive uno tractu agere aliquid coneris, nunquam majus eadem vi efficias; alioqui nihil foret facilius motu perpetuo mechanico. Nec plus interest, quam inter pecuniam minutatim, per obolos, sed sæpe repetitos expensam, & eandem magnis summis, ac per talenta effusam. Ipse etiam vides pondus L, ad altitudinem PT uno tractu ascendens, revera non simul, sed per gradus PQ, QR, RS, ST, eo devenire; nec aliud esse discrimen, quam quod nullum ita est intervallum inter vices.

Possum autem intervalla inter ascensiones interponere, ut tamen fateri oporteat nullum nasci discrimen; veluti si idem grave (*Fig.* 24.) primum horizontaliter currat per 1. 2; inde inclinate Tab.IV. assurgat per 2. 3, cujus altitudo perpendicularis æquet PQ; deinde rursus horizontaliter eat per 3. 4, & inclinate assurgat per 4. 5, cujus altitudo perpendicularis æquet QR; & ita porro per 5. 6, 6. 7; 7. 8, 8. 9. Sed novam distinctionem, opinor, afferes, dicesque, hoc Te concedere, si primo impetu concepto, pondus L rem peragat; secus vero, si denuo sit nova impressione excitandum. Equidem ratio aliqua distinctionis hujusmodi expeti possit; quam ego nullam video, nisi quod permissum est respondenti rigore summo agenti τὴν θέσιν διαφυλάττειν, quamdiu etiam citra verisimilitudinem potest. Unde, vel ideo quod alias admittenda mea conclusio foret, distinctionem Tibi adhibere licere putabis, donec a me locum eam non habere ostendatur. Volo tamen, hac quoque

1695 Octob. quoque in re, agere liberaliter, ut demonstratio tanto sit certior, nec tantum probabilibus argumentis nitamur.

Equidem cum concesseris globum majorem æquipollere globis minoribus simul sumtis, quibus in motum concitatis quiescit; posses agnoscere nihil interesse ad potentiam, conjuncta sint, quæ producuntur, an disgregata. Sed placet tamen id de quo inter nos agitur ita per se demonstrare. Aio igitur, ejusdem potentiæ esse, TAB.V. efficere ut pondus L (*Fig.* 25.) continuo tractu ascendat ad altitudinem P T, & efficere ut ad eam ascendat quatuor vicibus repetitis P Q, Q R, R S, S T, nova semper excitatione. Ponamus pondus L tantam celeritatem habuisse, dum in horizonte movebatur, ut impetu inde concepto assurrexerit continuo tractu ad altitudinem P T; jamque inde rursus descendere, & filum secum trahere, incedens per trochleolas *x* & *y*, & postremo volutum circa trochleam *z*; quo attracto, simul trahatur stilus F depressurus elateria G, H, I, K. Ponamus autem pondus L cadens ex altitudine T S præcise tantum acquirere impetus, quantum opus est, ut stylus F superans elaterium G perveniat ex 1 F in 2 F; similiter Elateria H, I, K, superari transitu styli 2 F 3 F, 3 F, 4 F, 4 F 5 F, orto ex descensibus S R, R Q, Q P; ita ut præcise, ubi pondus pervenit in P, impetu ejus per descensum concepto; rursusque per tensionem elastrorum exhausto stylus pervenerit in 5 F. His positis, patet mox, unoquoque Elastro successive liberato, posse per vices globum L rursus ad altitudinem P T restitui; cum unum quodque ad quartam altitudinis partem attollendi grave vim habeat, ex qua scilicet, ipso labente, fuit tensum; idque ope hujus ipsius fili & trochlearum præstari, si elastrum K, liberatum rursus ac se se erigens, reducat stylum a 5 F ad 4 F, elastrum I à 4 F ad 3 F &c. Cum igitur potentia globi gravis L, in horizonte procurrentis, ante omnem ascensum tanta sit [ex hypothesi] ut possit elevare pondus L ad altitudinem P T; eademque tanta sit, ut possit præcise tendere quatuor elastra G, H, I, K; erit ipsius L potentia ante ascensum potentiæ tensionis quatuor elastrorum æqualis; sed hæc potest præcise, per vices, elevare pondus L ad eandem altitudinem

tudinem P T. Ergo potentiæ pondus L elevandi ad altitudinem PT, uno tractu, aut per vices, sunt æquales. 1695 Octob.

Et generaliter hanc æqualitatem tam certam arbitror, ut judicem alioqui, quemadmodum jam innui, nihil facilius fore, quam motum perpetuum mechanicum obtinere, si alterutrum altero prævalere dicas; ut Tibimet consideranti manifestum fore arbitror, cum alterum alteri, nullo negotio, substitui possit. Quod si hæc nondum persuadent, opus erit ut aliquando paulo distinctius explices mentem Tuam, & certo casu ac schediasmate declares. Fateor enim me in dictis ne minimam quidem dubitandi rationem videre. Prosunt tamen, quæ opponis; vel ideo, quod ita melius video, quibus præjudiciis inprimis sit occurrendum. Nam quæ Tibi negotium facescere possunt, multo magis aliis poterunt. Cæterum ipse rei summam tot modis examinatam habeo, & tam diversis rationibus atque applicationibus ad consensum perveni; ut hic paralogismum amplius metuere non possim. Non eo minus tamen libenter monita, a Te inprimis, audio.

Objectionem sumis a gravitatis causis, sed eæ, ut sæpe monui, nil obstant. Verissimum quidem est, quolibet temporis momento æqualem fieri impulsionem, sed sciendum est eam non producere æqualem vim in impulso, [quippe aliter atque aliter disposito, prout plus minusque virium jam habet,] etsi æqualem producat gradum celeritatis, quia hæc duo non coincidunt. Itaque hæc objectio principium petit. Nam, ut jam publice monui, Corpus bis A motum celeritate *e*, duplum est re & potentia corporis A præditi celeritate *e*; quia bis in eo occurrit A*e*, seu adest A*e* + A*e*. Sed corpus A motum celeritate bis *e* [seu A. bis *e*] non est duplum ipsius A*e*; quia, etsi duplicata sit celeritas, non tamen simul duplicatum est corpus: potentiam autem tum demum multiplicatam judico, cum aliquid reale, potentiam habens, exacte repetitur, vel multiplicatur: veluti cum [sive interrupte, sive continue] datum pondus ad multiplicatam altitudinem, vel multiplicatum pondus ad datam altitudinem elevare licet; unaquæque enim repetitio, pro separato effectu, exacte congruo, haberi potest. Itaque, quod, secundum meum principium, superationem alicujus

1695 Octob. impulsionis pro mensura sumi putas, non concedo, nec concedere debeo; ut, eo attentius considerato, ipse animadvertes, nisi scilicet omnia sint in impellente & impulso eodem modo se habentia. Opus est pro mensura repeti realem alicujus potentiæ productionem, vel destructionem. Intelligo autem potentiam suum subjectum includentem, seu realem repeti, velut pondus elevatum esse, elastrum tensum, grave in motu positum, ut repetitio sit omnimoda. Non vero sufficit aliquid modale repeti, verbi gratia, gradum velocitatis repetitum, corpore non repetito, seu plures gradus velocitatis poni in eodem corpore simul existentes. Et senties experiundo, si utaris repetitione reali, omnia consentire, etiam secundum diversas assumptiones; si modali, non item: quoniam, in modali repetitione, non omnia paria, seu exacte repetita reperiuntur. Et suspicor cætera omnia, quæ Tibi adhuc scrupulum movent, ex hoc uno non observato profluere; quod apud me veluti primum est principium Artis æstimatoriæ in universum, seu scientiæ de quantitate in genere. Certe hactenus, in hac materia, vix quicquam mihi fuit objectum, quod non jam tum prævenissem; aut quod per se non dispareat, meditationem prosequendo.

Reapse etiam comperi, in solvendis Problematibus intactis, nonnisi secundum principia mea exitum dari. Non tantum enim nascuntur inde mihi, quæ alii experimentis didicere, aut ex principiis aliis magis limitatis deduxere; sed & ultra pergere possum ad ea in

TAB.V. quibus ipsorum principia desinunt. Veluti si (*Fig. 26.*) globus A simul incurrat in duos globos B & C, possum demonstrare quid fit futurum; idque [quod mireris] ex hoc solo principio, quod alioqui causa & effectus non futuri sint æquipollentes; seu quod tunc, certis hypothesibus factis, non possit post concursum tantumdem ponderis elevari ad datam altitudinem, quantum ante concursum, vel contra.

Solatio aliqua certe nobis esse debet, quod scribis HUGENIUM, ante obitum, de Manuscriptis suis edendis constituisse; gratum erit aliquando intelligere quosnam constituerit ejus rei Curatores. Unum ex iis VOLDERUM esse credo, non mediocris doctrinæ Virum, idque litteris ex *Batavis* acceptis mihi confirmatur.

Recti-

Rectissime factum, quod *Fratri* tuo, ingeniosissimo Viro nostri commercii copiam fecisti. Ita enim communi ope melius proficiemus. 1695 Octob.

Quoniam, ut scis, potentiis analogæ sunt differentiæ; hinc ex serie pro potentiis, duxi seriem pro differentiis, hoc modo;
$$(x+y)^m = x^m y^0 + \frac{m}{1} x^{m-1} y^1 + \frac{m. m-1}{1. 2} x^{m-2} y^2, \text{\&c.}$$
Ergo fit $d^m xy = d^m x d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x d^1 y + \frac{m. m-1}{1. 2} d^{m-2} x d^2 y$, &c. Ubi vertendo d in $\int$, ut fit $d^m = \int^n$ posito $n = -m$, fiet $\int^n dzy = \int^{n-1} zd^0 y - \frac{n}{1} \int^n z d^1 y + \frac{n. n+1}{1. 2} \int^{n+1} z d^2 y - \frac{n. n+1. n+2}{1. 2. 3} \int^{n+1} z d^3 y$, &c. ubi, posito dz constante, summæ singulatim iniri possunt, & quidem finite, si n integer. Similia pro trinomio, vel aliis polynomiis fabricare licet, aliasque omnigenas analogias comminisci.

Has jam scriptas dimittere distuleram, donec discerem ubi ageres; nunc cum ex Tuis *Amstelodamo* * datis libens intellexerim, Te in *Batavis* recte feliciterque appulisse, eas ut jussisti, *Groningam* mitto.

Boisotiana quædam ab *Abbate* NICASIO accepi.

Facile judicare poteram, quid de *Halensi* negotio dicturus esses, jamque in eam fere sententiam *Berolinensibus* responderam de meo.

VOLDERI, Viri licet egregie docti, judicium de nostris Methodis non est quod nos magnopere moveat; videtur enim in hanc Analyseos partem minus inspexisse. At HUGENIUS ipse, quo nemo melius ista dijudicare poterat, & cui *Slusiana*, & multo ampliora erant perspectissima, de præstantia nostræ methodi magnifice sentiebat; idque testatus est, non tantum litteris ad me privatim datis, sed & publice in *Lipsiensium Actis*. Hujus sententiam *Vol-*

N 2 *deriana*

* Ex desunt.

1695 Octob. *deriana* opponi suffecerit. Si excerpta desideras ex litteris HUGENII, mittam.

Quod NIEUWENTITIUM in transitu non vidisti, non maggna, opinor, jactura erit, neque enim Tibi prodesse colloquium poterat, sed illi tantum ad conversionem. Quod superet, gaudeo Te nobis propiorem, ut crebrius Tuis fruar; quibus auxilium spero in multis, quæ adhuc diversi generis molior incremento harum litterarum.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{20}{30}$ Octobr. 1695.

Tuus totus

G. G LEIBNITIUS.

P. S. . . . .

Tuam nunc apud Fœderatos *Belgas* habitationem magni usus fore arbitror, ad Methodi nostræ propagationem. Cum enim plurimi in *Batavis* Algebram colant, multa utilia dabunt, ubi huc animos converterint. Interim de mea *Infiniti scientia* delineanda cogitabo.

EPIS-

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 22.

Fig. 24.

EPISTOLA XIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Studiis Mathematicis Groningæ. *De transcendentibus curvis. De potentiæ æstimatione* LEIBNITIO *assentitur. De* HUGENIO. *De Serie summatoria.*

Vir Amplissime atque Celeberrime, Fautor Honoratissime.

Ecce me tandem aliquantulum liberum à multitudine negotiorum, tam domesticorum, quam publicorum; quibus hucusque adeo obrutus fui, ut postremarum Tuarum, quas sub adventum quàm rectissime accepi, pene oblitus fuissem. Nondum tamen ea tranquillitate fruor, quam optarem, ad Studiis Mathematicis incumbendum, tanta cum libertate, quâ olim *Basileæ* feceram: nec enim meus amplius sum; sed si Mathesis hic maxime mihi exercenda sit, erit id dumtaxat studiosorum in gratiam, quibus, ut jam prævideo, Elementa inculcando maximam temporis partem teram; adeo ut, quo plures forsan studiosi ego eo pauciores facturus sim progressus. Quos putas in *Batavis* Algebram colentes, hic sane non reperiuntur; imo ne unicum quidem videre adhuc mihi contigit, qui vel mediocris Mathematici nomen mereatur. Ultimus Matheseos Professor BORGERIUS jam ante 28 annos, nimirum eodem, ni fallor, anno quo hanc ego ingressus vitam terrenam, ille egressus est; post cujus obitum, Sedes Mathematica in nostra Academia, in hunc usque diem, vacavit; hinc judica, quantum hæc studia florere potuerint. Si vel unicam haberem causam, cur *Hallensem*, quam obtulisti, Vocationem huic anteponerem; esset profecto liberior & commodior Tecum conversandi copia. Ex quo Patriam deserui, nihil plane *Actorum* vidi; scire

1695 Decemb.

1695 Decemb. cuperem an quid novi in iſtis prodierit, quod noſtra concernit; & num, inter alia etiam, *Marchionis* HOSPITALII Generalis quadratura Cycloïdum; † cui ego ſubjunxeram quædam de reducendis curvis ad arcus circulares. *

Procul dubio Faſtigium Geometriæ foret, ſi tranſcendentes curvæ ad percurrentes reduci poſſent, id eſt, ad tales curvas, quarum æquationes conſtant terminis ad dimenſiones indeterminatas aſcendentibus. Sic etiamnum ſum in opinione omnes percurrentes conſtrui poſſe, ope quadraturæ Hyperbolæ: Verùm Tu illas latiori ſenſu ſumis. Quadratrix enim Circuli mihi non eſt percurrens; quoniam ejus natura per talem æquationem exprimi non poteſt.

Quæ de æſtimatione potentiæ adducis multum mihi placent, meque proin in Tuam tandem trahunt ſententiam. Aliqui adhuc mihi hærent ſcrupuli quos adimi mihi vellem. Dicis impulſiones materiæ gravitatem cauſantis, ut ut æquales, & æqualem celeritatem in pondere producentes, non tamen producere vim æqualem; interim, ſi conſideretur materia ſubtilis, quæ gravitatis cauſa eſt, moveri celeritate adeo magna, ut pro infinita haberi poſſit [revera talis ſupponi debet, alias enim elevationes gravium cadentium non in infinitum augerentur,] reſpectu illius quam pondus aſcendens vel deſcendens habet; conſiderandum erit pondus tanquam in quiete, quemcunque habeat celeritatis gradum; ita ut, hac ratione, impulſiones etiam ſemper æqualem vim in pondere producere cenſendæ ſint; eodem plane modo, quo concipio globum ſclopeto exploſum Teſtudinem æque fortiter ferire, ſive quieſcat omnino, ſive prorepat, nunc celerius, nunc lentius; omnis enim Teſtudinis celeritas nihil eſt, reſpectu celeritatis globi.

TAB. V. Secundo; concedo pondus L (*Fig.* 25.) aſcendens uno impetu per 2.3, 4.5, 6.7, 8.9. & dein iterum deſcendens, poſſe tot elaſtra G, H, I, K, deprimere, quot ſufficiunt ad idem pondus ad eandem altitudinem per intervalla attollendum; quia quodlibet elaſtrum depreſſum, ſe ſe reſtituendo, eam tribuit ponderi vim, quam ab illo accepit,

† Prodiit *Actis Erud.* 1695. Aug. pag. 372.
* *Act. Erud.* 1695. Aug. p. 374. Opp. Tom. I. N°. XXVI. p. 142.

accepit, & sic gradatim assurget per altitudines PQ, QR, RS, ST, per quas prius descentit. Sed hoc demonstratum mihi cuperem, quod grave L, eodem impetu quo ascendit per altitudinem 2.3, 4.5, 6.7, 8.9; etiam possit deprimere totidem elastra, quot nempe descendendo depressit: hoc si demonstraveris, omnino in Tuas transibo partes. Possibilitas motus perpetui mechanici, quam ex negatione hujus deducis, nihil facit ad rem: rigorosus enim adversarius illam possibilitatem statuere posset. 1695 Decemb.

Tertio; omnes Regulæ Communicationis motus, a CARTESIO, aliisque, exhibitæ, & hucusque receptæ, a Tua hypothesi subvertuntur. Exempli gratia, si globus incurrat in alium æqualem & quiescentem, celeritate ut 1; post ictum ambo juncti pergerent moveri celeritate non ut $\frac{1}{2}$, ceu hactenus creditum est, sed ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$; hac enim celeritate, uterque ad dimidiam ascenderet altitudinem, ad quam totam prior globus, integra sua celeritate, ascendisset: sic, pro omnibus aliis, novæ Regulæ communicationis motûs fabricari deberent, servando Tuum principium, Vires esse in ratione composita ponderum & altitudinum, ad quas celeritatibus suis ascendere possent. Sic facile divinari poterit, quid sit futurum si globus A simul incurrat in duos globos quiescentes B, & C; si enim celeritas globi A, sit ut 1, erit celeritas postfutura cujusque globi, ut $\sqrt{(A:(A+B+C))}$, supposito globos nullam habere celeritatem, & omnes tres esse in rectá linea. Illos autem, in schemate Tuo, non ponis in recta linea, & sic Problema mihi non videtur determinatum, si globus impingens oblique impingat in reliquos duos; aut saltem mentem Tuam non satis assequor.

Quarto: Distinctio Tua, inter potentiæ productionem realem & modalem, valde placet; & ingeniose ostendis quod, pro mensura potentiæ, repetitio illius, non autem hujus, sumenda, sit. Interim non video quid impediat, quominus penetrationes globi in medium, non elasticum, sed tantum frictione resistens, sumi possint pro mensura potentiæ; nihil enim refert, sive potentia absorbeatur, sive restituatur; saltem potentia est causa penetrationis, & proinde pe-

netra-

1695 Decemb. netratio illius effectus; sicque repetito effectu, repetitur etiam causa. Ex quo sequitur, globum aliquem, celeritate dupla, quadruplo altius penetraturum esse in medium aliquod molle, veluti in lutum, quam alius globus æqualis celeritate simplici; id quod adhuc ostendendum est: credo enim penetrationes fore ut celeritates.

Quos HUGENIUS constituerit Curatores pro edendis suis Manuscriptis, hactenus ignore. Excerpta, quæ mihi offers, ex Litteris ejus ad Te datis, in quibus methodi nostræ præstantiam agnoscit, lubenti & grato animo accipiam, ut, si aliquando occasio dabitur, ea VOLDERO, minus æque de nostris sentienti, aliisque objiciam.

Ex Analogia potentiarum & differentiarum facile deducitur Series pro $d^m(xy)$ quam adducis: Interim si m sit numerus fractus, vel irrationalis, dicas mihi quæso quid sit $d^m(xy)$; an quantitas, an quid aliud? De his diu est, quod non cogitaverim, quoniam nondum ad me redii. Et difficulter a me impetrabo, ut hisce de novo animum advertam, siquidem jam fere mihi exciderunt.

Accepi heri litteras à Dno. *Marchione* HOSPITALIO, in quibus sibi eandem hanc Seriem Te communicasse dicit, & simul mea, quæ super hac materia me detexisse, a Te intellexerit, petit.........
. . . . Vale & me ama

Amplissimi Tui Nominis

Groningæ $\frac{17}{27}$ Decembris 1695.

Cultorem Assiduum.

J. BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA XX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Reſponſio ad præcedentem.

De viribus corporum difficultates removet. De differentiis, quarum exponentes non integri.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

GAudeo Te ſalvum *Groningam* appuliſſe, & rite auſpiciis publici muneris perfunctum fuiſſe. Omnia tempus faciliora reddet, & quod ſtudioſis docendis tibi peribit, poterit viciſſim accreſcere, ſi quos invenias, aut facias, qui Te juvare poſſint. Nullam eſſe regionem credidi hactenus, in qua magis floreat Algebra, etiam inter plebeios homines, quam in *Batavis*. Certe vix alibi plures Libri tales vernacula lingua ſcripti extant. . . . . 1695 Decemb.

Scrupulos, qui Tibi ſuperſunt circa Dynamicen meam, puto adimi poſſe. *Prima Objectio*, omnium quæ in hoc negotio fieri poſſunt eſt ſpecioſiſſima: Celeritatem materiæ gravificæ eſſe incomparabiliter majorem, quam corporis gravis, ita ut grave, ejus comparatione, ſemper quieſcere videatur, uti teſtudo reſpectu ictus ſclopeti. Reſpondeo veriſſimum hoc eſſe, & effectum qui producitur in mobili tardo, talem eſſe, ſi comparetur motui illi velociſſimo, ut ſive tardum quieſcat plane, ſive jam ſit in motu, diſcrimen non fiat notabile. Si ſcilicet oculus poſitus ſit in globo ſclopeti, ſive in teſtudine, & ex uno horum reſpiciat alterum: non notabit in reſultante diſcrimen inter caſum quietis & motus tardi. Sed ſi effectus novus, qui per ictum producitur in ipſo corpore tardo, comparetur cum priore motu, vel effectu, qui in ipſo jam eſt; omnino ille, reſpectu hujus, notabilis eſt; adeoque hac ratione multum intereſt inter id quod idem ictus, licet celerrimus, pro-

1695. Decemb. ducit in corpore quiescente, & quod producit in corpore tardo; nec possumus asserere recipiens semper se eodem modo habere ad ictus. Et tametsi eumdem semper imprimat, vel adimat velocitatis gradum; non tamen semper dat, vel adimit eumdem gradum virtutis; Sed majorem dat obsequenti, seu in easdem partes tendenti, adimit resistenti, seu in contrarium nitenti.

Secundo loco; non bene intelligo quid Tibi adhuc velis demonstrari, cum ostendi postulas, quod grave L eodem impetu quo ascendit per altitudinem 2, 3 : 4, 5 6, 7 : 8, 9, etiam possit deprimere totidem elastra, quot nempe descendendo depressit. Nam, quantum judico, semper facile ostenditur, grave idem posse efficere ascendendo, vel descendendo; quanquam nec satis videam cur hoc petas. Ab eadem causa se totam consumente, vel impendente, æqualis semper producetur effectus, quomodocunque ad se se consumendum causa applicetur, ascendendo, vel descendendo.

Quod vero *tertio*, modum deducendi ad motum perpetuum; tanquam ad absurdum, quo subinde utor, a rigido adversario rejici posse putas; id ego nimii in hac scientia rigoris fore arbitror, & tuto assumi hypothesin hanc; quippe & rationi consentaneam, & infinitis experimentis comprobatam. Qui motum perpetuum mechanicum possibilem defendit, etiam fieri posse putabit, ut aqua sponte ascendat in montem.

Quarto, quod communicationis motuum regulas attinet; concedo, si corpus A celeritate, ut 1, incurrat in æquale B quiescens, & ambo post concursum simul ferantur, nec pars potentiæ absorbeatur, aggregatum latum iri celeritate, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Sed sciendum est hunc casum non occurrere. Nam si corpora sint elastica, non ibunt simul post ictum; sin sint mollia, ut argilla, magna pars virium in ipso ictu absorbebitur, & transferetur in partes insensibiles materiæ mollis, nec restituetur corporibus integris, ut fit in casu elasticitatis.

Quinto, recte judicas, ex meis principiis sequi corpus duplo celerius quadruplo amplius penetraturum in materiam mollem; modo scilicet seponatur condensatio, quæ contingit in molli, ut scilicet initio

initio cedat facilius, postea difficilius, ob partes posteriores, ipso priorum impactu, redditas magis compactas; Et modo consideretur sola difficultas, quæ est in separatione partium tenacium, excluso motu partium in molli, qualis est in aqua: seu excluso eo, quod in schediasmate *De resistentia medii* * vocavi resistentiam respectivam, retenta sola absoluta. Hæc enim, quæ exclusi, efficere possunt & debent, ut regula illa non exacte observetur; puto tamen nihilominus, adhibitis cautelis debitis, ab experientia ei fautum iri. 1695 Decemb.

Quod quæris de differentia, cujus exponens est fractus vel irrationalis, etiam notavi in litteris ad Dnum. *Marchionem* HOSPITALIUM, simulque addidi modum, per quem talis differentia potest alteri ordinariæ comparari. Exempli gratia $d^{\frac{1}{2}}x$ sit differentia proposita. Sint x progressionis geometricæ; assumpta differentiali constante dh, ut fiat $xdh : a = dx$, erit $d^2x = dxdh : a = xdhdh : aa$, & similiter $d^3x = xdh^3 : a^3$, & generaliter, $d^ex = xdh^e : a^e$, adeoque $d^{1:2}x = xdh^{1:2} : a^{1:2} =$ seu $d^{1:2}x = x\sqrt{(dh : a)}$ [1 : 2. mihi est idem quod $\frac{1}{2}$; & $dh : a$ idem quod $\frac{dh}{a}$]. Unde vides talium differentiarum valores hoc modo haberi posse, per radicem vel potentiam ordinariæ differentiæ. Quod cum memorabile sit, Tibi non ingratum fore puto. Easdem extraordinarias differentias, per seriem infinitam, ex ordinariis conflatam exprimi posse, me non monente, vides; adoque suo modo reales esse, etiam hinc patet. Vale, feliciaque festa age, & cum anno novo novum rerum prosperarum cursum ingredere.

Dabam *Hanoveræ* 28. Decembr. 1695.

* *Acta Erud. Lips.* 1689. Janv. pag. 38. G. G. L. *Schediasma de Resistentia medii & motu projectorum gravium in medio resistente.*

EPISTOLA XXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De viribus corporum æstimandis Objectiones ulteriores. De controversia LEIBNITII *&* PAPINI, *circa id argumentum. De actione gravitatis. Ex impulsu obliquo & viribus centrifugis, æstimatio virium. De mediorum resistentia. De perpetuo mobili.*

Vir Amplissime atque Celeberrime, Fautor Honoratissime.

. . . .

1696 Januar. NEscio annon crebræ meæ objectiones contra Dynamicen Tuam tandem Tibi molestiam creaverint; quod fere conjicio, ex eo quod, more Tuo solito, non ad omnia, quæ Te in prioribus meis rogabam, ita exacte respondisti: sed novi Tuam æquitatem & animi candorem; si quid, hac in parte, a me commissum fuerit, quod minus arrideat, mihi condonabis. Nihil sane a natura mea alienius est, quam pravus iste contradicendi pruritus; & nihil eidem convenientius quam veritatis amor, quam usque adeo depereo, ut acquiescere minime possim in re aliqua, nisi omnis obscuritatis nebula mihi sit discussa. Est hæc præcipua causa, cur in rebus dubiis ad Te recurram, tanquam ad Naturæ oraculum, cui in abstrusissimis nunquam lumen deest, cum aliis quoque communicandum; quod jam abunde compertum habeo. Vides itaque, quo incitamento difficultates Tibi subinde proponam; adeo tamen iniquus non sum, ut promptam nimis responsionem ad eas exigam; sufficiet si summa Tua commoditate id fiat.

Paucis abhinc diebus, noster Academiæ Rector mihi suggessit libellum à *Dionysio* PAPINO, proxime elapso anno, editum, cui titulus,

titulus, *Fasciculus dissertationum de novis quibusdam machinis* &c. ubi inter alia exhibet synopsin controversiæ inter vos agitatæ, circa rationem æstimandi vires motrices; in cujus fine dicit, quod Te rogaverit, ut etiam tale extractum scriberes, quo possint Lectores omnia pro & contra certius perspicere. Miror quod me nunquam ablegaveris ad *Acta Eruditorum*; video enim, ex hac synopsi, quod præcipuæ meæ objectiones jam in *Actis* * a Dno. Papino prodierint, ut & Tuæ responsiones ad illas, de quibus certe nihil mihi constabat; alias labori inutili eas de novo repetendi, qui hucusque calamos nostros exercuit, pepercissem. Eo enim tempore, quo hæc inter vos ventilabantur, in Galliis versabar, ubi nihil quicquam *Actorum* ad me perveniebat. Nunc *Acta*, in quibus hæc extant, a quodam Collegarum meorum mihi comparavi; ubi, summo cum fructu, rationes utriusque perlustravi; quibus, ut & meis, quas super hac re inveni, diligenter expensis, Tuam nunc opinionem, (in quam jam ab aliquo tempore inclinavi, sed, ob leves, qui mihi supererant, scrupulos, judicium tantisper suspendens,) omninò pro verà agnosco: quæ me proin in posterum, non solum non adversarium, sed sui defensorem, quavis occasione, habebit. 1696 Januar.

Doleo vices Dni. Papini, qui in falsa sua opinione persistit; videtur ille mihi, aut rem non satis examinasse, aut sibi non gloriosum ducere revocare errorem popularem, quem in *Cartesianorum* gratiam sibi defendendum suscepit. Quod enim dicit potentiam corporis majoris non posse totam transferri in minus quiescens, & deinde aliquam partem potentiæ non quidem perire [quod ex *Cartesianorum* mente necessario sequi aptissime ostendisti] sed impendi & communicari materiæ ambienti, in ipso ictu; idem

 nulla

* 1689. April. p. 183. D. Papini, *de Gravitatis causa & proprietatibus Observationes.*

Respondit Leibnitius in eisdem *Actis* 1690. Maj. p. 228. G. G. I. *De Causa gravitatis & defensio sententiæ suæ de veris naturæ legibus contra Cartesianos.*

Instantiam Papini Vide in Actis 1691. Janv. pag. 6. *Mechanicorum de viribus motricibus sententia, asserta a Dno.* Papino *adversus* Cl. G.G.L. Objectiones & responsionem Leibnitii *ibid.* Sept. pag. 439. G. G. L. *De legibus naturæ, & vera æstimatione virium motricium, contra Cartesianos, &c.*

1696 Januar. nulla dari corpora perfecte rigida; mihi videntur mera effugia quibus suæ opinioni, jamjam labenti, asylum struere conatur. Quis enim non videt translationem istam potentiæ totius ex corpore majori in minus, non supponi tanquam actu possibilem, sed quatenus, sine ulla implicita contradictione, mente substitui potest potentia minoris corporis in locum æqualis potentiæ corporis majoris; sufficit namque hoc, ut si absurdum aliquid, mediante ista suppositione, ex aliqua sententia sequatur, etiam ipsam sententiam absurdam esse dicamus. Et apposite notasti, quod si adversarius hoc neget, perinde sit, ac si quis ARCHIMEDI postulanti negasset aliquam rectam alicui curvæ æqualem esse, quia nullam poterat geometricè exhibere. Atque, quod plus est, si quis mihi ad oculum ostenderet se reperisse motum perpetuum, si modo haberet metallum aliquod gravius auro; dicerem, sane summo jure, eum hominem revera invenisse motum perpetuum, licet metallum gravius auro non inveniatur; & vix inventum iri sperandum sit; ostendisset enim mihi possibilitatem motus perpetui, si non practicam, saltem theoreticam.

Optime dicis objectionem, a celerrimo motu materiæ gravificæ, ut vocas, petitam, esse speciosissimam, quam etiam maximopere urget Dnus. PAPINUS; nec Tua responsio mihi omnino satisfacit, videtur enim quod, non solum velocitates singulis momentis corpori impressæ, sed etiam ipsi effectus, quos impulsiones materiæ gravificæ in corpore producunt, debeant esse æquales. sive dein comparentur motui materiæ velocissimo, sive comparentur motui priori, qui in corpore jam est; comparatio ista non habet locum; effectus enim considerantur absolute; idque solummodo quæritur, annon inter se comparati omnes sint æquales? Facile enim demonstrari potest quod globus A incurrens celeritate infinita in globum B, huic semper æqualem vim imprimat, sive sit in motu, sive in quiete; ita ut adversarius constanter persistere possit in eo, quod potentia corporis ascendentis, non per ascensus, sed per temporis spatium mensurari debeat; ex quo dein sequitur corpus ascendens, exempli gratia, ad altitudinem quadruplam, non nisi duplo plures ictus æquales recipere, quam aliud æquale corpus ascendens ad altitudi-

titudinem ſimplam; ideoque potentias illorum corporum eſſe ut 2 ad 1, non autem ut 4 ad 1. Difficultas hæc fateor, me diu multumque vexavit; videbam enim hic non eſſe petitionem principii, uti dicebas; ſed præcipuam argumenti Tui vim directe impugnari: donec tandem exinde ita me extricare putaverim, dicendo verum quidem eſſe, quod effectus in corpore ab impulſionibus materiæ gravificæ producti, initio cujuſvis momenti, ſint ſemper æquales, ſive corpus quieſcat, ſive moveatur, ſed & hoc verum eſt, quod corpus deſcendens, vel aſcendens, occurrat uno momento certo numero particularum perpendiculariter diſpoſitarum, qui numerus eſt in ratione celeritatum corporis moti; ſingulæ autem hæ particulæ ſuum peculiarem faciunt ictum æqualem in corpus aſcendens, vel deſcendens; & hac ratione, effectus materiæ gravificæ, non initio tantum momenti, ſed per totum momentum productus, computandus eſſet per quantitatem ſpatii uno momento percuſſi: hinc augmentum momentaneum potentiæ corporis aſcendentis, vel deſcendentis, ſemper variatur pro ratione celeritatis, & erit infinities majus, quamvis impulſionis quam recipit quieſcens a materia gravifica. 1696 Januar.

Mentem meam melius ſchemate aperiam: Repræſentet (*Fig.* 27.) A B, lineam deſcenſuum in qua 01, 02, 03, 04, 05, &c. percurrantur momentis æqualibus 1, 2, 3, 4, 5, &c. applicentur ad 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. æquales 0*a*, 1*b*, 2*c*, 3*d*, 4*e*, 5*f*, & quæ denotent vires impulſionum materiæ gravificæ, initio cujuſvis momenti, corpori impreſſas. Nunc, per naturam gravium cadentium, altitudo A8 eſt quadrupla ipſius A4, quamvis nonniſi duplo plures impreſſiones æquales 0*a*, 1*b*, 2*c*, 3*d*, 4*e*, 5*f*, 6*g*, 7*h*, 8*i*, in illa contineantur quam in hac 0*a*, 1*b*, 2*c*, 3*d*, 4*e*, hinc cum Dno. PAPINO credideram, ſufficere ut grave aſcendat per altitudinem 4A ſubquadruplam ipſius 8A, ad ſuperandam dimidiam partem reſiſtentiæ, quam ſuperaret aſcendendo per 8A, non animadvertens errorem, qui in eo conſiſtit, quod ſumſeram impreſſiones momentorum initiales 0*a*, 1*b*, 2*c*, 3*d*, 4*e*, &c. loco impreſſionum continuarum 0*b*, 1*c*, 2*d*, 3*e*, 4*f*, &c. quæ utique non amplius ſunt æquales. Oppido inde liquet veritas aſſerti Tui; quod nempe potentiæ TAB. V.

1696 Januar. tentiæ corporum æqualium sint in ratione altitudinum percussarum; est enim summa omnium impressionum $ob + 1c + 2d + 3e + 4f + 5g + 6h + 7i$ id est, rectangulum Ai, ad summam omnium impressionum, $cb + 1c + 2d + 3e$, id est, ad rectangulum Ae, ut altitudo A8 ad altitudinem A4. Rogo mihi sincere dicas, annon rem acu tetigerim. Hoc argumento, arbitror, Dnus. PAPINUS optime convinci posset, quamvis alias, in eodem libello, contra GUILLELMINUM disputans, de fluentium aquarum mensura, proprium gladium suppeditet quo jugulari potest.

Ex iis enim quæ pag. 77. legitime contra adversarium suum infert, apertissime sequitur vires motrices, vel potentias ponderum æqualium esse in ratione ascensuum, id est in quadrata celeritatum. Tibi haud dubie non ingratum erit, si quæ ad rem faciunt hic excerpam; cum forsan hunc libellum Tibi nondum videre contigerit.

„ Constat quod gravia, si motu a gravitate accepto sursum versus reflectantur, ascendendo motum amittunt: finito autem ascensu ipsorum centrum gravitatis non potest reperiri altius quam antequam cœpissent moveri, alioquin daretur motus perpetuus mechanicus. Sit, exempli gratia (*Fig.* 28.) funis ABD, supra trochleam BC transiens, cujus alteri extremo A una libra, alteri vero extremo D duæ libræ appendantur; sitque AE dupla ipsius ED, centrum gravitatis erit in E. Supponamus jam pondus D descendere in d, debebit pondus A tantundem ascendere, nempe ad a, & tunc centrum gravitatis reperietur in e. Facile est autem demonstrare quod descensus Ee est tantum $\frac{1}{3}$ descensus Dd. Ergo corpus illuc delatum, si sursum versus reflecteretur, non ascenderet nisi ad $\frac{1}{3}$ altitudinis dD ut in f, & corpus A continuando suum motum sursum versus, tantundem spatii percurreret usque ad G; tunc enim centrum gravitatis in eadem qua prius altitudine, nempe in E reperiretur, &c." Quid hæc ad confirmationem Tuæ sententiæ contribuant, facile perspicies. Libra enim una, descendens ex altitudine Dd, efficere potest ut tres

TAB.V.

libræ

libræ ascendant ad $\frac{1}{3}$ ejusdem altitudinis. Ergo quælibet trium librarum ascendentium habebit $\frac{1}{3}$ potentiæ libræ descendentis [siquidem effectus sit æqualis causæ;] unde constat propositum, nempe potentias ponderum æqualium esse in ratione ascensuum vel descensuum, id est, in quadratâ celeritatum. 1696 Januar.

Sed regeret forsan Dnus. Papinus, unam illam libram, quod cum reliquis duabus conjuncta sit, non efficere eamdem vim, ac si in aere libero per eamdem altitudinem sola descenderet; præsertim cum, in illo casu, plus temporis, & proinde plures impulsiones materiæ gravificæ durante descensu recipiat quam in hoc. Verum hoc objiciens pariter ad motum perpetuum mechanicum deduceretur; ubi non opus haberemus supponere translationem totius potentiæ corporis majoris in minus; adeoque Dnus. Papinus solitis suis effugiis, nimirum negatione illius translationis, & perfectæ rigiditatis, amplius evadere non posset.

Hæc omnia cum perpendissem, & vidissem tam luculenter confirmare novam Tuam vires motrices æstimandi rationem, & destruere vulgarem illam *Cartesianorum* opinionem, quæ eousque in Philosophorum Scholis invaluit, & radices egit, ut quamplurimi, cæco ductu, malint credere rem, in omnium quotquot sunt, Philosophorum modernorum ore versantem, quam eam paulo attentius & penitius examinare; Ego, inquam, postquam hæc probe perpendissem, tandem errorem vulgarem omnino deserui, mihique ipsimet iratus fui, quod illum apud me tamdiu foverim. Interim mentem meam subiit, annon nova hæc ratio potentias æstimandi, demonstrari posset directe & ἀποδεικτικῶς; ex ipsa nempe motus natura & lege, supponendo corpora moveri in vacuo, in quo in alia vires suas exerant. Demonstratio enim per deductionem ad motum perpetuum, tanquam ad absurdum quid, pertinacem *Cartesianum* novis potius involvit scrupulis, quam ab erronea opinione deflectit.

Post levem meditationem vidi id directe posse probari per principium aliquod, quod ipse Cartesius admisit; nempe per com-

1696 Januar. TAB. V. positionem motus & quidem sic. Moveatur (*Fig.* 29.) globus A, celeritate & directione AB, & impingat oblique in alium globum æqualem B quiescentem, ita ut angulus obliquitatis ABD sit semirectus: nunc quæritur, quid post ictum sit futurum, supposito totam potentiam corporis alicujus directe incurrentis posse transferri in aliud corpus æquale quiescens? Considero motum AB tanquam compositum ex duobus aliis æqualibus AC, BC, quorum directiones angulum faciant rectum ACB: nunc statim patet, quoniam AC est parallela ipsi BD, & BC ad eamdem perpendicularis, quod globus A, secundum directionem AC, nihil globo B communicet, sed quod tota vis secundum BC transferatur in globum B (si modo globi perfecte aut saltem admodum elastici supponantur, ut globi in ludo tudiculario,) ita ut post ictum globus B moveatur in directione BE, velocitate BC, & globus A in directione BF, velocitate AC. Quoniam autem, tam globi, quam velocitates, sint æquales, erunt eorum potentiæ æquales, & ambæ simul junctæ, tanquam effectus, æquales causæ, id est, toti potentiæ quam habebat globus A ante ictum. Ergo potentia globi A ante ictum, est ad potentiam globi B post ictum ut 2 ad 1, ut $(AB)^2$ ad $(BC)^2$; ut quadratum velocitatis A, ad quadratum velocitatis B: Q. E. D.

Idem generaliter potest demonstrari, si globus A, alia quavis obliquitate, intelligatur incurrere in globum B; tunc enim semper globus B recipiet velocitatem BC, & globus A perget moveri velocitate AC; & hoc modo, quia potentiæ duæ partiales, simul sumptæ, constituunt totam; erit potentia globi A post ictum, ad potentiam globi B, ut $(AC)^2$ ad $(BC)^2$, id est ut quadrata globorum celeritatum.

Nescio quid huic demonstrationi objici possit; nisi fortasse quod nulli globi tam perfecte elastici reperiantur, qui omnem suam potentiam in alios æquales directe impingentes transfundere possint. Hoc profecto demonstrationem nostram minime labefactat: Etiamsi enim concedamus illam perfectam elasticitatem non dari; scimus tamen per experientiam dari corpora ita prompte se restituentia, ut nullum sensibile discrimen intersit inter velocitatem globi incurrentis

ante

ante ictum, & inter velocitatem globi æqualis percussi post ictum; adeoque & hoc contra demonstrationem nostram nihil valet. Supponamus tamen tantummodo partem celeritatis BC (*Fig.* 30.) communicari globo B; nihilominus ex Cartesii opinione sequetur aliquid absurdi. Esto enim, & acquirat globus B, ex percussione globi A, partem celeritatis BC, puta BG; Ergo, secundum Cartesium, remanebit globo A in directione CB, residua celeritas CG (supponuntur enim globi æquales). Quoniam autem juxta directionem AC, integram velocitatem AC servat; habebit globus A post ictum, ex compositione motus AC & CG, velocitatem AG. Ergo, si quantitas motus ante & post ictum esset æqualis, foret $A \times AB = A \times AG + B \times BG$, & quia $A = B$, foret $AB = AG + BG$. *Q. e. a.* 1696 Januar. TAB.VI.

Quid ad hæc reponi possit ab acerrimo quoque *Cartesiano*, non video; compositionem enim motus non negabit, nisi simul Coryphæi sui explicationem reflectionis & refractionis radiorum destruere velit, aliaque, in quibus compositio hæc admodum solemnis ipsi fuit: Dicet forsan, post ictum directionem mutari; hinc globos A & B celerius moveri, quam si ille in hunc directe impingeret; ut nempe quantum a prima directione deflectuntur, compensetur per augmentum celeritatis. Sed quid, quæso, directio ad quantitatem motus, vel ad quantitatem virium? sive corpus aliquod huc, sive illuc feratur, retinebit, credo, semper eamdem vim, si modo celeritas eadem maneat. Nunquid ridiculum esset dicere singula, quæ in toto Universo moventur, semper eamdem directionem servare; secus juxta mentem adversarii quantitas motus variaret.

Aliud adhuc superest Argumentum non contemnendum, quo probatur vires corporum æqualium esse in ratione quadrata velocitatum: Constat quod vires centrifugæ Corporum in gyrum motorum sint in ratione composita ex quadrata celeritatum, & reciproca longitudine radiorum; [facile hoc demonstrari potest.] Ergo, existentibus radiis æqualibus, erunt vires centrifugæ, vel vires fila, quibus corpora detinentur, tendentes in ratione quadrata velocitatum. Sic quia vires istæ tendentes sunt, inadæquate quidem, effectus corporum motorum; satis probatur propositum.

P 2 Jam

1696 Januar. Jam nimium fere huic materiæ immoror; patere tamen ut, quæ ex nova Tua sententia legitime fluere videntur, paucis proponam; super quæ mentem tuam desiderarem. Videtur centrum percussionis corporum aliter nunc se habere, quam hactenus creditum est; siquidem vires percutientes elementorum corporis æstimatæ sunt a mole elementorum, & a velocitate; loco quod quadrata velocitatum, juxta novam hypothesim, sumenda essent. Hoc modo centrum percussionis lineæ rectæ rigidæ, circa unam extremitatem motæ, non esset ibi, ubi est centrum in triangulo, nempe $\frac{2}{3}$ longitudinis lineæ distans ab extremitate quiescente; sed esset, ubi est centrum gravitatis in pyramide, nempe $\frac{3}{4}$ axis distans a centro rotationis; & sic in aliis.

Præterea videntur resistentiæ medii, quas vocas respectivas, sepositis absolutis, non esse in duplicata ratione velocitatum, sed in triplicata. Corpus, exempli gratiâ, aliquid motum, in liquido tenacitate notabili carente, duobus velocitatis gradibus, certo tempore duplo majorem quantitatem liquidi penetrat, & duplo celerius quam aliud corpus æquale, motum uno velocitatis gradu; quoniam vero quantitatum æqualium vires sunt, ex nova hypothesi, in duplicata ratione velocitatum; erit resistentia corporis illius octupla resistentiæ hujus: contra quod Tu statuere videris in *Actis*, an. 1691, pag. 177. † Dices forsitan, differentiam esse, quando corpus cum omnibus suis partibus, simul & uno instanti, in alterum corpus, ut globus in globum, impingit, & quando per partes & successive appellitur, ut fluidum contra obicem; sed optarim ut explicares rationem distinctionis. Desiderarem etiam rationem exactam, cur nova Tua hypothesis tantum locum habeat in velocitatibus actualibus, non autem in conatibus; siquidem conatus nihil aliud est quam motus infinite parvus. Cur, exempli gratia, ad æquilibrandas quatuor libras in una distantia ab hypomochlio vectis appensas, non etiam requiratur ab altera parte vectis tantum una libra in duabus distantiis appendenda, sed duæ libræ. Et deinde,

† *O. V. E. Additio ad Schediasma de Medii resistentia publicatum in Actis m. Febr. 1689.*

de, concesso, hujus posse rationem reddi, videtur quod si duabus istis libris, quæ cum quatuor libris oppositis æquilibrium faciunt, vel minima velocitas actualis imprimatur deorsum versus, illico præponderare deberent, & magno impetu descendere: duæ enim istæ libræ, habentes duos gradus velocitatis, duplo-majorem vim, quam quatuor libræ cum uno gradu velocitatis. Hoc tamen est contra experientiam; nam lente admodum, nec eousque quo possent, descendunt. Explicationem etiam sciscitor experimenti illius quod, recensente in Epistolis CARTESIO, (ut Dnus. VARIGNONIUS in *Actis Erudit.* an. 1691, pag. 300. memorat.) Pater MERSENNUS, cum Dno. PETITO, sæpius iterata vice instituerat, circa majus tormentum bellicum; quo perpendiculariter erecto & displofo, globum, ejusve vestigia, frustra in terra quæsivere: argumento eum non cecidisse, sed etiamnum in aëre hærere suspensum. Hoc, si non sit figmentum, multum etiam Tuæ demonstrationi, quam ab impossibilitate perpetui motus petis, derogaret.

1696 Januar.

Quando dicis, quod qui motum perpetuum mechanicum possibilem defendit, etiam fieri posse putabit, ut aqua sponte ascendat in montem; facile judico quorsum digitum intendas: nimirum ad meam, olim in *Actis* * insertam, inventionem perpetui mobilis, filtri ope comparandi; per quam perennem aquarum per poros terræ, instar filtri, ascensum, & sub forma fluviorum & fontium descensum explicabam. Certe hujusmodi perpetuum mobile non tam absonum esse, & contra naturæ leges cuivis, vel leviter ad pressiones fluidorum attendenti, patebit: Numquid enim, si possemus efficere, ut centrum gravitatis alicujus corporis, sponte, vel ob motum quemdam particularum, ascenderet; haberemus motum perpetuum mechanicum? Ast, si super liquorem graviorem in vasculo quodam contentum, infunditur alius levior cum priori perfecte miscibilis; commune duorum liquorum centrum gravitatis infimum locum non occupabit, sed necessario ascendet: alias liquores non miscerentur. Quod si ais hanc permixtionem non duraturam, sed tractu temporis particulas liquoris gravioris iterum subsidere; rogabo Te, ut consideres quam-minutim solvatur mercurius a liquore

P 3 quodam

* 1691. Febr. pag. 65. Opp. Tom. I. N°. I. pag. 41.

1696 Januar. quodam corrosivo, velut spiritu nitri, & ita intime cum illo misceatur, ut, nisi affundatur sal quoddam, permixtio illa in perpetuum duratura sit, manente interim liquore adeo limpido, ut si ex gravitate id non conjiceretur, nihilo impraegnatum illum esse diceres. Quid igitur impedit, quominus ope filtri, quod separaret istas duas substantias, leviorem a graviori, haberi possit motus perpetuus; filtratione enim ista, commune centrum gravitatis, quod non est in sua sede naturali, descendere non potest, ob delabentem ex tubo materiam secretam, quae, ut suppono, iterum se se perfecte miscet cum substrato liquore; conatus iste, & proinde filtratio, continuo perseverabit: unde objectio, quod gravioris liquoris actio per filtrum intercipiatur, ita ut solus levior in eum, qui in tubo jam est, gravitet, nihil valet: ipse enim levior, qui extra tubum est, etiam a graviori premitur, & ita junctis viribus eum qui in tubo est premunt. Non itaque mirum, multo minus absurdum esse debet, tali modo, ubi natura motus, nempe intestinus, juvat, motum perpetuum obtineri posse dicam. Non enim minor absurditas esset dicere centrum gravitatis posse ascendere, quod tamen hic contingere videmus. Interim Tecum sentio impossibile esse motum perpetuum per machinam quamdam corporum solidorum procurandum, quae solo artificio & industria humana operatur. Sed quia litterae jam, praeter spem, Tibi forsan ad nauseam, excreverunt; hic abrumpo, & differentialium materiam in proximam scribendi occasionem differo. . . . .

Vale, & votum pro voto habe. Perage laetus, & inconcussa sanitate, novum hunc annum & quam-plurimos subsequentes, ut ego, cum toto Orbe litterato, ingenii Tui fructibus, ut hactenus, ita pro porro, quam-diutissime frui possim. Iterum vale & ama, qui se sincero corde dicit.

Amplissimi Tui Nominis

Groningae $\frac{18}{28}$ Jan. 1696.

Cultorem perpetuum
J. BERNOULLI.

EPIS-

Fig. 25.

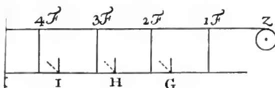


Fig. 27.

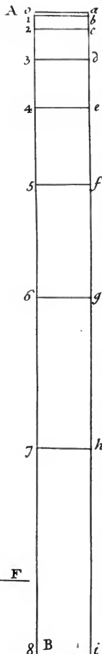
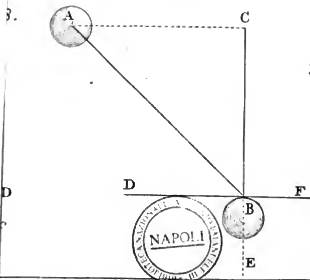


Fig. 26.



Fig. 29.



EPISTOLA XXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Reſponſio ad præcedentem.

De PAPINO, *ſuaque cum illo controverſia. De actione corporis infinite velocis. De incurſu obliquo. Æſtimatio virium* a priori. *De celeritatibus elementaribus. De motu perpetuo. De Dynamica. De conſervatione virium & directionis. De celeritate aucta. De Ipecacuanha.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

QUod ad nonnulla Tuarum anteriorum viſum ſum reſpondiſſe paulo brevius, non ideo factum eſt, quod Tuæ objectiones mihi fuerint ingratæ, ſed quia judicavi, quod res eſt, eo Te eſſe ingenio, ut non habeas opus multis verbis. Fortaſſe etiam fuere tunc, quæ ſcribentem coegerunt feſtinare, & nunc quoque ſunt, quæ me avocant a meditandi laboribus; quorum potiſſimum eſt catharrus gravis, qui adjunctam habet febriculam, quæ ne quid altius in receſſu habeat, cavendum eſt. *1696 Januar.*

Dnus. PAPINUS libellum ſuum, quem vidiſti, ubi primum fuit editus ad me miſit, ex eo renovata eſt inter nos concertatio per litteras, quam totam Tibi communicabo; cui enim meliori poſſem judici atque etiam defenſori? videbis antiquum obtinere morem, nec facile gloriam veritati daturum eſſe, non conſiderantem, quod ipſe Deus eſt veritas. Gaudeo Te, repetitis meditationibus, pro acumine Tuo perſpexiſſe, & pro candore agnoſcere ſententiæ meæ vim ac firmitatem; quod paucis contigit; adeo difficile, nec fere niſi meliorum ingeniorum proprium eſt, præjudicia exuere. Quod ad *Acta Eruditorum* Te non remiſi, cauſa in promptu eſt; quia tibi lecta non dubitabam.

Quæ de ictibus materiæ gravificæ habes, ſunt ingenioſiſſima; nempe

1696 Januar. nempe quod numeri ictuum, qui quolibet tempusculo imprimuntur corpori gravi, non sint æquales, sed ejus celeritati proportionales; quo quidem admisso, sublata esset difficultas Dni. PAPINI; etiamsi ipsi concederemus, quemlibet ictum æqualem vim imprimere. Alterutrum igitur nobis faciendum superest, vel quærendus modus ostendendi quod notas de numero ictuum, vel neganda ictuum æquipollentia. Fateor nondum mihi modum occurrere ostendendi, quod numeri ictuum in æqualibus momentis sint celeritatibus proportionales; quia adversarius negabit de eo quæri, quot occurratur corpusculis; cum non ab horum numero, sed velut a numero totidem flatuum venti [*bouffées de vent*] res pendeat, quemadmodum in navi velis acta; qui numerus est æqualibus tempusculis æqualis, adeoque temporibus proportionalis. Hoc igitur rogo, ut porro mecum considerare velis; quemadmodum & alterum membrum dilemmatis, utrum scilicet globus A. incurrens celeritate infinita in globum B, æqualem ei vim imprimat, sive globus B quiescat, sive moveatur, quod facile demonstrari posse ais; ego fateor me nondum eam demonstrationem videre.

Jungemus igitur meditationes, ut videamus an nobis in his rebus liquido satisfacere liceat; quo facto, haud scio an deprehensurus sis subesse aliquid solidi meæ responsioni ad elegantem difficultatem de Globo sclopetario in testudinem impacto. Et considerandum videtur, non omni modo esse verum, quod concinnatis impressionibus infinite celeribus in B inde a quiete, semper idem celeritatis gradus denuo imprimi debeat mobili, tempusculo quovis; sed tum demum, cum etiam feriens infinities minus censetur, quam mobile continue percussum; ubi etiam in impulsibus materiæ gravificæ, vel venti navem impellentis, reapse ita contingit, ob materiæ percutientis maximam tenuitatem, vel raritatem. Sed si feriens percusso æquale, verbi gratia, vel notabiliter comparabile esset, ac se haberet velut aqua ad lapidem & infinito impetu feriret; manifestum est, primo statim ictu, quiescenti percusso imprimendam fore celeritatem infinitam, quem gradum continue denuo imprimi non posse, est manifestum. Unde vides, non posse generaliter pronuntiari, quod continuo æqualem velocitatis gradum imprimat

primat

primat medium æqualiter agens, si infinita celeritate agere ponatur; *1696*
sed & in eo casu, quo revera idem aut circiter idem semper gra- Januar.
dus velocitatis imprimitur; non video quomodo inde possit inferri, sine petitione principii, eumdem imprimi gradum virtutis, seu eumdem in patiente produci effectum; cum non concedam, vires esse velocitatibus proportionales, imo contrarium mihi sit pro demonstrato.

Quæ habes de incursu obliquo egregia sunt & prorsus ad sensum meum. Imo si in plano aliquo (*Fig.* 31.) tres sint globi æ- TAB. VI.
quales A, B, C & globus A in duos quiescentes B & C simul incurrat, ita ut centra eorum in momento concursus faciant triangulum, quod sit rectangulum ad A; demonstro quieturum corpus A in 2 A, corpora autem B & C omnem vim esse receptura; & quidem itura celeritatibus 2 B 3 B, 2 C 3 C, quæ sint latera quadrati, cujus diagonalis sit 1 A 2 A, celeritas ipsius A ante ictum. Hinc jam duxi consequentiam, qua rursus constrictus tenetur Dnus. Papinus. Ponamus corpora B & C, in 3 B & 3C, parieti immobili Elastico directe occurrentia, repercuti celeritate & itinere, quo venerunt, & redeuntia proinde simul ad 1B & 1C, ibi rursus simul incurrere in A, loco cujusque resumto; tum ambo B & C resument quietem, & corpus A suam celeritatem recipiet. Hinc porro sequitur, idem futurum, si B & C in quiescens A veniant, ex locis 3 B, 3 C, celeritate aliunde accepta, quam ab A, aut pariete elastico; nihil enim refert, unde habeant, postquam semel habent. Ergo æquales globi B & C & æquiveloces, simul incurrentes in tertium cuilibet eorum æqualem A, situ centrorum faciente triangulum A B C rectangulum in A, quiescent post ictum, & totam suam vim in A transferent, eique dabunt celeritatem 2 A 1 A, quæ sit ad celeritatem ipsorum 3 B 2 B, vel 3 C 2 C, ut diagonalis ad latus quadrati. Unde jam habemus simplicissime, quod Papinus fieri posse negârat, ut, in concursibus, ex majore massa in minorem tota vis transferretur; quod tamen hîc contingit ex B + C in A. Idque in litteris ad Papinum scriptis innui a me repertum per concursum unius cum duobus, non ta-

1696 Januar. men expoſui; quod videretur mihi inconvertibilis demonſtrationibus quantiſcunque.

Sed quoniam Te in noſtris caſtris video, lubenter communicabo principium meum a priori demonſtrandæ veræ æſtimationis virium; quod mihi in promptu eſſe aliquoties indicavi, nondum tamen hactenus produxi. Tibi autem communicare eſt frugiferæ maxime terræ commendare granum, ut in magnam plantam ſurgat. Petitur autem ex principiis maxime primis & abſtractis, nempe notione temporis, ſpatii, & actionis. Unde etiam patet tantum abeſſe, ut quod aliqui putarunt, negligatur a me debita temporis conſideratio, ut potius ſit totius æſtimationis baſis.

Ecce Argumentum.

Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla, virtualiter, actionis facientis idem duplum tempore duplo; ſeu percurſio duorum milliarium, intra horam, eſt dupla [virtualiter] percurſionis duorum milliarium, intra duas horas.

2°, Actio faciens duplum, tempore duplo, eſt dupla, formaliter, actionis facientis ſimplum tempore ſimplo; ſeu percurſio duorum milliarium, intra duas horas, eſt dupla, [formaliter,] percurſionis unius milliaris, intra unam horam.

3°. Ergo Actio faciens duplum tempore ſimplo eſt quadrupla Actionis facientis ſimplum, tempore ſimplo; ſeu percurſio duorum milliarium, intra unam horam eſt quadrupla percurſionius unius milliaris, intra unam horam.

4°. Si pro duplo ſubſtituiſſemus triplum, quadruplum, quintuplum &c. prodiiſſet actio noncupla, ſedecupla, 25pla; & generaliter patet, actiones motrices æquabiles, æquitemporaneas, æqualium mobilium, eſſe ut quadrata celeritatum, vel quod idem eſt, in eodem, vel æquali corpore, vires eſſe in duplicata ratione celeritatum. Q. E. D.

Hoc argumentum, quo eſt brevius & petitum ex magis obviis, hoc puto fore inexpectatius, & nonnullos etiam ſe ſe in eruendo aliquo ejus paralogiſmo fruſtra fatigaturos. Suſpicamur enim nos decipi, quoties brevibus & facilibus argumentis velut circumvenimur. Nolui tamen illos dignari hac liquida luce veritatis, qui argumenta

gumenta illa, ab affectibus gravium vel aliorum corporum sensibilium petita, non ut par est accepere; unde nec publice extare volui, ut esset, quod illis communicarem, qui se se æquos judices præbuissent. 1696 Januar.

Verissimum est, quod ais, & a me quoque comprobatum in Tentamine de motuum cœlestium causis †, vires centrifugas in ratione composita esse ex duplicata directa celeritatum & reciproca simplice radiorum; neque id contemnendum est in rem nostram; etsi enim hæ vires, vel potius sollicitationes, differant a viribus ipsius per se circulantis; sufficit quod illis sunt proportionales. Interim revera nihil aliud sunt quam celeritates elementares. In centro percursionis indagando peculiaris oritur subtilitas, quam alia vice exponam; nunc enim valetudinis ratio magnam attentionem non fert.

Memini etiam me olim examinare resistentiam respectivam ad meæ æstimationis leges, & tamen veram deprehendere, quod & ipsum resumtum lubentissime exponam. Cur autem in vulgari Mechanica æquilibrium sit, cum velocitates descendendi infinite parvæ, seu initiales, sunt ponderibus reciproce proportionales, causa est, quemadmodum etiam indicavi in *Actis*, quod initio etiam descensus, vel ascensus, sive altitudines, sunt velocitatibus istis elementaribus proportionales. Generaliter autem gravium vires sunt in ratione composita corporum & altitudinum, ad quos vi ipsarum ascendere possunt corpora, vel ex quibus descendendo eas acquisivere. Cæterum pro objectione non habeo quod notas, si una libra a fulcro duplo remotior cum duabus libris sit in æquilibrio, supervenientem velocitatem actualem ex parte unius libræ descensum ejus facturam, non tamen magno impetu semper, sed pro ratione impressæ velocitatis; cum & oppositæ duæ libræ, una illa descendente, sint elevandæ; nec puto experientiam a nostris principiis dissensuram.

MERSENNI experimentum vereor ne sit erroneum; si tamen verum esset, globum erecto perpendiculariter tormento excussum non recidere, sequeretur gravitatem, in brevi distantia a Terra,

† *Acta Erud.* 1689. Febr. p. 82.

1696 Januar. vim perdere, & Terram esse instar magnetis, qui acus nonnisi valde propinquos attrahit. Neque id nobis officeret; rem tamen ita se se habere non facile credo. Miror experimentum a nemine, inde a MERSENNI temporibus, fuisse sumptum.

Velim Tibi persuadeas, cum contra motum perennem mechanicum nuper Tibi scriberem, plane me in animo non habuisse, quæ olim ope filtri proposueras; alioqui dixissem aperte & candide, nec Te verbis aculeatis pupugissem; quod a meo more est alienum. Et non ero adversus, cum declares debere accedere motum intestinum, ex aliis quam gravitatis principiis ortum, [veluti si fermentatio durabilis, aut periodica esset in liquore,] atque non nisi-motum physicum perennem intendas. Nam optime ais, liquore leviore super graviorem posito, & deinde cum eo perfecte mixto, commune eorum gravitatis centrum ascendere; unde adeo vi quadam extranea, vel physica, ad hanc mixturam opus esse constat. Forte & alia postea vi physica opus erit ad procurandam filtrationem, seu ad vincendam causam mixtionis conservatricem, quæ causa conservans fortasse esse posset, vel sola partium tenuitas. Itaque ingeniosam Meditationem Tuam sugillare in animo non fuit.

Atque ita jam omnia Tua attigisse credo, etsi omnibus non sit satisfactum, quod tamen spero me alias, Deo dante, facturum, ubi valetudo sibi recte constabit. Interea parabilioribus meditationibus semper promptissime inservire conabor. Et sunt omnino in hoc negotio Dynamices nostræ, quæ adhuc Tibi exponi debent, quia publice nondum prostant; cum enim a multis annis ista versaverim, mirum non est, si nonnulla constitui, quæ primo aspectu se se offerre non possunt. Quanti autem momenti sit, recte constitui principia hujus Matheseos, vel Physico-Matheseos tam late patentis, quæ considerationem virium [rem imaginationi non subditam] addit Geometriæ, seu scientiæ imaginum universali, facile intelligis. Libentissime autem Tibi exponam sententias meas, vel ideo, ut cognitis illis, facilius deinde per Te superes difficultates, meque necessitate hæc diutius meditandi leves. Nam multa mihi elaboranda supersunt adhuc altiora, si Deus vires vitamque concedat, quæ vellem non interire.

Cum

Cum Curſor publicus abiiſſet, ante has expeditas, atque adeo tempus adhuc ſupereſſet; nonnulla ſubjungenda putavi, ne qua in re Tibi ſatisfacere negligerem. Et quidem circa demonſtrationem meam ex principiis primis petitam, notatu dignum eſt, & imprimis memorabile, hinc ſequi revera eamdem ſemper quantitatem Actionis motricis abſolutæ conſervari; ſed in eo fuiſſe peccatum a Cartesio, quod eam non recte accepit, & cum ea, quam vocat quantitate motus confudit, præjudicia recepta ſecutus. Deinde ſciendum eſt, a me diſtingui vim abſolutam a directiva, quanquam & directivam ex ſola conſideratione potentiæ abſolutæ deducere & demonſtrare poſſim. Et quidem demonſtro non tantum eamdem conſervari vim abſolutam, ſeu quantitatem actionis in mundo, ſed etiam eamdem vim directivam, eamdemque quantitatem directionis ad eaſdem partes, ſeu eamdem quantitatem progreſſus, ſed progreſſu in partibus computato, ducta celeritate in molem, non quadrato celeritatis. Hæc tamen quantitas progreſſus in eo differt a quantitate motus, quod duobus corporibus in contrarias partes tendentibus pro habenda quantitate motus totali [ſenſu *Carteſiano*] debent addi quantitates motus ſingulorum [ſeu facta ex celeritate in molem]; ſed pro habenda quantitate progreſſus, debent a ſe invicem detrahi; differentia enim quantitatum motus in tali caſu erit quantitas progreſſus. Itaque cum Cartesius putarit ſe ſe ita poſſe ſalvare actionem animæ in corpus, quod anima quidem non augeat, vel minuat quantitatem motus in mundo; augeat tamen, vel minuat quantitatem directionis ſpirituum; lapſus eſt ignoratione hujus legis noſtræ novæ de conſervanda quantitate directionis, quæ non minus pulchra eſt & inviolabilis, quam conſervatio virtutis vel actionis abſolutæ. Hæc autem lex directionis, vel potius conſectaria ejus, mire decepere pleroſque; ut videntes ibi locum habere æſtimationem ex ductu celeritatis in molem, ubique illi locum facerent, etiam cum agitur de vi abſoluta. Exempli cauſa, experimentis conſtitit, ſi duo globi duri, ſeu Elaſtici, A & B, directe & centraliter concurrant inter ſe celeritatibus, quæ ſint reciproce proportionales corporibus; eos ſe mutuo repellere, ita ut ambo redeant ex qua venere celeritate. Hujus rei ne-

1696 Januar.

 ceſſitas

1696 Januar. ceſſitas ſequitur ex noſtro principio conſervandæ directionis. Nam, ante concurſum, progreſſus eorum, ſeu quantitas directionis, eſt æqualis nihilo; ergo talis etiam debet eſſe poſt concurſum. Cum vero etiam vis eorum abſoluta debeat conſervari, demonſtratur has duas conſervationes virtutis abſolutæ & directionis ſimul non poſſe obtineri, niſi dicta repercuſſione. Simili Methodo demonſtratur, quod ſupra aſſerui de globo A cum B & C concurrente per triangulum rectangulum, & regulæ etiam concurſus duorum corporum ſtatim definiuntur. Veriſſimum eſt etiam ipſam vim directivam haberi ductu molis in quadratum celeritatis, ut aliquando apparebit. Interim, eo ſepoſito, illa ſimplex conſideratio directionis, ſeu progreſſus, etiam facit, ut, in aliis multis, opus ſit celeritate ducta in molem; veriſſimaque maneant theoremata receptæ Mechanicæ, item oſcillationis, vel percuſſionis, imo & reſiſtentiæ medii reſpectivæ. Reperi enim, ſi ponamus corpus in medio ferri, & medium conſtare ex innumeris globulis, per ſpatium tanto rarius diſſeminatis, quanto medium eſt tenuius; celeritatum decrementa, in quovis ictu amiſſa, eſſe celeritatibus proportionalia; & cum, æqualibus temporibus, numeri ictuum hoc loco ſint ut celeritates, fore decrementa ut quadrata celeritatum, æqualibus temporum elementis. Idque ex ipſis illis meis principiis de conſervanda, tam virtute abſoluta, quam directione, demonſtro. Unde vides, quanta hic cautione ſit opus in recto uſu principiorum, nec iri debere per ſaltum, nondum omnibus rite examinatis. Sed hæc altiora objectoribus, in quibus non ſatis docilitatis apparuit exponere non ſum dignatus; tametſi principium hoc generale de conſervanda etiam directione contra Carteſianos non diſſimularim. Tibi vero vellem hæc omnia uno oculi obtutu paterent. Atque ita jam ea dedi, ex quibus omnibus tuis difficultatibus [etiam ſupra dilutis] ſatisfit. Hoc tantum addo, re conſiderata, non eſſe quod quæramus demonſtrationem hypotheſeos illius, quaſi grave deſcendens vel aſcendens plures ictus a materia gravifica recipiat, eodem tempuſculo, proportione celeritatis, neque enim veram puto: & ſi eſſet vera, celeritates non creſcerent æquabiliter, ſeu ut tempora. Interim minime concedendum eſt, quod æqualis gradus virium abſolutarum, quovis

vis ictu gravi, addatur vel auferatur; etsi enim materia gravifica semper æqualiter agere ponatur, tamen grave patiens non manet æqualiter dispositum. Longe enim alia ejus est dispositio cum quiescit, quam cum jam vim accepit. Imo, eo ipso, dum additur eadem celeritas celeritati alicui jam inexistenti, demonstratum habetur ex nostris principiis addi vim majorem, quam cum additur quieti; seu plus esse celeritatis gradum addere jam moto, vel magis moto, quam addere quiescenti, vel minus moto. Ut ita argumentum contrarium sit demonstrative revictum, & alia solutio non sit quærenda. Vale. *1696* Januar.

Dabam *Hanoveræ* 28. Januar. *1696.*

Deditissimus
Godefridus Guilelmus Leibnitius.

P. S. Curavi nuper edi relationem ex *Gallia* mihi missam de novo illo & admirabili Antidysenterico, quod mercator quidam ex *Hispania* attulit, & jussu Regis innumeris successibus comprobatum est. Non dubito quin Tibi, in *Gallia* versanti, dudum innotuerit. Sed quoniam nunc compertum est, nihil aliud esse quam remedium a Pisone descriptum in *Historia naturali Brasiliæ*, & quæ antea velut arcana premebantur, jam emanavere, in usum nosstrorum edi curavi. Credo hoc remedium plus adhuc habere in recessu, nec ad solas dysenterias valere. Apud Pisonem vocatur *Ipecacuanha*. . . . .

De cœtero magna me voluptate afficies, si me crebro, & si vacat, septimanatim scribas, etsi ego fortasse semper septimanatim respondere non possim. Iterum Vale.

EPIS-

EPISTOLA XXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad praecedentem.

De actione gravitatis. De actione corporis infinite velocis. De mediorum resistentia. De aestimatione virium a priori. *De curva aequabilis pressionis. De Centro gravitatis quiete vel motu non turbato & actionibus corporum. De legibus motus. De resistentia.*

Vir Amplissime atque Celeberrime, Fautor Honoratissime.

1696 Febr. Vix credideris, quanto me moerore afficiat dubia Tua Valetudo; faxis, rogo, omnibus modis, ut graviori malo in tempore occurras; spero tamen catharrum, quo natura subinde, praesertim hoc anni tempore, utitur ad expellendum quod sibi molestum est, Tibi pariter in firmiorem sanitatem esse cessurum; quod ut ita fiat, Deum animitiùs precor.

Dominus Papinus, ut video, manus victas nunquam dabit, jam nimis aperte *Cartesianae* opinionis defensionem suscepit, quam ut ab ea deflecti possit, suae magis consulens gloriae [si qua gloria dicenda est, à praejudiciis non desistere velle] quàm veritati........ Interim gaudeo, quod nunc ego Tecum in summa rei conveniam, & pleraque, quae in prioribus meis notabam, ad stabiliendam novam Tuam hypothesim, Tibi non displiceant. Miror etiam, a Te non approbari modum meum explicandi ictus materiae gravificae, qui, quolibet tempusculo, corpori gravi imprimuntur; Certe si velimus aequos judices agere, oportet ut cuique suum tribuamus. Et quid clarius est, quam quod duae quantitates fluidorum aequivelocium incurrentium in duo Corpora aequalia, ipsis inferant vires, quae erant in ratione ipsarum quantitatum fluidarum; est enim & hic repetitio effectuum homogeneorum, quam adeò commendas pro aestima-

æstimatione causarum; ita Ex. gr. quantitas fluidi ut 2 A, Celeritate ut C, producet duplo majorem vim quam quantitas ejusdem fluidi, ut 1 A, celeritate eadem C, quod enim potest unum A, idem poterit etiam A, cæteris paribus; ergo geminata causa, geminatur effectus. Hinc siquidem minus arrideat quod dixerim, numeros ictuum, qui quolibet tempusculo imprimuntur Corpori gravi, esse ejus celeritati proportionales, ponamus unicum esse ictum, quovis tempusculo impressum [quamvis, ut verius dicam nullus sit ictus, sed potius una continua pressio per totum descensum gravis]. Numquid ipsi ictus diversis tempusculis impressi erunt, [quandoquidem celeritas materiæ gravificæ maneat semper eadem] ut quantitates fluidi seu materiæ gravificæ illis tempusculis percursæ seu penetratæ; verum hæ quantitates sunt ut spatiola descensuum momentaneorum, id est, ut celeritates gravis; ergo etiam ictus, vel potius vires ictuum diversis tempusculis gravi impressæ, erunt ut celeritates. Id quod apertius liquet ex ipsa figura in ultimis meis adjecta, quam, si placet, aspicias; ubi si supponatur grave descendens per AB, esse Ex. gr. in 2, facturum uno tempusculo descensum 2, 3; nunc autem esse in 6, & æquali tempusculo percurrere 6, 7; illico apparet majorem copiam materiæ gravificæ æquali tempusculo appellere ad grave, quando est in 6, quam cum est in 2; quæ quidem copiæ erunt ut spatiola percursa, id est, ut 5, 6. ad 1, 2; id est, ut celeritates in dictis locis acquisitæ; sed rogo ut hæc paulo attentius mecum consideres; non enim dubito quin iis tandem assensum tribuas, cum adeo apprime & rationi & experientiæ conveniant; licet verum sit, me minus congrue dixisse grave descendens, vel ascendens, plures ictus a materia gravifica recipere, eodem tempusculo, pro portione celeritatis, est enim, ut jam dixi, unica continua pressio; interim per numeros ictuum illorum Celeritatibus proportionales, intelligere volui pressiones uno tempusculo inductas, quæ sint celeritatibus proportionales, ideo quod grave in illa proportione materiam gravificam penetret, ut ego puto, non autem quod grave, nunc tardius, nunc celerius moveatur, ut tu statuis. 1696 Febr.

Unde cernis meam sententiam planè nil officere opinioni recep-

1696 Febr. tæ, celeritates crescere æquabiliter, seu ut tempora; Ne autem quid desit, ostendam alterum Dilemmatis membrum, quod scilicet globus A, incurrens celeritate infinita in globum B, æqualem ei vim imprimat, sive globus B quiescat, sive moveatur; ad quod demonstrandum hæc duo tanquam concessa præmittam. 1°. si duo globi moveantur in plano, quacumque celeritate, & sibi mutuo occurrant; erit quantitas ictus eadem censenda, seu erit ictus æque fortis, sive planum, super quo moventur globi, omnino quiescat, sive alia peculiari celeritate moveatur; hoc utique nemo negabit, alias corporum actiones in terra non eædem dicendæ essent in Hypothesi Ptolemaica, & Copernicana, vel Ex. gr. Operarius in navi laborans, non eadem vi clavum impelleret, si navis quiescat quam si sit in motu. 2°. Corpus motum celeritate infinita eumdem effectum præstabit, quem præstat, si ejus celeritati superaccedat finitus celeritatis gradus; sit enim Corpus A, celeritate ∞ (infinita) & idem corpus A celeritate $\infty + 1$; erunt effectus ut quadrata celeritatum, id est, ut ∞^2 & $\infty^2 + 2\infty + 1$: verùm hæc duo quadrata censentur æqualia; quoniam $2\infty + 1$ pro nihilo habebitur respectu ∞^2. Quibus præliminatis supponatur globus A moveri in plano aliquo quiescente, celeritate ∞, & incurrere in globum B, quiescentem; nunc verò intelligatur planum simul etiam moveri in easdem partes, celeritate ut 1; habebit hac ratione globus A velocitatem $\infty + 1$, & globus B. velocitatem 1: atque adeo, per lemma primum, globus A, celeritate $\infty + 1$, tantundem valet in globum B, celeritate 1, quam idem globus A, celeritate ∞ in globum B, celeritate 0, seu quiescentem. Verùm per Lemma secundum effectus Globi A, celeritate ∞, est æqualis effectui globi A, celeritate $\infty + 1$; Ergò etiam globus A, celeritate ∞, tantundem valet in globum B, celeritate 1, quam in globum B, celeritate 0, seu quiescentem; id est, vis impressa globo B, erit æqualis, sive moveatur, sive quiescat. Q. E. D.

Hinc, ni fallor veritas illius, quod de globo sclopeti in testudinem impacto retuli, satis asseritur.

Dum hæc scribo, non possum quin ob affinitatem materiæ, aliquid moneam, quod mihi, post scriptas demum priores meas, occur-

occurrit in perlectione schediasmatis tui *Actis Erud.* Anno 1689. 1696
p. 40. inserti, *De resistentia medii*, *& motu projectorum gravium* Febr.
in medio resistente; ubi, quæ de Resistentia absoluta, Art. 1. habes, nimis festinanter à Te scripta videntur, ut pro ingenuitate Tua ipse fateberis, si ea relegere placuerit. Dicis enim,

1°. *Decrementa virium sunt proportionalia incrementis spatiorum*; quod utique ita debet esse; etenim ad superandam duplo majorem frictionem, id est, ad percurrendum duplum spatium, etiam impenditur duplo major vis &c. sed quod subnectis.

2°. *Velocitates sunt proportionales spatiis, perdita percursis, residua adhuc percurrendis*; hoc ipsi tuæ hypothesi de æstimatione virium minus consentaneum videtur. Ratio quam addis ibidem.

Ponantur incrementa spatii esse æqualia, erunt decrementa virium æqualia [per prop. 1.]: *jam si ejusdem mobilis decrementa virium sint æqualia, etiam decrementa velocitatum sunt æqualia* [*sunt enim vires ut quadrata velocitatum; æqualibus autem existentibus quadratis, etiam æqualia sunt latera*;] *itaque Elementa velocitatum amissarum sunt ut elementa spatiorum percursorum, residuarum ut adhuc percurrendorum. Ergo velocitates sunt ut spatia* &c. In hoc præprimis vacillat, quod consideras, velocitates amissas, quæ utique amplius non existunt, & proinde ad æstimationem virium perditarum nihil faciunt, loco quod considerari debuissent velocitates residuæ ad æstimandas vires residuas, ex quibus deinde decrementa illarum & horum innotuissent; sunt enim velocitates reales, quæ determinant vires. Hinc, si in figura ibi apposita, (*Fig.* 32.) velo- TAB.VI.
citas initio sit AE, spatium integrum in medio percurrendum sit recta AB, ejus pars jam percursa AM, adhuc percurrenda MB; velocitas residua MC, vel (AF,) amissa FE, erit ECB, non recta, sed parabola, cujus vertex B, & axis BA: quod quidem ex hoc solo etiam patet, quod si spatium percursum AM sit Ex. gr. $\frac{3}{4}$ partes axis AB, perdiderit mobile etiam $\frac{3}{4}$ suæ vis [quia spatia percursa sunt ut vires impensæ] remanebit ergo mobili $\frac{1}{4}$ vis initialis, & cum vires sint [juxta hypothesin novam] ut quadrata

celeri-

1696 Febr. celeritatum, habebit mobile in M, $\frac{1}{2}$ celeritatis initialis, id est BM : BA = MC*q*: AE*q*.

Præterea huic meæ objectioni ipse apertissime suffragaris in penultimis tuis ad me datis; ubi ais, me recte judicare, ex Tuis principiis sequi Corpus duplo celerius quadruplo amplius penetraturum in materiam mollem; modo consideretur sola difficultas, quæ est in separatione partium tenacium, id est, considerata sola resistentia absoluta &c. Quæ cum ita se habeant, pleraque cadunt, quæ in dicto schediasmate ex præmissis illis deducis; ut curva AL cujus abscissæ & applicatæ BM, ML, denotant spatia residua, & tempora insumta, non erit logarithmica, sed parabola communis, contra reg. 3, & 5. Art. I. Ideoque mobile M absolvit spatium percurrendum integrum AB. tempore finito, contra reg. 4, ibidem. Sequentia etiam quoad maximam partem subvertuntur. Qua de causa, Tibi deliberandum relinquo, annon hæc corrigere operæ pretium esset. Interim enixe rogo, ut hanc meam admonitionem serena fronte aspicias; vides enim unicum meum scopum esse studium veritatis, & procul a me distare morem illorum qui, aliorum scripta cavillandi unice causa, suas objectiones statim divulgant publicè; si vicissim a me in aliqua re peccatur, non solum æque fero correctionem, sed insuper obstrictum me fateor illi qui me ab errore liberaverit; quo nomine Tibi plura, quam ullatenus demereri possum, debeo.

Modus transferendi totam vim ex majori massa in minorem, quem ex iis, quæ de incursu obliquo globorum dixeram, deduxisti, mihi perplacet; nec dubito quin Dnum PAPINUM, & vel invitum, ad assensum coëgerit, pergratum tamen esset intelligere, quid responderit. Meo arbitrio non male ageres, si responsionem Tuam ad ultimas ejus objectiones etiam publici juris faceres, cum ille, in libello suo, eo Te invitare videatur; alias multi rem a PAPINO egregie defensam putarent.

Argumentum a priori petitum, quo demonstras principium Tuum, est sane speciosissimum, & ut dicis, omnino inexpectatum; quod illud mihi communicare volueris, haud parvas refero gratias. Non

video

video quid ab adversario in contrarium dici possit; Nisi forte quod actio virtualis confundi videatur cum actione formali; negando scilicet consequi A esse quadruplam ipsius C, ex eo quod A sit dupla ipsius B, virtualiter, & B dupla ipsius C, formaliter. Itaque dicet tali modo ratiocinari licere, si utraque actio esset homogenea, id est, utraque aut virtualis, aut formalis; sed utrumvis sumamus, delabemur semper in πρῶτον ψεῦδος; quod scilicet actio faciens duplum, tempore simplo, non esset quadrupla, sed dupla tantum, actionis facientis simplum tempore simplo. Ecce imitor argumentum Tuum. 1696 Febr.

1°. Actio faciens duplum tempore simplo est dupla virtualiter actionis facientis idem duplum tempore duplo.

2°. Actio faciens duplum tempore duplo est simpla virtualiter actionis facientis simplum tempore simplo.

3°. Ergo actio faciens duplum tempore simplo, est dupla actionis facientis simplum tempore simplo. Vel scilicet.

1°. Actio faciens duplum tempore simplo est simpla formaliter actionis facientis idem duplum tempore duplo.

2°. Actio faciens duplum tempore duplo est dupla formaliter actionis facientis simplum tempore simplo.

3°. Ergo, &c.

Vides duo Argumenta, quæ idem plane concludunt, sed Tuæ conclusioni omnino contrarium, & vulgato illo nituntur axiomate, quæ eidem sunt æqualia illa sunt inter se æqualia; quod quidem tantummodo locum habet in quantitatibus homogeneis, ut hic comparando actionem virtualem cum virtuali, & formalem cum formali, non autem illam cum hac. Quid ad hanc objectionem responderi debeat, ipse dispicias; Nolim ego Tibi quid objicere, sed potius quid ab aliis objici possit sincere moneo, quod a Te etiam ita acceptum iri spero.

In *Actis Februarii*, Anni 1689, vidi Tibi quoque compertum fuisse vires centrifugas, seu, ut vocas, conatus excussorios esse in ratione composita ex duplicata directa celeritatum, & reciproca simplice radiorum.

Hinc si velis paulo attentius considerare Problema meum, quod

1696. Febr. ante annum in Actis proposui, † illud non adeo inelegans reperies, quin tuam applicationem mereatur. Grave nempe in plano verticali descendens, & evolvens curvam aliquam quaesitam acceleratur, & proinde vis centrifuga hac ratione augetur. Quoniam autem filum evolvens, cui grave alligatum est, elongatur; vis centrifuga hac ratione minuitur. Quaeritur itaque Constructio Curvae, ut decrementa vis Centrifugae, ab elongatione fili profecta, compensentur per incrementa ejusdem vis ab acceleratione provenientia; id est, ut tensio fili semper eadem maneat; vel ut filum semper vi eadem extendatur.

Quaenam, in Centro percussionis indagando, alia oriatur subtilitas, quam illa, ut considerentur quadrata celeritatum actualium, ceu in prioribus meis innui, lubentissimè mihi exponi cuperem.

Ais Te olim examinasse resistentiam respectivam ad Tuae aestimationis Leges, & tamen veram deprehendere; sed nescio utrum verum putes, an quod resistentiae respectivae sint ut quadrata, an vero ut cubi celeritatum; illud vulgaris est opinio, hoc autem ex existimationis Tuae lege consequitur.

Mirum quantum me delectarunt, quae habes de vi directiva, & quantitate directionis ad easdem partes, seu quantitate progressus; ubi pulchre detexisti, quid CARTESIO aliisque ad errorem ansam dederit; scilicet quod cum viderent aestimationem ex ductu celeritatis in molem alicubi, ut in duobus globis perfecte elasticis, inter se, celeritatibus quae sint reciproce proportionales corporibus, concurrentibus; qui post ictum, pristina celeritate repercutiuntur, locum habere; fallaciam committentes inductionis ubique illi locum facerent. Recte dicis quod vis directiva, ex sola consideratione potentiae absolute deduci & demonstrari possit: sed non ita facile est demonstrare, semper eamdem quantitatem directionis seu progressus conservari. Interim scies me, jam a longis annis, simile formasse principium; quod, ex occasione Tui, iterum in memoriam revocavi, & post institutum Examen mirifice cum Tuo conspirare deprehendi. Illud autem est tale: si Corpora quotcunque, in motu consti-

† *Acta Erud. suppl.* Tom. II. sect. VI. p. 290. *Opp.* Tom. I. N°. XXV. p. 141. Vide supra Epist. 7.

constituta, sibi quomodocunque occurrant; habebit se centrum commune gravitatis post concursum eodem modo quo ante concursum; id est, post mutuam actionem Corporum, centrum commune gravitatis eamdem directionem & eamdem celeritatem servabit, quam habebat ante actionem. Possum autem demonstrare, quod id quod vocas quantitatem directionis, scilicet ducta celeritas in molem, nil aliud sit, quam quantitas progressus centri gravitatis, seu ducta celeritas centri communis gravitatis in summam molium; adeo ut hæc duo principia sint plane unum & idem. Ex his jam conjicere liceret, eamdem semper gravitatem directionis in Mundo conservari; est enim ista quantitas semper nulla; seu tanta est quantitas directionis in unam partem, quanta in contrariam; alias centrum commune gravitatis totius universi progrederetur æquabiliter in linea recta in infinitum; à quo utique natura abhorret. Concipio itaque totam Machinam mundanam, tanquam Corpus suspensum in centro gravitatis, cujus tamen partes, liberæ & separatæ, omnibus modis circa centrum moventur; ita ut perpetuum æquilibrium servetur. Ex his principiis facile novæ & veræ conduntur Regulæ communicationis motuum: Veteres enim, à Cartesio & aliis constitutæ, omnes erroneæ sunt; eo ipso quod ad conservationem ejusdem quantitatis virium motricium & progressus centri communis gravitatis non attenderint. Concursus harum duarum quantitatum sibi semper æqualium regulas determinat; alias esset Problema indeterminatum, cum infinitis modis celeritates mobilium variari possint, ita tamen ut semper eadem quantitas virium maneat. Sed non erit eadem quantitas directionis, seu progressus centri gravitatis; & vicissim infinitis modis celeritates variantur, ut semper eadem quantitas progressus maneat, sed tunc non manebit eadem quantitas virium. Unicus ergo est casus, ubi utrumque simul obtinetur, ex quo generalis Regula pro communicatione motuum elicitur hæc. 1696 Febr.

Globus a, celeritate m, incurrens in globum b, habentem celeritatem n, habebit post ictum celeritatem $(am + 2bn - bm) : (a + b)$ & celeritas ipsius b erit $(bn + 2am - an) : (a + b)$; si globi ad easdem partes ferantur, & m sit major quam n. Sin ad

1696 Febr. ad partes contrarias, ponendum tantum est $-n$ pro $+n$, & $+n$ pro $-n$. Hinc si corpus A, celeritate ut 1, incurrat in æquale B quiescens; habebit post ictum, B celeritatem ut 1, & A quiescet; [pono hic corpora perfecte elastica, vel dura; idem enim effectus sequetur, sive sint perfectè elastica, sive perfectè dura, nam falsissimum puto, quod aliqui, inter quos WALLISIUS, statuerunt perfectam duritiem, si qua daretur, efficere ut corpora post concursum simul & conjunctim ferrentur.] Sed si artificio quodam effici posset ut, in ipso concursus momento, corpora, etiamsi summe dura, per uncum aliquem, vel aliquod gluten, ita arcte sibi invicem cohærerent, ut non possent progredi nisi junctim; procul dubio ob conservationem ejusdem quantitatis virium, irent celeritate ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$: Verum tunc quantitas progressus non eadem maneret. En igitur casum aliquem, quem in penultimis Tuis dari posse negaveras: Tuam super hoc responsionem libenter audirem; Ego quidem aliquid responsionis loco adducere possem, sed id ipsum non omnino mihi satisfacit. Cæterum dicis, quod simplex consideratio directionis, seu progressus, etiam faciat ut in aliis multis opus sit celeritate ducta in molem, verissimaque maneant theoremata receptæ Mechanicæ: item oscillationis, vel percussionis, imo & resistentiæ medii respectivæ. Nescio quo pacto facias ut, sola celeritate ducta in molem, pervenias ad cognitionem centri oscillationis; Ego eleganter admodum & felicissime, centrum istud invenio; ponendo tantum principium illud conservationis ejusdem quantitatis virium; ubi in omnibus consentio cum Dno. HUGENIO, absque ut adhibeam ejus obscurum principium, quod scilicet commune centrum gravitatis penduli compositi ad eamdem altitudinem ascendere debeat, sive corpora pendulum constituentia separatim moveantur, sive simul, cum sunt in linea rigida affixa, oscillentur. Interim de centro percussionis nondum constat, an illud sit, quod Geometræ hactenus constituerunt; Lubentissime concedo, si ponamus corpus ferri in medio es constante ex innumeris globulis æqualiter disseminatis, celeritatum decrementa fore ut quadrata celeritatum, æqualibus temporum elementis. Possum

ſum enim & ego illud demonſtrare ex principiis de conſervanda 1696
tam virtute abſoluta quam directione; hoc autem minime probat, Febr.
quod etiam reſiſtentiæ ipſæ, id eſt, virium decrementa quovis tempuſculo amiſſa ſint ut quadrata celeritatum; quin imo ex hoc ipſo evincitur reſiſtentias eſſe ut cubos celeritatum. Si enim (*Fig.* 33.) TAB. VI.
Mobile A feratur in tali medio, & abſciſſa AB denotet tempus, erit celeritas BD, in curva hyperbolica CD, cujus aſymptotos AB, & celeritas initialis AC, quoniam differentiales ipſarum BD ſunt ut harum quadrata. Verum vires mobilis ſunt etiam ut quadrata celeritatum BD: ergo decrementa celeritatum ſunt ut vires, & proinde decrementa decrementorum celeritatum ut decrementa virium, id eſt, ut reſiſtentia ipſa; ſunt autem in hyperbola decrementa decrementorum applicatarum BD, id eſt, differentiæ ſecundæ ut cubi applicatarum ipſarum BD. Ergo &c.

Vale Vir Celeberrime.

Groningæ 22. Febr. 1696.

& ama

omni honoris cultu

addictiſſimum

J. BERNOULLI.

EPISTOLA XXIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De reſiſtentia mediorum. Controverſia cum PAPINO. *De æſtimatione virium* a priori. *De centri gravitatis quiete vel progreſſu uniformi. Tractatur dynamice. De legibus motus. De notis algebraïcis.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1696 Mart. MEditationes Tuæ mihi ſunt gratiſſimæ; ſive provehas noſtra, ſive ingenioſis dubitationibus illuſtres. Utinam ego ſemper meditandi laborem ferre poſſem, ut Tibi recte ſatisfacere liceret; faciam tamen quantum nunc commode poſſum. A Te abſit ut exigam, mihi ut ſeptimanatim ſcribas, cum paria reddere non poſſim: facies ergo, quod e re videbitur, perſuaſus tua nunquam apud me nimia eſſe. Si non aſſentior in quibuſdam, peto ne me id quadam judicii iniquitate facere putes, ut propemodum inſinuas, cum ais: *ſi æquos judices agere velimus, oportere ut ſuum cuique tribuamus.* Spero Te perſenſurum me, non ſine gravi cauſa, dubitaſſe de modo explicandi ictus materiæ gravificæ. Aſſeris, ſi fluidum A incurrat in corpus L & fluidum priori ſimile & æquivelox B incurrat in corpus M æquale corpori L, vires in corporibus L & M productas, fore ut magnitudines fluidorum A & B; vel ut tuis verbis utar; *duas quantitates fluidorum æquivelocium, incurrentium in duo corpora æqualia, illis inferre vires, quæ ſunt in ratione quantitatum fluidorum.* Hanc propoſitionem non concedo, nec video quomodo per repetitionem effectuum a me adhibitam & commendatam demonſtrari poſſit. Et reperies contrarium contingere, ſi A & B non fluida ſint, ſed ſolida; licet corpora recipientia L & M ambo quieſcere intelligantur. Et multo minus res ſuccedet, ſi diffe-

differant celeritate. Nimirum si globus A, 1; celeritate 1, incurrat in globum L, 1, quiescentem; accipiet globus L celeritatem 1. Si vero globus B, 2, celeritate 1, incurrat in globum M, 1, quiescentem, accipiet globus M celeritatem 4. Vides ergo, etsi globus B sit duplus ipsius A, tamen vires impressas ipsi M multo plus quam duplas esse earum, quæ impressæ sunt ipsi L. Numerum ictuum non improbo; imo magis veritati consentaneum arbitror, quam pressionem continuam. Quod tuam attinet rationem probandi corpus celeritatis infinitæ eamdem vim dare percusso, sive quiescenti, sive moto, concedo ictum esse æque fortem, sive corpora concurrant in plano quiescente, sive in plano moto; sed aliud est ictum esse æque fortem, aliud eamdem in percusso produci potentiæ quantitatem; computando tam quod proprium, quam quod commune est; cum alia sit virium, alia motuum, vel potius directionum compositio: quæ etiam in finitis agnosci possunt. Sunt & alia in eo argumento, quæ non omnino concludunt, quod appareret, si in formam redigeretur. *1696 Mart.*

Monitum Tuum ad meam æstimationem resistentiæ absolutæ deprehendo verissimum; idque ipse occasione data profitebor. Revera enim non valet hæc consequentia; *si ejusdem mobilis decrementa virium sunt æqualia, etiam decrementa velocitatum sunt æqualia*; ortumque hoc est ex præjudicio vulgari de æstimatione virium, menti adhuc, præter intentionem, inhærente. Sit mobilis a, celeritas e, vis aee; vis amissa avv, vis residua $aee - avv$, celeritas residua $\sqrt{(ee - vv)}$. Sit ejusdem mobilis celeritas (e), erit celeritas residua $\sqrt{((e)(e) - vv)}$. Celeritatis decrementum priore casu erat $e - \sqrt{(ee - vv)}$ posteriore casu est $e - \sqrt{((e)(e) - vv)}$, quæ duæ quantitates non sunt æquales. Itaque illud verum est, si vires integræ ejusdem corporis diversis temporibus sint æquales, etiam velocitates fore æquales; secus est de parte, veluti de viribus amissis vel acquisitis.

Nondum communicavi Dno. Papino modum transferendi totam vim ex majore massa in minorem, quem possibilem esse negaverat, ut thesin tueretur. Nempe vigesimo Decembris anni præteriti, his verbis ad eum scripseram „ Pour conclure, je me

 souviens,

1696 „ souviens, qu'autrefois vous avez nié qu'un grand Corps pût transferer toute sa force sur un plus petit, parce que selon l'opinion vulgaire des *Cartésiens*, que vous soutenés, j'en inferois le mouvement perpetuel, & vous avez tâché d'éviter la force de mes preuves, touchant les moyens de cette translation, le mieux que vous avez pû, en faisant des difficultés un peu recherchées sur ces moyens. Cependant ayant revû mes méditations sur le choc des Corps, j'ai trouvé que, sans levier, ni autre apparat, dont je m'étois servi autrefois pour vous satisfaire là-dessus, il y a un moyen simple pour cela. C'est que faisant ensorte que deux corps choquent à la fois un troisiéme, il doit arriver en certain cas, que les deux corps ensemble, quoiqu'ils fassent une masse plus grande que le troisiéme, demeurent pourtant en repos, & donnent toute leur force au troisiéme. Ad hæc respondet Dnus. PAPINUS in litteris 15. Januarii 1696. „Pour ce que vous dites des deux Corps, qui communiquent ensemble tout leur mouvement, [non dixeram, *tout leur mouvement*, sed, *toute leur force*] a un troisiéme; je crois me douter de ce que c'est; mais crainte d'être encore obligé de donner deux réponses au lieu d'une, je différerai d'en parler, jusqu'à-ce que vous ayez nettement exposé le fait, &c. " Sed cum in illis ipsis mihi non satis æquitatis ostendere, sed se se ad elusiones præparare videretur, rem exponere operæ pretium non putavi; neque enim ita nunc constitutus sum, ut latebras varias quærentem persequi velim, aut possim. Cæterum cum voluptate vidi Te in litteris tuis 18. Januarii datis, afferre nonnulla de compositione motus, quæ cum his pulchre conspirant, ipsique opponi possunt. Quæ in libello suo scripsit, mihi controversiam tuam parum ad sensum meum proponere videntur, ut rem ipsam per se explicare aliquando, quam cum ipso litigare malim.

Mart.

Video argumentum meum a priori non eodem apud Te esse loco, quo apud me. Neque habeo quod de eo querar. Tantum rogo, ut expendas talia paulo attentius, neque enim tam facile eludi potest, & ipse pro me solutionem objectionis dare potuisses. Sane non video quid Tibi velis, cum dicis actionem virtualem confundi

fundi cum formali. Non enim actio mihi hic est virtualis vel formalis; sed una actio alterius est dupla, vel *virtualiter*, vel *formaliter*. Nimirum *virtualiter*, cum dupla est æstimatione, etsi non sit dupla mole, vel congruentia, ut Ducatus est duplus Thaleri: *Formaliter* vero, ut Thalerus duplum est semithaleri. Et sciendum est, quod duplum est formaliter, id etiam virtute seu æstimatione esse duplum. Ideo cum nonnisi de virtute, seu æstimatione, hic quæratur, nulla est confusio diversi generis quantitatum vel æstimationum; nempe *virtualiter* duplum intelligo quod tale est virtualiter solum; sed *formaliter* duplun voco, quod simul & formaliter & virtualiter duplum est, & poteram vocabulis illis [tantum harmoniæ cujusdam causa adjectis] abstinere; ut enim quia Ducatus duplus est Thaleri, & Thalerus semithaleri, concludo Ducatum semithaleri quadruplum esse; ita quia percursio 2 milliarium, una hora, dupla est percursionis 2 milliarium, 2 horis, & percursio 2 milliarium, 2 horis, dupla est percursionis unius milliaris, una hora; sequetur percursionem 2 milliarium una hora esse quadruplam percursionis unius milliaris una hora. Ignosce candide dicenti, non videris nisi admodum obiter inspexisse demonstrationem meam, cum eam sic contra me verti posse objicis. 1°. Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla virtualiter actionis facientis duplum, tempore duplo. 2°. Actio faciens duplum, tempore duplo, est simpla virtualiter actionis facientis simplum, tempore simplo. Ergo, 3°. Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla actionis facientis simplum tempore simplo, quod est contra me. Sed rogo ut expendas, quo jure assumi possit præmissa secunda. Scilicet percursionem duorum milliarium, duabus horis, esse virtualiter simplum, seu æquale percursioni unius milliaris, factæ una hora. Certe quæ virtute æqualia sunt æquipollent; quis vero cursor non malit percurrere unum milliare, una hora, quam duo milliaria duabus horis: quin potius, si hoc ultimum ab ipso fieri velis, licet per intervalla, duplam mercedem petet, pro duplicato scilicet labore. Nimirum, ut dixi, quod formaliter duplum est [percursio scilicet duorum milliarium, duabus horis] eo ipso etiam virtualiter, seu æstimatione, est duplum. Idem est de altero tuo argumento, ad 1696 Mart.

S 3 mei,

1696 mei, ut ais, imitationem fabricato, quod tamen rurſus longiſſime
Mart. ab imitatione ejus abeſt; ut ipſe facile perſpicies, Ducato, Thalero, & ſemithalero ſubſtitutis. Placet tamen hoc quoque argumenti ſimulacrum expendere. 1°. Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt ſimpla formaliter actionis facientis idem duplum, tempore duplo. 2°. Actio faciens duplum, tempore duplo, eſt dupla formaliter actionis facientis ſimplum, tempore ſimplo. Ergo 3°. Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla actionis facientis ſimplum, tempore ſimplo. Videris ita loqui, ac ſi propoſitiones hic poſſent aſſumi pro arbitrio; ſed qua tandem veriſimilitudine aſſumis hic præmiſſam priorem? ſimplum formaliter eſſe, nihil aliud eſt, quam æquale eſſe formaliter, ſive congruere, ut Thalerus & duo ſemithaleri. Tantum autem abeſt, ut percurſioni duorum milliarium, intra horam, æquetur formaliter percurſio duorum milliarium, intra duas horas, ut ne virtualiter quidem, ſeu æſtimatione, æquetur; quis enim dubitet, quin plus ſit, idem velocius, quam tardius peragere? Interim mirari ſubit mentis humanæ conditionem. His duobus vocabulis, virtualiter & formaliter, quæ omittere poteram, adjectis, totam apud Te argumenti vim corrupi, ut a re ipſa averſus, ageres, quod *Galli* non male vocant, *prendre le change*. Talia nobis eveniunt, ſolo attentionis defectu. Obvium aliquid nos ſæpe ita percellit, & ad ſe trahit, ut reliqua non amplius conſideremus; quaſi jam aſſecuti paralogiſmi, quem nobis facile fingimus, ſedem, ſive πρῶτον ψεῦδος, ut Tute loqueris. Ego nihil magni promittere auſim; ſperabam tamen reus non fieri paralogiſmi apertiſſimi, in argumentatione, non obiter elapſa, ſed a compluribus annis conſiderata, quam tanquam alicujus momenti venditaram. Itaque fateor non potuiſſe me non valde mirari præcipitem ſententiam tuam, & puto candorem in monendo meum Tibi non ingratum fore; quia utilis eſt, ut attentio excitetur, ne tempus male collocare mihi opus ſit, defendendo, quæ Tibi ipſi conſideranti facile ſe poterant approbare; cum me æquius ſit in his ſublevari. Majori ſpecie opponi poterat, pari jure quo ego aſſumſi hanc propoſitionem, *Actio faciens duplum, tempore ſimplo, eſt dupla actionis facientis duplum, tempore duplo*, potuiſſe aſſumi hanc: *Actio faciens*

duplum

duplum tempore ſimplo eſt dupla actionis facientis ſimplum tempore ſimplo. Verum reſpondeo hanc poſteriorem non poſſe aſſumi, ſed potius convinci falſitatis manifeſtæ, hoc modo: Inter hæc duo A, *Facere duplum tempore ſimplo*, itemque C, *facere ſimplum tempore ſimplo*; datur medium minus priore & majus poſteriore, nempe B, *facere duplum tempore duplo*, cumque manifeſtiſſime [ex natura repetitionis perfectæ] ſit B duplum ipſius C, ſequitur demonſtrative A eſſe plus-quam duplum ipſius C. Comparatio igitur inter A & C poteſt reſolvi ulterius per interpoſitionem comparationis ſimplicioris; comparatio vero inter A & B interpoſitione ſimplicioris reſolvi non poteſt, ſed primitiva eſt. His igitur a Te expenſis, gratum erit aliquando cognoſcere, quid jam de argumentatione mea videatur. Quin aliam addo, quæ, ſi fundum rei ſpectes, redit in priorem, habet tamen ſuum proprium pondus. Actiones motrices [æquabiles intelligo] ejuſdem mobilis ſunt in ratione compoſita effectuum immediatorum, nempe longitudinum percurſarum & velocitatum. Porro longitudines [æquabiliter percurſæ] ſunt in ratione compoſita temporum & velocitatum. Ergo actiones motrices ſunt in ratione compoſita ex ſimplice temporum & duplicata velocitatum; ideoque iiſdem temporibus, vel temporum elementis, actiones motrices ejuſdem mobilis ſunt in ratione duplicata velocitatum, vel, ſi diverſa ſint mobilia, in ratione compoſita ex ſimplice mobilium & duplicata velocitatum. Itaque ex noſtris principiis verius rectiuſque oſtenditur, eamdem in univerſo quovis momento, vel æqualibus temporibus, actionis motricis quantitatem conſervari; Quam vero *Carteſiani* computant quantitatem motus, veram actionis motricis quantitatem non eſſe. Sunt autem potentiæ ut actiones, non impeditæ, nec adjutæ, æqualibus temporibus exercitæ. Videmus ergo eamdem ſemper vim, eamdemque movendi actionem in rebus ſervari, & quantum, vel potentiæ, vel actionis motricis uni decedit, tantum in alterum transferri.

1696 Mart.

Egregie divinaſti [conſiderato concurſu duorum in quibus celeritates ſunt reciproce ut moles, ubi nullam eſſe directionem notaveram] principium de conſervato ſemper progreſſu centri gravitatis coincidere cum principio ſervandæ directionis. Revera enim directio,

1696 Mart. rectio, ſeu progreſſio totalis idem eſt, quod progreſſio centri gravitatis ducta in mobilium aggregatum, ut jam fere GULDINO notatum, cujus regulam ampliavi; * & centrum gravitatis tantum præſtat ratiocinandi compendium. Malui autem directionem adhibere in loquendo, quod mihi cum *Carteſianis* res eſſet. Cum ***Romæ*** eſſem, anno 1689 & cum AZOUTO eruditiſſimo Gallo, qui inter Academiæ Scientiarum Regiæ velut conditores fuit, multum de his diſputarem, meditationes meas in ordinem redigens libellum adumbravi, in quo demonſtrantur hæc omnia, de vi ſcilicet tam abſoluta quam directiva, & conſervando progreſſu centri gravitatis, aliaque his non inferiora. Eum, tranſiens per ***Florentiam***, amico, in Mathematicis egregio, petenti reliqui edendum, & ille redegit in mundum omnia ſtudioſe, ſed cum finis libro adhuc deeſſet, ſummittere in me receperam; & per me ſtetit hactenus, quominus editio ſequeretur; nondum enim colophonem adjeci; partim quod multa nova ſubinde naſcerentur, partim quod his, quos videbam mea non ut par erat accepiſſe, nollem velut obtrudere pulchras veritates. Interim propoſitionem hanc perelegantem inde decerptam, ante annos aliquot ***Diario Pariſino*** † inſeri curavi. Si mobile A [quod ut punctum nunc conſideramus] tendat ſimul motibus [id eſt, celeritatibus & directionibus] AB, AC, AD, &c. [id eſt, ut quo tempore, ſi uno motu ſolo ferretur, perventurum eſſet in B, eo, ſi altero ſolo ferretur, perventurum eſſet in C, & ita porro] & quæratur punctum G, quod ſit centrum gravitatis punctorum B, C, D, E, &c. & recta AG, producatur in F, ita ut AF ſit ad AG, ut numerus tendentiarum ad unitatem; feretur mobile motu compoſito AF, [id eſt, eo tempore, quo motu ſolo AC, perveniſſet in C, nunc motu compoſito perveniet in F:] quæ Propoſitio HUGENIO profundæ meditationis viſa eſt, & naſcitur & ipſa ex conſervatione directionis. Scilicet, quod ex motibus duobus componentibus, qui ſint ſecundum duo latera parallelogrammi, oritur motus compoſitus ſecundum diagonalem; hujus

* *Acta Erud. Lipſ.* 1696. Nov p. 492. vel Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XXIX. p. 153 G. G. L. *De novo uſu Centri gravitatis*, &c.

† *Journal des Sçavans* 1693. 35e. Journal. du 7. Sept.

jus propositionis generalis casus est simplicissimus, dudum notus. Meminit meæ propositionis Dnus. *Frater* tuus, in iis, quæ nuper contra nos in *Actis* dedit. † Respondi quam-humanissime. *........ 1696 Mart.

. . . .

Verum est, quemadmodum & in proxime præcedentibus litteris innui, ex conjunctis duabus Legibus, conservatæ vis absolutæ, & conservatæ directionis, determinari leges motuum, seu concursuum; modo corpora concurrentia A & B ponantur esse dura, seu, quod idem est, perfecte elastica. Calculum autem ita inire soleo, ejusque communicationem tibi non ingratam fore spero. Progressus corporum A & B, ad eamdem partem, vocetur, ante ictum, in illo v, in hoc, y; post ictum in illo x, in hoc z; quod si contingat corpora non tendere in easdem partes cum centro gravitatis, tunc ejus, quod in partem contrariam tendit, progressus erit negativus. His positis, ex lege virium absolutarum conservandarum fiet (1) $Avv + Byy = Axx + Bzz$; ex lege conservandæ directionis, fiet (2) $Av + By = Ax + Bz$, quæ regula, certo tantum casu, coincidit cum regula conservandæ quantitatis motus *Cartesiana*, cum scilicet ambo corpora tam ante, quam post concursum tendunt ad easdem partes, & adeo nullus ex progressibus v, x, y, z est quantitas negativa. Sed ecce jam tertiam legem, quæ hinc nascitur, non minus elegantem, imo cæteris simpliciorem. Ut enim prima regula est trium dimensionum, & secunda duarum, ita tertia est dimensionis unius. Nempe (3) $v - y = z - x$. Quod sic ostendo: Ex æquatione (1) fit (4) $Avv - Axx = Bzz - Byy$, & ex æquatione (2) fit (5) $Av - Ax = Bz - By$. Dividatur æquatio (4) per æquationem (5), prodibit (6) $v + x = y + z$, vel [quod idem est] æquatio (3). Æquatio igitur (3) continet legem conservandæ celeritatis respectivæ ejusdem, sive sit appropinquationis, accessusve ante concursum, sive recessus post concursum. Et quidem hæc lex aliunde demonstrari potest, per vim scilicet elasticam concurrentium,

† *Explicationes* &c. Acta Erud. 1695. Dec p. 548. Opp. N°. 66. pag. 657.
* G. G. L. *Notatiuncula ad Acta* Decemb. 1695... Act. Erud. 1696. Mart. pag. 145. vel Jac. BERN. Opp. N°. 71. p. 728.

1696 Mart. rentium, quæ concursu compressa se deinde restituunt, adeoque tantum celeritatem respectivam in contrarium vertunt, seu dispelluntur ut compellebantur. Unde ex lege prima & ex tertia aliunde demonstrata vicissim ostendi potest lex secunda. Nam si æquationem (4) dividas per æquationem (6) prodit æquatio (5) vel (2). Aliaque adhuc plura in his arcana satis mirabilia latent. Casus, ut corpora concurrentia simul eant post concursum, servatis viribus, facilius fingi, quam a natura præstari potest; absorbebitur scilicet pars in ipso retinaculo, vel glutine; atque ita objectioni, quam Tibi eo casu facis, respondendum est.

Haud dubie, cum HUGENIO sentiendum est circa Centrum oscillationis; in quo nostra principia spectanti non potest esse difficultas; puto tamen & Centrum percussionis consentire ob causam dictam. Circa medium respective resistens, puto nos in se non pugnare, quia agnoscis quod dixi, æqualibus temporum elementis, fore celeritatum decrementa, ut celeritatum quadrata. Interim pergratæ erunt meditationes tuæ, quas innuis de centro oscillationis, vel de resistentia respectiva, aliisque. Diu est, quod de nostris differentialibus apud me nihil attigisti, sed facile judico multa alia Tibi nunc agenda esse. . . . .

Mitto exemplum ejus quod de Antidysenterico ex Gallico edi curavi. Inquiri peto in specialia, quæ habentur in Batavis de modo obtinendi & usu. . . . .

Tuas novissimas, his jam conceptis, partem & scriptis, accepi......... Interim vale rectissime.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{8}{18}$ Martii 1696.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

P. S.

P. S. Accepi etiam *Acta* Februarii proximi *Lipsiensia*, in quibus relationem de Libro NIEUWENTITII, tuamque ad ejus objecta responsionem † reperio, quam prorsus probo. *1696 Mart.*

In relatione ipsa notatum video non immerito, interesse Reipublicæ Litterariæ, discentiumque inprimis, ut consentiant Viri Docti in easdem notas. Quare velim audire sententiam tuam, an probes mecum adhiberi notam $\int$ pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis; item an approbes meam rationem exhibendi subinde divisionem per duo puncta, verbi gratia, ut $a : b$, idem sit quod $\frac{a}{b}$, id enim præsertim in typis commodum est, ne linearum spatium amittatur. Et constat proportiones a nonnullis solere tali ratione exhiberi $a : b :: c : d$, cum revera res redeat ad quotientum æqualitatem, sufficit scribi meo more $a : b = c : d$ seu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sunt & alia in notis fortasse utiliter observanda, de quibus alia occasione.

† Joh. BERNOULLI, *Demonstratio analytica & synthetica constructionis curvæ Beaunianæ* &c. Act. Erud. 1696. Febr. pag. 82. Opp. Tom. I. N°. XXVII. pag. 145.

EPISTOLA XXV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De actione gravitatis. De æſtimatione virium a priori. *De conſervatione virium & directione. De corpore a pluribus ſimul potentiis impulſo. Ac reſiſtentia mediorum. Demonſtratio centri oſcillationis ex viribus vivis. De ſignis algebraicis. De notis* HUGENII *ad* Acta Eruditorum.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1696 April VEllem tandem diſceptationum noſtrarum finem videre, quod ipſe haud dubie deſiderabis; præſertim cum ſummam rei non ſpectent, in qua utique convenimus; .... & proinde diſpiciendum nobis eſſet potius, qua ratione unitis viribus veritatem adeo claram ab Antagoniſtarum telis vindicare poſſimus, quanquam interim te ſolum hujus veritatis primum detectorem eidem defendendæ plus ſatis parem putem. Noli quæſo verba, ſincero ut-ut imprudenti mihi elapſa, ita iniquè interpretari, quaſi Te cujuſdam iniquitatis arguam, abſit hoc procul, novi Tuam ingenuitatem, quam cum profunda Scientia & Eruditione conjunctam habes; optarem ut Tibi ſatis innoteſceret, quanti Te æſtimem, quam-longe te omnibus, qui Phyſici, Philoſophi, Mathematici audiri volunt, præferam; quam crebro unicum LEIBNITIUM in me habeam apud omnes, quibuſcum hodie converſari datur. Interim etiamnum ſententiam meam tueor, duas nimirum quantitates fluidorum æquivelocium incurrentium in duo Corpora æqualia, illis inferre vires, quæ ſunt in ratione quantitatum fluidorum. Sed hîc ſuppono quantitates fluidorum infinite parvas eſſe reſpectu Corporum, in quæ incurrunt [uti revera ſupponi debet, hoc enim ſimili uſus ſum ad explicandum impulſum momentaneum materiæ gravificæ,

quæ

quæ utique quolibet tempusculo nonnisi infinite parva sui portione in grave impingit] adeoque fluida totam suam vim transferre in Corpora, siquidem particulæ fluidi ob continuo alias subsequentes post impulsum quiescere censendæ sunt. Hac itaque ratione assertum meum non poterit in dubium vocari. Fluido enim A incurrente in Corpus L, ipsique totam suam vim inferente, & fluido priori simili & æquiveloci B, incurrente in Corpus M æquale corpori L, huicque pariter totam suam vim imprimente, erunt dubio procul vires productæ in Corporibus L & M [licet etiam L & M non essent æqualia] ut vires fluidorum ante impulsum, utpote ipsis æquales, adeoque ut magnitudines fluidorum; quis enim dubitabit de eo, quod fluidorum homogeneorum & æquivelocium vires sint ut magnitudines eorum? cum hic evidens sit repetitio non modulitatis, sed realitatis. Vides ergo Exemplum tuum Corporum solidorum non infinite parvorum in alia Corpora quiescentia incurrentium huc non quadrare; Interim [ut hæc obiter dicam] festinando errorem calculi admisisse hic videris. Dicis enim *si globus A*, 1, *celeritate*, 1, *incurrat in globum* L, 1, *quiescentem*, *accipiet globus* L *celeritatem* 1, hoc verissimum est: *si vero globus B*, 2, *celeritate*, 1, *incurrat in globum M*, 1, *quiescentem*, *accipiet globus M celeritatem* 4: puto globum M accepturum esse celeritatem $\frac{4}{3}$. Secundum regulas communicationis motus novo principio superstructas, quarum formulas in præcedentibus meis exhibui, quasque ex iisdem æquationibus eliciebam, quas in ultimis tuis exprimis; compositis scilicet legibus virium absolutarum & directionis conservandarum; Ergo vires impressæ ipsi M non *multo plus*, sed paulo minus *quam duplæ sunt earum quæ impulsæ sunt ipsi* L.

1696 April

An actio materiæ gravificæ per ictus discretos, an vero per pressionem continuam explicari debeat, amplius haud disquiramus; sunt enim tantum diversi modi unam eamdemque rem contemplandi; qui si dextre adhibeantur, nullus dubito, quin idem concludant; sed inexpectatam mihi affers distinctionem inter *ictum esse æque fortem*, & *inter eamdem in percusso produci potentiæ quantitatem*, quæ duo, ut fatear, eadem putabam, considerando ictum fortiorem vel minus

1696 April fortem tanquam percutientis effectum, qui est æqualis quantitati potentiæ productæ in percusso; miror quod non jam diu hanc distinctionem protuleris in responsione ad exemplum meum testudinis, ubi æqualitatem ictus, quam nunc concedis, aperte satis negare videris. Sed quidquid sit status controversiæ nunc huc redit; *an duo Corpora æqualia, sive in motu, sive in quiete, æque fortes ictus recipientia recipiant etiam æqualem vim, vel potentiam.* Tu id negas, ego vero, etiamsi ratio mihi contrarium dictitet, in suspenso hæreo, propter id ipsum quod negas; malo enim inposterum mihi ipsimet diffidere quam a Te dissentire; Et propterea optarem meas difficultates a me non acciperes tanquam ab adversario, sed potius tanquam ab amico, qui quid ab adversario fieri possit, sincere monet. Hoc saltem explicatum mihi vellem, *quid æque fortiter ferire sit; aliud nisi eamdem vim imprimere*, alias de ictu non habeo conceptum clarum atque distinctum.

Multum gaudeo quod monitum meum ad Tuam æstimationem resistentiæ absolutæ tam benigne exceperis; Diu enim hæsitabam, an e re esset talia a Te jam olim prolata insinuare; veritus ne Tibi importune caderent eorum denuo recordari. Unde vides me amore veritatis ductum interdum monere quædam de quorum licet eventu, an nimirum grata sint futura ipse dubitem.

Optime prævides elusiones Dni. PAPINI, ad quas in antecessum se præparare videtur, eo ipso quod verba Tua intempestive satis pervertit, mutando *vim* in *motum*; quasi nescires quale intersit discrimen, cum tamen in hoc præcipuæ controversiæ cardo versatur; sic nec ego consultum duco eum corrigere & in meliorem viam redigere velle, cum oleum & operam perderes, quam utilius collocabis, meo judicio, si rem totam bono Reipublicæ Litterariæ publice exponeres, non quidem sub forma responsionis, hoc enim PAPINUM silere non faceret; sed potius præmoneres Lectorem, te traditurum relationem historicam totius controversiæ, & simul explicationem difficultatum hactenus propositarum, alias autem novas Te a nemine expectaturum, sed totum negotium ad judicium Lectoris remissurum, ne tempus tibi adeo pretiosum litigando inutiliter pereat.

Me

Me sane immerentem severa nimis censura perstringis, retundendo nescio qua indignatione objectionem adeo amice factam contra argumentum Tuum a priori. Cum tamen ab initio objectionis diserte dixerim, eam, non a me, sed ab adversario proficisci putandum esse, sed quid multum! Inventorum tuorum sum præco, ubicunque datur occasio; quid ergo succenses si, ut eorumdem veritatis defensor esse possim, a te difficultatum enodationem subinde peto, qua adversariis obviam ire queam. Quidquid sit, si objectiones meæ, vel minimum offendant, impone mihi silentium, & compescam luxuriantem calamum, ne forte præcipitem sententiam ferat, quæ me attentionis defectus reum faciat; dico forte, divinari enim non possum, an argumentatio quædam Tibi sit obiter elapsa, an vero a pluribus annis considerata; sumus homines & erroribus obnoxii; si ergo in æstimanda resistentia absoluta, & fortasse in aliis, paralogismus Tibi excidere potuit, quidni & idem hic contingere potuisset. Sed ut videas quod res est, exponam paucis causam, quæ me fecit *prendre le change*; id quod credebam fuisse legitimam retorsionem. Sumebam terminos, *virtualiter* & *formaliter*, alio sensu quam eo quo nunc eos explicas & quidem non sine omni ratione; Etenim per *actionem virtualem* intelligebam vim ipsam vel virtutem rei agentis, & hoc sensu præmissa mea secunda, quam negas, erit verissima; *Actio faciens duplum, tempore duplo, est simpla virtualiter actionis facientis simplum, tempore simplo*; id est, eadem vis vel virtus corporis requiritur ad percurrendum spatium duplum, tempore duplo, quæ requiritur ad percurrendum spatium simplum, tempore simplo: utroque enim in casu celeritas corporis, & proinde etiam potentia, est eadem. Et per *actionem formalem* intelligebam effectum jam productum, ut via quædam manet semper ejusdem longitudinis, sive sit unica, sive duabus horis percursa; hocque sensu præmissa mea prima alterius retorsionis erit etiam vera. *Actio faciens duplum, tempore simplo, est simpla formaliter actionis facientis idem duplum, tempore duplo*; id est; spatium percursum intra minutum unum a corpore celeritatis duplæ est æquale spatio percurso intra minuta duo a corpore celeritatis simplæ. Vides itaque me non ita locutum fuisse, ac si proposi-

1696 April

1696 April propositiones possent assumi pro arbitrio; sed omnia mature expendisse, antequam tibi ea perscripsissem. Interim Tua responsio mihi nunc plane satisfacit, eique proin acquiesco; video enim, quid duo isti termini Tibi significent; Cæterum argumentatio Tua mihi videtur elegantissima, & Publico non amplius invidenda; multum enim ponderis tribuet argumentis a posteriori.

Quæ de conservanda, non solum virium motricium, sed & directionis quantitate, vel quod idem est, me divinasse ais [quamvis non casu, sed industria eo pervenerim] de conservato semper progressu centri gravitatis habes, omnino mihi placent. Et memorabile inprimis est, quod Lex tertia conservandæ celeritatis respectivæ ejusdem, seu ejusdem differentiæ celeritatum ante & post concursum quæ alias, uti bene notas, ex vi elastica concurrentium ostendi potest, tam pulchre ex duabus præcedentibus tanquam corollarium fluit: qui consensus non parum confirmat principium conservationis quantitatis virium. Alia procul-dubio arcana sub his latent. Putem ergo alias posse condi leges quam-plurimas, si loco divisionis adhibeamus multiplicationem, multiplicando scilicet æquationem (1) per æquationem (2) vel (3); & quæ provenit iterum per unam inferiorum, quod in infinitum continuari potest. Propositionem ex conservato progressu centri gravitatis decerptam, quam HUGENIUS jure merito ex profunda meditatione ortam dicit, & quam ante aliquot annos *Diario Parisino* inseri curasti, * mihi sine mora communicavit Dnus. VARIGNONIUS, cujus de-

TAB. VI. monstrationem etiam tum e vestigio inveneram. Sit enim (*Fig.* 34.) mobile A, tendens simul celeritatibus & directionibus AB, AC, AD, AE; & sit AF directio & celeritas mobilis A, qua fertur ex motu composito: dico: AF, [productam] transituram per centrum commune gravitatis G punctorum B, C, D, E: & esse ad AG, ut numerus punctorum ad unitatem. Motus enim particulares BA, CA, DA, EA, &c., intelligi possunt tanquam compositi ex collateralibus Bβ & Bb, Cγ & Cc, Dδ & Dd; Eε & Ee; &c., quoniam itaque FAγ est directio motus compositi, erunt celeritates

* 1693. 35e Journal. du 5e. Septemb.

eritates affirmativæ æquales Celeritatibus negativis, ideſt, Bβ + Cγ &c., == Ee + Dδ &c. Ergo, ut patet ex ſtaticis, FAγ eſt axis æquilibrii, ſeu tranſit per centrum gravitatis punctorum B, C, D, E, & porro quia Bb, Cc, Dd, Ee &c. ſunt parallelæ AF, erunt celeritates partiales ſimul ſumptæ Bb + Cc + Dd + Ee &c. == celeritati compoſitæ AF: eſt autem, ut iterum conſtat ex ſtaticis Bb + Cc + Dd + Ee + &c. ad AG, ut numerus punctorum B, C, D, E, &c. ad unitatem; Ergo &c. Q. E. D. Hinc ultro ſequitur, ſi mobile A ſit in ipſo centro gravitatis G conſtitutum, & ſollicitetur a potentiis AB, AC, AD, AE, &c. ſecundum directiones AB, AC, AD, AE, &c. mobile A manſurum in quiete; cujus generaliſſimi theorematis illud tantum eſt caſus ſpecialis, quod apud Hugenium, alioſque me legiſſe memini; Nimirum ſi Corpus in centro gravitatis Trianguli vel etiam Pyramidis triangularis conſtitutum tendatur a potentiis ſecundum directiones linearum ab angulis ad centrum ductarum in earumdemque ratione, corpus illud neutrorſum motum iri & proinde quieturum. Ex hiſce autem patet, non ſolum hic, ſed in omnibus aliis, centrum potentiarum [ut ita loquar] eſſe idem, quod centrum gravitatis; Hoc enim Triangulo & Pyramidi triangulari proprium eſt, quod eorum centrum gravitatis ſit etiam centrum gravitatis punctorum in angulis. 1696 April

Concedo reſiſtentias medii reſpective reſiſtentis eſſe ut quadrata celeritatum mobilis; ſi per reſiſtentias intelligantur decrementa celeritatum; Sed ſi per reſiſtentias intelligamus [quod meo judicio etiam ſic intelligendum eſt] decrementa virium mobilis quovis tempuſculo amiſſa, erunt citra omnem controverſiam reſiſtentiæ, ut Cubi celeritatum.

Meditationes meæ, ut vocas, de Centro oſcillationis, non quidem ſunt multæ vel magni momenti; interim uno Theoremate totam Doctrinam pendulorum complecti poſſum, quod cum *Hugenianis* optime conſpirat; neque conſidero centrum gravitatis, quod Hugenius æqualiter deſcendere & aſcendere ſuppoſuit, ſive corpora ſeparatim ſive conjunctim oſcillentur; ſed aſſumo novum tuum principium de conſervatione ejuſdem quantitatis virium, ex quo deinde principium *Hugenianum* tanquam conſectarium deducitur.

1696 April TAB.VI. Sit enim (*Fig.* 35.) pendulum HA, compositum ex quotvis gravibus A, B, C, &c., perticæ rigidæ & nullius gravitatis HA affixis, & agitatum circa centrum H: quæritur longitudo penduli simplicis & isochroni HG. Ponantur distantiæ gravium penduli compositi AH, BH, CH, &c. a, b, c, &c. & distantia penduli simplicis GH, x. Postquam nunc pendulum descendit quantum descendere potest, nempe scilicet in situm verticalem, erunt celeritates punctorum A, B, C, &c., G, a, b, c, &c., x: ergo quantitas virium gravium A, B, C, &c., erit $Aaa + Bbb + Ccc$ &c.: Consideremus jam corpora A, B, C, &c. non amplius perticæ affixa, sed quodlibet in sua distantia separatim oscillari, circa H: erunt, per naturam gravium descendentium jam notam & receptam, celeritates gravium A, B, C, quando in situm verticalem venerint, $\sqrt{ax}$, $\sqrt{bx}$, $\sqrt{cx}$, &c. suppono enim celeritatem puncti G esse x. Ergo hoc modo quantitas virium gravium A, B, C, &c. erit $Aax + Bbx + Ccx +$ &c.: quoniam autem utroque modo suppono eamdem virium quantitatem esse, erit $Aaa + Bbb + Ccc$ $+$ &c. $= Aax + Bbx + Ccx +$ &c.: & proinde

$$x = \frac{Aaa + Bbb + Ccc + \&c.}{Aa + Bb + Cc + \&c.}$$

Hæcque nunc est propositio fundamentalis, quam HUGENIUS in suo Tractatu, pag. 100, operose admodum, & per deductionem ad absurdum justo majoris minorisve ascensus centri gravitatis, (quod ego ne considero quidem) demonstravit. Ex qua omnia Theoremata *Hugeniana* facillime eliciuntur, adeo ut etiam hinc veritas novi principii patescat, quia cum *Hugeniano* tam mirifice convenit. Liquet etiam ex hac æquatione Centrum oscillationis illud ipsum esse, quod vulgo statuitur percussionis. . . . .

. . . .

Jam olim Tibi aperui mihi perplacere, ut adhibeatur S pro summis & me inposterum eodem signo usurum; quod autem in responsione ad objectionem NIEUWENTIITII vocabulum *integralis* etiamnum usurpaverim, id ideo factum est, quia iisdem verbis quibus NIEUWENTIIT objiciebat, ego respondere volebam. Interim non inconsultum mihi videtur, si Lectores admonerentur, idem

idem intelligendum esse per *summam* vel $\int$, quod nos antehac per *Integrale* vel *I*, denotare voluimus; quandoquidem hæc expressio jam passim invaluit. Pariter tua ratio exhibendi divisionem per duo puncta commodissima mihi videtur, sed ipsi assuescere difficile erit, ita ut illis qui vulgari divisioni assueti sunt, vix uno intuitu dividendum & divisorem distinguere possint; præsertim quando fractio fractionis occurrit, ut si pro $\frac{a+\frac{b}{c}}{e-\frac{f}{g}}$ scribatur $\overline{a+b:c}:\overline{e-f:g}$; non statim patet quid, & per quod, sit dividendum. Præterquam quod variæ lineolæ suprascriptæ non minus impedimentum pariunt in typis. 1696 April

Nuper Novi nostri Gubernatoris *Principis* NASSOVII Informator mihi misit *Actorum Lips.* annos 1690. 1693 & 1694, quos coëmit in auctione Librorum HUGENII; invenio ibi varias notas criticas breves quas HUGENIUS ad marginem plumbagine scripsit, & plerasque super ea quæ Tu, Dominus TSCHIRNHAUS, *Frater*, & ego publicavimus; nec Tibi, nec nobis pepercit, præsertim *Fratris* multa ipsi displicent; si curiosus es, ea quæ Te concernunt Tibi transcribam. Curabo ut etiam cæteris annis potiar, ut quid de aliis senserit videam.

Interim vale quam-optime, & ama, ut soles

Ampl. T. Devotissimum

Groningæ 7. Aprilis 1696.

J. BERNOULLI.

EPISTOLA XXVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad praecedentem.

De actione gravitatis. De aestimatione virium a priori. De NIEUWENTIITIO. *De signis algebraicis. De* HUGENIO.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime!

1696 Mai NOlim putes disceptationes nostras mihi ingratas esse, dummodo illustrandæ, confirmandæque veritati serviant, quod vix est ut fieri non possit inter studiosos veritatis & in ea inquirenda exercitatos. Quod verba attinet, elabi interdum calore scribendi non exquisite tornata,

Scimus, & hanc veniam petimusque damusque vicissim.

Neque ego de Tuo erga me affectu dubitavi, & nolim vicissim admonitiunculam illam ab indignatione potius [quæ nulla fuit] quam ab amico animo profectam putes, quod quædam leviore brachio tractata arbitrabar, quam merebantur, aut veritatis interesset. Spero controversiam inter nos de origine potentiæ gravibus impressæ jam facilius componi posse, postquam expressa tua verba me tandem docuerint in quo consistat dissensus. Nempe statuis particulam fluidi gravifici totam suam vim imprimere in grave; quod si ita esset, fateor quemvis ictum gravi æqualem [circiter] potentiæ gradum esse additurum. Sed ego puto particulam materiæ gravificæ impactam omnino repercuti, nec alias sequentes particulas id impedire. Nam non sequuntur nisi ex intervallo, & si immediate sequerentur, unum continuum percutiens componerent; de quo rursus idem posset dici, nempe totam potentiam suam non transferre. Et vero si particulæ percutientes darent totam suam potentiam, sequeretur non celeritatem, sed potentiam gravis crescere uniformiter, cum numerus ictuum sit tempori proportionalis.

Cæterum

Cæterum hanc rationem de translatione totius potentiæ [quantum memini] in prioribus non allegaras, & ita ni fallor ratiocinationem jam mutas. Porro si globus B, 2, celeritate 1, incurrat in globum M, 1, quiescentem, omnino est ut scribis, acquirere globum M celeritatem $\frac{4}{3}$ & negligentia quadam omisi divisionem per 3, quam calculus dabat. 1696 Mai

Verissimum puto, etiamsi ictus sint æque fortes, non tamen ideo sequi potentiam eamdem inprimi recipienti; quia ictus vis æstimanda est, non tantum ab eo quod contingit in percusso, sed etiam simul ab eo quod fit a percutiente. Interim puto hic nobis magis in loquendi modo, quam rebus dissensum fuisse, neque in isto situm esse controversiæ statum; sed potius in iis quæ paulo ante dixi.

Utrum adhuc reciprocanda sit, cum Dno. PAPINO ferra, intelligam ex effectu novissimarum mearum apud ipsum litterarum; publice cum ipso litigare adhuc minus operæ pretium erit. Quem litteræ privatæ non movent, is multo minus publice manus dabit. Itaque satis erit rem ipsam suo tempore exponi.

Spero Te, qua es sinceritate, ingenue agnoscere, fuisse mihi causam mirandi, quod circa *τό formaliter* & *virtualiter* tam a meo sensu abhorrentia dixeras; ea enim, quam indicas, interpretatio nunquam mihi venerat in mentem, nec potuissem adhibere ad scopum meum, nisi manifeste ineptiendo. Sed bene est quod ego Tibi satisfeci, & Tu mihi jus reddis. Quid videtur Tibi de altera ejusdem propositionis demonstratione? Quæ paulo magis est ad formam receptam, etsi ambæ conveniant in radice. Maximi mei conclusio ipsa momenti visa est; quia hinc magnum patet arcanum Divinæ Sapientiæ, & corrigitur sententia CARTESII, simulque scopus, quem sibi proposuerat, obtinetur. Nam vere servatur eadem quantitas actionis motricis in mundo, si quantitas illa æstimetur ut oportet. Unde, & revera dici posset eamdem quantitatem motionis servari; nisi sensus hujus phrasis vulgaris, quæ celeritate in molem ducta motionem æstimat, jam esset receptus. Quantitas autem actionis motricis, ex hac mea demonstratione duplici, con-

 ficitur

1696 Mai ficitur esse in ratione composita ex simplice molis & duplicata velocitatis. Itaque jam a priori constat Deum non fore facturum ex legibus perfectæ Sapientiæ, si ex *Cartesianorum* sententia eamdem quantitatem motus, ut ab ipsis intelligitur, conservaret; ita enim ipsa actio revera non foret æquabilis. Haud dubie, non casu, sed ingenio acri divinasti, vel potius penetrasti, coincidere centri gravitatis æquabilem progressum & conservationem directionis. Demonstratio etiam Tua regulæ meæ de compositione motuum, omnino consentit cum ea, quam innui in ipso *Diario*, cum ederem.

Pulcherrime ostendis ex principio nostro, velut ictu, confici propositionem HUGENII fundamentalem de pendulis; ita alterum alterius testimonio confirmatur & illustratur.

. . . .

Dnus. NIEUWENTIIT voluit replicationem ad responsionem meam mittere *Lipsiam* in *Actis Eruditorum* edendam; sed cum constaret illa nescio quot plagulis, Dnus. MENCKENIUS id declinavit, excerpta tamen inserere obtulit. Scripsi illum admonendum videri, ut etiam Tibi respondeat eadem opera, quo inanes repetitiones evitentur; quin-imo, ne frustra publico obstrepatur, recte meo judicio facturum, si Tibi vicino scrupulos suos per litteras communicet. Nam non video, quid ejus methodus peculiaris, quam laudat, præstare possit; cum pars sit ex nostris descripta, pars ex iis non intellectis enata.

In notandis calculis ad usum typorum, decrevi pro lineis vinculorum inposterum uti commatibus directis atque inversis in vim parenthesium, ita non interrumperetur typorum series, nec spatium amittetur, & tamen omnia [ni fallor] accurate habebuntur. Velim tamen prius tuam audire sententiam.

Exempli causa, tuum $\dfrac{a+\dfrac{b}{c}}{e-\dfrac{f}{g}}$, quod quinque typorum lineas minimum postulat, sic poterit scribi: $_{\text{‘}}a+_{\text{‘}}b:c,,:_{\text{‘}}e-_{\text{‘}}f:g,,:$ possent tamen inversa commata omitti, scribique $a+b:c,,:e-f:g,,$ quod

quod & facere soleo, & communiter sufficere potest. Sed tamen designatio, quasi parenthetica, per commata includentia est absolutior, tutiorque interdum; præsertim si pro commatibus adhibeantur veræ parentheses, ne commata inversa confundantur cum littera *c*, exempli gratia in eodem casu ista stabit $(a+(b:c)):(e-(f:g))$. 1696 Mai

Pergratum fuit, quod nuntias de notatis Domini Hugenii marginalibus in *Acta Eruditorum*. Rogo ut omnia describi cures, sive me, sive alios concernant, mihique communices, libenter expensas reddam. Initio parum favebat methodis nostris, quod fructum earum, sua amicorumve experientia, nondum didicisset, quod nec in suis ad me prioribus dissimulavit; sed postea rectius doceri cœpit, & cum in litteris privatis, tum in schediasmate quodam inter *Acta Lipsiensia* publicato, candide pronuntiavit, quod res est. Non dubito tamen, quin quædam ab ipso recte admoneantur. In scheda, *De Resistentia* error quidam, ex festinatione, admissus erat, circa quamdam Propositionem; hunc cum, in aliqua Epistola ad ipsum data, occasione emendassem, respondit se se idem pene totidem verbis, ibi ad marginem *Actorum*, notasse. . . . .
Vale,

Dabam *Hanovera* 15. Mai: 1696. [ex itinere reversus]

Deditissimus

Godefridus Guillelmus Leibnitius.

EPIS.

EPISTOLA XXVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De actione materiæ gravificæ in corpora gravia. De iſtius vi & quantitate. De æſtimatione virium a priori. *De* NIEUWENTIITIO. *De* HUGENII *annotationibus ad* Acta Erudit. *De* TSCHIRNHAUSII *putatitio invento comparandi arcus parabolicos. Curvæ Brachyſtochronæ Problema.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

1696 Jun. NOſtra Controverſia omnino naturam referre videtur duarum linearum aſymtotorum, quæ quidem magis ac magis convergunt, nunquam tamen coincidunt: ſic diſcrepantes noſtræ opiniones, tractu temporis, continuo ſibi invicem propius accedunt, ut nunc parum diſtare & inpoſterum minus diſtituræ videantur, ita tamen ut nunquam non aliquid ſcrupuli inter ſe relicturæ ſint; ſed præſtat continuationem aſymtoticæ noſtræ liti præſcindere, quam in infinitum diſputando diminuere, ſed nunquam adimere differentiam, quæ jam fere inſenſibilis eſt. In hunc finem hiſtorice tantum [minime vero ut objiciam] modum proponam, quo particula fluidi gravifici totam ſuam vim [cum noſtram diſputationem ad exiguam hanc particulam nunc redactam eſſe ipſe agnoſcas] gravi imprimere concipi poſſit. Hanc enim translationem totius Potentiæ, quam in penultimis meis me non allegaſſe, adeoque in ultimis ratiocinationem mutaſſe dicis, ſemper innuere volui, & ſic verba, non autem ratiocinationem mutavi. Utique tecum puto, particulam illam repercuti, ſi ſtatuas poſt venientes nonniſi ex intervallo ſequi, & illam quæ nunc impingit, ſimul ac impingit liberè & ſine ullo impedimento reſilire poſſe. Verum conſidera, ſi placet, annon fractus & ſinuoſitates pororum corporis gravis poſſint

possint esse in causa cur particula materiæ gravificæ post impulsum, 1696
non ita facile corpus penetrare & ab eo separari queat, quin potius Jun.
aliquantisper in poro quasi intrusa & infixa manere cogatur, adeoque tota ejus vis a Corpore absorbeatur? Quid si testudinis exemplum iterum proferam; recipit sane totam vim globi a sclopeto ipsi injecti, si nempe post ictum in carne ipsius hæreat, nec aliorsum evadat; atque hac ratione non video, quale discrimen intersit, sive testudo moveatur, sive quiescat; utrovis enim casu exhaurit totam vim globi, nisi dicatur aliquam ejus partem impertiri materiæ ambienti, quam autem hic excludo, supponendo motum illum in vacuo fieri. Præterea, ut ad rem nostram redeamus, materia gravifica cum sit subtilissima, & omnia sint plena, procul-dubio unum quid continuum constituit, in tantum ut ejus particulæ, non ex intervallo, sed immediate sequi debeant. Demus vero & hoc, materiam gravificam non esse continuum quid; saltem ejus particulæ erunt æqualiter disseminatæ, adeoque si non agat per continuam pressionem, erit tamen numerus ictuum, non tempori, sed spatio proportionalis. Et hoc est quod hactenus impedivit, quominus huic opinioni assensum dederis; quia credis, cum Galilæo, omnino necesse esse, ut numerus ictuum sit tempori proportionalis; si hoc esset, & ipse faterer meam opinionem non posse subsistere, quia tunc Corporis cadentis celeritates non crescerent uniformiter secundum tempora: sed jam-jam videbis, quam pulchre hæc uniformitas, ex ipsa mea hypothesi, quæ Galilæi omnino est contraria, sequatur. Qua in re idem fere mihi contingit quod olim Fermatio contra Cartesium de refractionibus disputanti, qui per rationem, ut-ut *Cartesianæ* directe oppositam, ad easdem tamen a Cartesio stabilitas refractionum leges pervenerat. Ostendo itaque; 1°. Quomodo concipi possit, particulam materiæ gravificæ totam suam vim transferre in grave. 2°. Quod numerus ictuum sit in ratione spatiorum, id est, quod grave ascendens, vel descendens, recipiat ictus, eodem tempusculo, proportione celeritatis; sunt enim spatiola percursa eodem tempusculo ut celeritates.

Uniformitatem seu æqualitatem accretionis celeritatum secundum

1696 Jun. TAB. VI. tempora sic demonstro. Esto (*Fig.* 36.) altitudo descensus A B, quæ dividatur in partes æquales A *a*, *ab*, *bc*, &c. Erunt per Lemma 2um numeri ictuum per A *a*, *ab*, *bc*, &c. etiam æquales. Atqui per Lemma 1um grave recipit totam vim particularum gravificarum; ergo augmenta virium gravis in singulis punctis *a*, *b*, *c*, successive existentis sunt æqualia, id est, si *ae*, *bf*, *cg*, *dh*, &c. denotent vires acquisitas, erunt *ae*, *if*, *lg*, *mh*, &c. elementa æqualia, & proinde A C est linea recta. Nunc, quia tecum mihi res est, suppono principium tanquam a priori demonstratum, vires acquisitas esse in ratione duplicata celeritatum. Applicentur itaque *aα*, *bϐ*, *cγ*, &c. quarum quadrata sint ut *ae*, *bf*, *cg*, &c. seu ut A *a*, A *b*, A *c*, &c. denotabunt *aα*, *bϐ*, *cγ*, &c. celeritates acquisitas; Est autem, uti patet, curva A *α β* parabola. Ex quo sequitur etiam illam curvam, cujus applicatæ denotant tempora impensa esse parabolam; adeoque celeritates esse ut tempora, seu crescere æquabiliter secundum tempora; id est, tempusculo æquali æqualem addi celeritatis gradum. Q. E. D. Meam nunc opinionem clare exposuisse sufficiat, si eam pro vera non agnoscere velis per me licet; Tibi nullam inde movebo litem; vides saltem, quod omnino consentiat cum Legibus descensuum à GALILÆO stabilitis. Ex eo enim quod posui totam vim particularum gravificarum transferri in grave, & numerum ictuum esse ut celeritates eodem tempusculo, idem sequitur, scilicet acceleratio uniformis, quæ deducitur supponendo vim particularum non totam transferri; & numerum ictuum esse ut ipsa tempuscula; adeo ut nequaquam videam, cur natura hac potius agendi via utatur quam vero illa; Et sane nescio annon probabilius sit dicere materiam gravificam continuo exercere vim suam in grave; ubicunque enim grave cadendo existat, ibi offendit particulam, cujus vim recipit. Econtrario quidquid faciam, non possum concipere, qui fieri possit ut materia gravifica singulis tantum momentis ictum faciat. Quid quæso facit inter duo proxima momenta? otiaturne? Cessatne agere? annon ubique & semper præsens est, & præsto, ad removendum obstaculum quandocunque motui suo celerrimo occurrit? Quid clarius, quam quod posita causa, ponatur effectus? Cum ergo materia gravifica

vifica continuo fit in actione, non interruptim, nec per intervalla temporis, quid impedit quominus grave eam actionem femper & ubique perfentifcat [fi fentire poteft.] Ignofce prolixo mihi, non credebam tot de hoc verba facere; quia autem ab initio declaravi me meam opinionem, vel fi mavis, explicandi modum circa originem potentiæ gravibus impreffæ fimpliciter expofiturum, ut inpofterum altercationibus fuperfedere poffimus; Non ægre feres, quod forte longius a calamo fcripturiente abreptus fuerim, quam feciffem, fi patientiæ Tuæ inter fcribendum rationem habuiffem. 1696 Jun.

Antequam hanc materiam omnino deferam, diffimulare non poffum, quod quo attentius hactenus dicta confidero, eo magis in mea opinione confirmor. Commodum, hoc ipfo inftanti, mihi incidit fimile: Concipio aliquod medium inftructum infinitis fpiris elafticis, vel aliis elaftris æque fortibus æqualiter diffeminatis, vel [quod præftat] immediate juxta fe pofitis; Ifta elaftra tali artificio tenfa fuppono, ut ad appulfum alicujus corporis a retinaculo liberentur, & fubito refiliant, fimulque vim fuæ elafticitatis integram corpori appellenti tribuant, quod facile concipi poteft, fi modo ftatuatur elaftrum incomparabiliter celerius reftitui, quam corpus movetur. Nunc, in ifto medio, concipio corpus aliquod a minima vi, qua nempe pollet unum elaftrum, moveri incipere; fic retenta vi primi elaftri progrediens offendit fecundum, cujus vim pariter recipit; poftea retentis duobus virium gradibus, progreffu fuo accipit tertium, tunc quartum, quintum, fextum, &c. & quidem hi gradus virium ex æquali intervallo, non tempufculorum, fed fpatiolorum fuperaccedunt. Dico hoc corpus in ifto medio nihilominus fecundum tempora uniformiter accelerari, id eft, ea lege, qua GALILÆUS grave cadendo accelerare afferuit; id quod ex demonftratione fuperiori luculenter apparet. In tantum, ut fi nolis materiam gravificam, juxta meam hypothefim operari, tamen dicere tenearis, illam ita operari poffibile effe, falva manente uniformitate accelerationis per tempora æqualia, nullamque rationem apparere, cur communis explicandi modus, qui & Tuus eft, alteri meo fit præferendus; cum fatis fupra oftenderim, quo modo fieri poffit; ut particula materiæ gravificæ totam fuam vim transfe-

1696 rat in grave; & contra quam magnæ incongruitates se se prodant
Jun. statuendo ictus procedere secundum tempuscula; sed hæc Tuæ attentioni commendo; forsan ex ipsis aliquid utilitatis capies, præsertim postquam mentem præoccupatam hactenus, quasi mea opinio opinioni ubique receptæ de uniformitate accelerationis e diametro opposita fuisset, cum tamen illam mirifice confirmet; postquam, inquam, hanc præconceptam mentem exueris, quæ forte fecit, ut meas rationes hucusque allatas nunquam serio perpendisses.

De ictus quantitate nihil amplius urgebo, quia jam nihil facit ad controversiam. Nondum tamen clare patet, quomodo ejus vis æstimanda sit; si, ut innuis, impressio potentiæ non sit proportionalis ictui.

Memini me, apud *Ignatium Gastonem* PARDIES, in discursu, *De motu locali*, legisse, quod ex ictus quantitate regulas motus deducere conatur, ex principio quodam, quod mihi falsissimum videtur; scilicet ex indifferentia corporis ad motum & ad quietem; qua posita corpus maximum quiescens, a minimo incurrente, celeritate non imminuta abripi sequitur. Hanc indifferentiam, cui Te olim etiam addictum fuisse ex *Actis* superioris anni pag. 151. video, ipse ibidem explodis; ubi non male corporibus inertiam, seu ad motum resistentiam tribuis. Hoc autem non-nisi incidenter innuere volui; Præcipuum illud est, quod PARDIES in eodem discursu jam-jam animadvertit, contra *Cartesianos*, non semper eamdem quantitatem motus absolutam conservari; quod etiam ostendit ex incursu obliquo globorum; interim veram quantitatem motionis non detetminat, nec dicit illam haberi ex ductu molis in quadratum velocitatis.

Altera Tua demonstratio propositionis de ratione actionum motricium, quam in prioribus allegasti, ingeniose pariter ac prior &, ut dicis, magis ad formam excogitata mihi videtur, quamvis in fundo rei ambæ coincidant. Nihil etiam enim certius est, quam quod actiones motrices debeant mensurari per effectus suos immediatos; si itaque longitudines percursæ, & velocitates [nisi quis obstinate vellet velocitatem potius esse causam] sint effectus actionis.

nis immediati, & quidem soli, quorum unus ab altero non dependet, vel in altero non includitur [secus ita ratiocinari non liceret; ex eo enim quod duæ libræ auri occupant spatium duplo majus quam una libra auri, & insuper duæ libræ sunt duplo plures quam una libra, non ideo sequitur duas istas libras fore quadruplo seu bis duplo graviores quam una libra, quia una ratio dupla in altera jam includitur, id est, posita una, ponitur & altera] erunt actiones motrices necessario in ratione composita longitudinum & velocitatum; adeoque temporibus æqualibus in duplicata velocitatum; cæterum egregie admodum in iisdem prioribus Tuis ostendis inter hæc duo A, *facere duplum*, *tempore simplo*, itemque C, *facere simplum*, *tempore simplo*, cadere medium minus priore & majus posteriore, scilicet B, *facere duplum tempore duplo*. Fateor B manifeste [ex natura repetitionis perfecta] esse duplum ipsius C, & proinde demonstrative sequi, A esse plus-quam duplum ipsius C; sed tamen ex eo nondum sequitur illud præcise quadruplo majus esse hoc; priusquam demonstratum sit A esse duplum ipsius B: & hoc, meo judicio, demonstratu non ita facile est; & enim inter *facere duplum*, *tempore simplo*, & inter *facere duplum*, *tempore duplo* talis repetitio non percipitur; quin-imo videtur primo intuitu illud hujus quadruplum esse; si enim A, tempore simplo, idem faciat quod B, tempore duplo; oportet ut A sit duplo velocius quam B adeoque illius potentia quadrupla potentia ipsius C. Vides exinde hæc non ita procedere quasi nullam amplius mereantur elucidationem. 1696 Jun.

Tametsi replicationem Domini Nieuwentitii non viderim, arguit tamen .... quod etiamnum in scirpo nodum quærat; utrumvis sit, ejus Commercium litterarium, quod ipsi mecum ineundum suasisti, mihi non arridet. Nolim enim operam meam inutiliter collocare .... frustra illum admoneri facis, ut mihi quoque respondeat; vides ex silentio nihil habere quod reponat; Demonstratio enim synthetica, qua responsionem meam ad ejus objectionem obfirmavi, adeo facilis, clara & ad veterum demonstrandi modum accomodata est, ut se se risui exponeret, si quid contra movere vellet, cum a quovis etiamnum

1696 Jun. Geometriæ Tyrone intelligi possit. Modus, quem Tibi proposuisti notandi calculos, omnino commodus est pro typis; optandum foret ut jam-diu introductus esset, revera enim hæc innotatio aliquid laboris facesset iis magis, qui veteri notationi assueti sunt, quam iis qui recens Algebræ studio animum applicant.

En adjecta hic marginalia Domini HUGENII, quæ Te tantum concernunt; videbis ex iis non tanti esse momenti, quanti forsan credideras. Non e re judicabis, ut etiam reliqua Tibi transcribam, quæ alios concernunt; si tamen illa desideras, lubenter faciam, erit enim inter semiquadrantem horæ factum. Nondum nactus sum reliquos *Actorum* tomos; eorum tamen per primam occasionem mittendorum spem facit amicus. Memini quod mihi non ita pridem ultro promiseris excerpta ex litteris Domini HUGENII ad Te datis, in quibus ipsum magnifice de nostra methodo sentire ais. Gratissimum foret, si eorum me compotem redderes. Vellem etiam mihi locum indicares *Actorum* *; ubi de eadem re mentionem facit; Nil novi hic ad nos pervenit, quo circa plane ignarus sum eorum quæ in Republica Litteraria peraguntur. *Acta Lipsiensia* non nisi annatim, vel ad plurimum singulis semestribus huc appellunt; loco quod illa *Basileæ* menstruatim acceperam. Ideo rogavi Dominum MENCKENIUM, ut si quid in illis singulare prodiret, illius me per litteras redderet participem; quod & Te rogo, præsertim cum Dominus MENCKENIUS ad me non scribat nisi rarissime, quando alia causa id postulat. Ante aliquod tempus ipsi misi quædam *Actis* † inserenda, ubi occasionem arripui nonnihil attingendi de iis, quæ ultimo *Actorum* Novembri inseruisti, præcipue vero objiciendi modeste unum & alterum iis, quæ Dominus TSCHIRNHAUS ibidem publicavit, ‡ ubi inter alia modum tradit abscindendi ex curva parabolica portiones in data ratione, quod ego ostendo fieri non posse, quin habeatur quadratura absoluta Hyperbolæ,

* 1693. Octob. p. 496.

† *Supplementum Defectus Geometriæ* Cartesianæ, *circa inventionem locorum &c. Acta Erud.* 1696. Jun. pag. 261. Opp. Tom. I. N°. XXX. pag. 155.

‡ *Nova & singularis Geometriæ promotio circa Dimensionem quantitatum Curvarum per D. T.* Act. Erud. 1691. prov. p. 405. Joh. BERN. Opp. Tom. I. N°. XXVIII pag. 149.

bolæ, & proinde extensio curvæ parabolicæ. Rogavi simul Dominum Tschirnhausium, ut suam demonstrationem publicare haud gravare velit; promisi me ipsi pro lucro gloriam inventionis quadraturæ Hyperbolæ cessurum; Hisce adjeci aliquod curiosum Problema, concesso toto quod currentis anni restat tempore; intra quod si nemo solutionem exhibeat, me meam exhibiturum dixi. 1696 Jun.

Cum nesciam an jam prodierit in *Actis*, vel propemodum proditurum sit, illud libenter hic repetam, cui per otium Te applicare, rogo, haud graveris. *Datis (Fig. 37.) in plano verticali duobus punctis* A *&* B, *assignare viam* AMB, *per quam mobile* M, *a puncto* A *moveri incipiens, & propria gravitate descendens, brevissimo tempore perveniat ad punctum* B. TAB. VII

Miror hoc Problema hactenus nemini in mentem venisse. Respicis quod sit ex eorum numero, ubi ex lineis omnibus quæritur una præstans aliquid in desideratis minimum; cujusmodi solutionem in Exemplo Catenariæ per Seriem investigare instituisti. * Interim quantumvis arduum hoc Problema videatur, illud tamen duplici modo, & quidem absque Serie solvi, ubi egregias proprietates, quæ in alia materia suum usum obtinent, observari......

. . . .

Groningæ 9. Julii 1696.

Amplitudinis Tuæ
ad officia paratissimus
J. Bernoulli.

* Epist. X.

EPIS-

EPISTOLA XXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De actione materiæ gravificæ. De æſtimatione virium a priori. *Diſſertatio Dynamica. De annotationibus* Hugenianis. *Quanti fecerit Calculum differentialem. Problematis Curvæ Trachyſtochronæ ſive Brachyſtochronæ ſolutio.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1696 Jun. NOn mirum eſt, ſi in iis nihil certe conſtitui inter nos poteſt, quæ demonſtratione definiri non poſſunt; quod uſu venit in cauſa gravitatis. Licet tamen in his quoque [ſi tanti videatur] deprehendere, quæ ſententia ſit ſimilior veri. Dominus *Frater* Tuus, in ſuis ad me litteris, ex meo modo explicandi æſtimationem virium per aliquot elaſtra, totam vim ſuam corpori alicui impendentia, conjecerat me credere, gravitatem tali elaſtrorum actione, ictibus repetitis vim in grave transferentium, oriri. Reſpondi me elaſtris tantum in exemplum uti. Optime tamen notas, tali modo oritura eſſe eadem phænomena, quæ in gravibus explicuit Galilæus; & manifeſta ſane res eſt attendenti; nam cum ſpatia, a gravi percurſa, ſint viribus a gravi acquiſitis vel amiſſis proportionalia; neceſſe eſt utique, ut æqualibus ſpatiis æquales vires acquirantur ac perdantur a gravi; perinde ac ſi a talibus elaſtris vis ipſis fuiſſet data vel ademta. An vero reapſe talis cauſa a ſpatiis petenda ſit altioris indaginis res eſt: Quanquam ſano ſenſu id ſemper dici poſſit, etiamſi explicatio per ventum, vel per vim centrifugam adhibeatur. Sane ſi fingeremus grave aſcendens, velut retia aranearum æquabiliter diffuſa perrumpere, explicari poſſet hæc æquabilis virium amiſſio; ſed activum aliquid ſic moderari, ad modum elaſtrorum, non æque facile puto; quod ſi poſſis

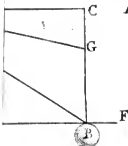


Fig. 30.

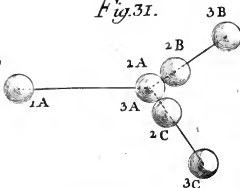


Fig. 31.

.32.



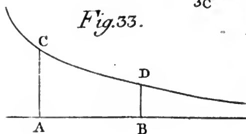


Fig. 33.

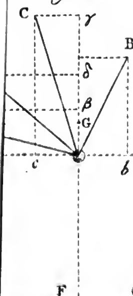


Fig. 34.



Fig. 35.

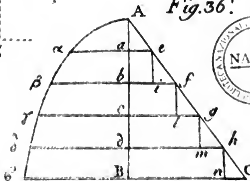


Fig. 36.



ſis invenire modum, qui naturæ conſentaneus videatur, applaudam lubentiſſime. Ais per Te licere mihi non agnoſcere pro vera ſententiam tuam, *ſi velim.* Ego vero rogo, ut Tibi perſuadeas me ab hac arbitraria judicandi ratione eſſe alieniſſimum, & propenſiſſimum eſſe ad audiendam vocem rationis. Verum eſt fieri poſſe, & ſæpe debere, ut materiæ gravificæ particula in corporis poris hæreat, & in iis etiam vim ſuam perdat; non tamen ideo vis illa in totum corpus transferetur, aut ad deſcenſum augendum ſerviet; ſed in partium motibus abſorbebitur. Ais: *cum materia gravifica ſit ſubtiliſſima & omnia ſint plena, procul-dubio unum continuum conſtituere & particulas non ſequi ex intervallo.* Ego vero putarim materiam gravificam, nec ſubtiliſſimam eſſe, nec omnia replere, nec unum continuum conſtituere, ſed tantum eſſe diſſeminatam in alia multo ſubtiliore. 1696 Jun.

Addis: *ſi hoc demus, tamen numerum ictuum ſpatio proportionalem fore*; verum quomodo id conſequatur, non oſtendis; & agnoſces, opinor, ventum in navem agere numero ictuum potius proportionali ad tempus, quam ad ſpatium. Cæterum diſputatio noſtra de hac quæſtione ex eo orta eſt, quod videbatur Tibi, communi explicandi ratione, non poſſe ſatisfieri cuidam objectioni contra virium æſtimationem noſtram: Et ideo factum eſt, ut hactenus neceſſarium putarem hanc ſerram tecum reciprocare. Sed nunc, opinor, agnoſcis alterutro explicandi modo idem prodire. Itaque ex noviſſimis litteris tuis demum, quis nunc ſit Tibi ſcopus intelligo; nec repugno; modo [ut dixi] diſtincte explicari poſſit, qua ratione fiat, quod dicis. Hæc tamen ſcribens incido in verba tua, quæ me adhuc turbant, ais nimirum, *incongruitates ſe ſe prodere ſtatuendo ictus procedere ſecundum tempuſcula*; quænam ſint illæ incongruitates, fateor me non videre; quod ſi adhuc objectionem illam in mente habes, quæ Tibi negotium faceſſerat, optarem ut eam diſtinctius proponas, & velut in forma. Sane ubi nuper reciprocatis cum Domino Papino litteris objectionem ipſius in formam redigi; deſeruit eam ipſe, & aliam novam jam fabricavit, cui nunc ſatisfacio, ſperoque, hac diſputandi forma inter illum & me

1696 Jun. me continuata, controversiam terminatum iri; neque enim alter ab altero se non intelligi amplius quæritur.

Spero & de ictus quantitate me Tibi alias satisfacturum. De PARDIESIO optime judicas: Ejus de motuum regulis Dissertatio non magni momenti est: bene quidem vidit difficultatem de incursu obliquo, sed non resolvit. Mea demonstratio a priori, pro nostra virium æstimatione, nititur utique aliqua suppositione. Nempe: *Actionem quæ facit aliquid uniformiter, tempore simplo, esse duplam actionis facientis idem uniformiter, tempore duplo.* Hanc suppositionem concedere debent CATELANUS, & alii, cum quibus disputaveram, qui falso sibi persuaserant, negligi a me temporis æstimationem, quæ a nemine melius adhibetur, quam a me. Nondum quidem inveni modum a priori hanc propositionem demonstrandi per viam congruentiæ; imo, ne hanc quidem, quod *actio idem faciens, breviori tempore, sit major*; a quo esset incipiendum. Verum hoc admisso, utique eo ipso quod nulla amplius datur resolutio, seu quod nihil medium interponi potest inter A & B, ut B interpositum fuerat inter A & C; aliud dici nequit, quam actiones esse ut celeritates, A erat *facere duplum, tempore simplo;* B *facere duplum, tempore duplo,* & C *facere simplum, tempore simplo*: Itaque actio A est major quam actio B, & quidem ita ut crescat actio, manente effectu & tempore decrescente. Itaque ex eo ipso, quod nullum est principium aliquid ultra determinandi, sequitur actiones esse reciproce ut tempora. Nimirum *ubicunque nulla reperiri potest ratio proportionis compositæ, necesse est simplicem locum habere.* Operæ tamen pretium est, ut Objectio tua, quam alicui occurrere posse optime notas, resolvatur; quo facto, major [credo] lux accendetur, apparebitque discrimen inter potentiam & actionem. Objectio ita habet: A, tempore simplo, idem facit quod B, tempore duplo; Ergo A est duplo velocius quam B. Ergo potentia ipsius A est quadrupla potentiæ ipsius B. Respondeo concedendo totum argumentum, potentiam esse quadruplam, & tamen aio actionem tantum hic esse duplam. Quod Paradoxum ita ostendo: nempe potentia ipsius A quadrupla est [hoc ipsum enim demonstravimus ex hoc ipso nostro,] sed actio est tantum

tantum dupla; quia Actio est in ratione composita potentiæ, quæ exercetur, & temporis in quo exercetur; itaque potentia ipsius A quadrupla, simplo tempore exercita, dat actionem duplam ejus, quam dat potentia ipsius B simpla, exercita tempore duplo; & quadruplam ejus quam dat potentia ipsius C simpla, exercita tempore simplo. Scilicet, in A potentia 4, tempus 1, dat actionem 4. In B potentia 1, tempus 2, dat actionem 2, denique in C potentia 1, tempus 1, dat actionem 1. Vides quam hæc pulchre quadrent, & quam parum distinctæ notiones de potentia, actione & similibus vulgo habeantur. Complures jam anni sunt, quod hæc explicui in Dissertatione conscripta in Itinere Italico, & *Florentiæ* apud amicum relicta, qui editionem in se receperat; sed ego postea in mora fui, dum plura subnata sunt, quæ me adjuncturum scripsi, necdum tamen præstiti, non quod res desint, sed otium ordinandi. Cæterum, ut actionem nunc, composita ratione suorum principiorum, potentiæ & temporis, æstimo; ita eam paulo ante æstimaveram composita ratione eorum, quæ præstat; effectus scilicet extensivi seu materialis, nempe longitudinis [quam κατ' ἐξοχὴν effectum vocare soleo] & effectus intensivi seu formalis. Desideratum enim est, ut præstetur multum & cito. Ambæ autem æstimationes consentiunt inter se, ut vides. . . . . 1696 Jun.

. . . .

Pro *Hugenianis* notationibus marginalibus ago gratias singulares, rogoque ut cæteras quoque omnes communices. Indicant nescio quid morositatis, ne dicam malignitatis, sed quibus eo facilius ignoscendum, quod publice & per litteras æquiora dixit, præsertim de Analysi nostra. Nam in *Actis Eruditorum* 1693, p. 476 [ubi solutionem suam Problematis cujusdam, Tui puto, occasione Constructionis tractoriæ excogitati exhibet] diserte commendat calculi differentialis [quo tunc feliciter usus erat] inventionem, *absque quo* [inquit] *vix est ut ad has subtilitates admitteremur*. Et in suis ad me litteris, biennio abhinc circiter scriptis, Calculum vocat admirabilem [*vôtre merveilleux calcul*]. Verba ipsa Tibi transcribam, ubi litteræ incident in manus: nunc enim se statim non offerunt, & quærere non vacat.

1696 Jun. ' Postremo accedo ad Problema Tuum inveniendæ lineæ, quam vocare, opinor, liceat *Tachistoptotam*, seu celerrimi descensus. Problema est profecto pulcherrimum, & me invitum ac reluctantem, pulchritudine sua, ut pomum Evam, ad se traxit. Est enim ea mihi tentatio gravis & noxia, viribus affectis, & incumbente aliorum mole; ut non facile amplius audeam, quæ intensiorem postulant laborem meditandi; itaque inposterum Problemata a Te deprecor, maloque ab alio, & præsertim a Te doceri solutiones, quam ex me sperari, Tibique debilior videri, quam fieri mihi. Nam sentio tali labore præsertim calculi [qui levis satis tibi videri possit] non parum atteri vires meas, & phlogoses illas importunas excitari. Accipe interim quid tentarim, non per Seriem quidem, hæc enim tantum subsidialis est, si res ad triarios redierit; sed ea ratione quæ ad æquationem differentialem ducat, quam & in istis ex visceribus Problematis habere solemus. Aio igitur eam esse
TAB. VII. naturam lineæ Tachystoptotæ AC (*Fig.* 38.) [in qua grave celerrime a puncto A ad punctum C descendit,] ut positis abcissarum, seu altitudinum, incrementis constantibus, sint elementa ordinatarum, seu latitudinum BC, in ratione composita ex directa Elementorum curvæ, & reciproca elementorum temporis verticalium. *Verticalia* voco *elementa* temporum, quibus grave descenderet in ipsa verticali AB. Unde sequitur elementa curvæ itidem esse in ratione composita ex elementorum latitudinis directa simplice & ipsarum altitudinum reciproca subduplicata; itaque si AB sit x, & BC sit y, & assumatur constans quædam b, res reducitur ad quadraturas, & erit $dy : dx = \sqrt{x} : \sqrt{(b - x)}$. Sit $dy : dx = v : b = \sqrt{(2bx - xx)} : 2b - x$. Dico v, ipsis dy proportionales, esse ad meam Quadratricem, qua olim pro Tetragonismo meo Arithmetico sum usus; atque adeo curvam Tachystoptotam esse Quadratricem meæ Quadratricis, & proinde a circulari dimensio-
TAB. VII. ne pendere. Nam si (*Fig.* 39.) centro G, radio AG, seu b, describatur semicirculus AHM, & angulo AGH bisecto, ducta GT occurrat tangenti verticis in T, & sit AB, x, adeoque sit BH, $\sqrt{(2bx - xx)}$ tunc AT erit v, seu erit ad b, sive AG, ut BH seu $\sqrt{(2bx - xx)}$ ad BM seu $2b - x$. Jam in BH [si opus producta]

producta] sumatur BN æqualis AT, erit $\int vdx$, seu area ABNA æqualis duplo segmento circulari, cujus arcus AH. Itaque si area ABNA, vel duplum hoc segmentum applicetur ad rectam b [ut fiat $\int vdx : b$] prodibit y, seu BC, ordinata lineæ quæsitæ AC. Unde sequitur Tachystoptotam AC esse lineam segmentorum [quæ scilicet ex eodem puncto, nempe vertice, abscindantur] seu lineam, cujus ordinatæ sint segmentis circularibus proportionales, quorum tetragonismo supposito facile curva per duo puncta data describi potest.

1696 Jun.

Adjiciam Theorema, ut puto, non inelegans; facile quidem, si quis animum advertat, Tibi tamen fortasse non displiciturum, quia Tui Problematis occasione mihi incidit. Nempe si (*Fig.* 40.) triangulum rectangulum Pythagoricum [ut quidam vocant] seu cujus latera sunt, 3, 4, 5; ita statuatur, ut perpendiculariter erectum sit latus minus; grave descendens per AB verticalem, & deinde concepto impetu pergens per BC horizontalem, eodem tempore perveniet ab A ad C, per latera AB, BC, quo directe per ipsam hypothenusam AC. In praxi autem, oportet angulum B nonnihil rotundari in portiunculam curvæ, cujus tangentes sint AB, BC, ut grave sine repercussione, aut impedimento, transeat ex AB in BC; proderit etiam angulum ABC esse tantillum obtusum. Si AB minor sit tribus quadrantibus ipsius BC, citius absolvetur iter per latera, quam per hypothenusam; sin major sit, directum iter præstat. Et multa alia ejus generis constitui possunt, quibus immorari non vacat. TAB. VII.

Et jam finis litteris satis prolixis est imponendus; quærere tamen adhuc lubet, nihilne ex *Gallia* habeas a Dno. Hospitalio, aliisque amicis? Quæ apud vos, vicinosque *Batavos*, novitates Physico-Mathematicæ? superioribus jam scriptis, litteras a Dno. Cluverio accepi cum inclusis ad Dominum *Fratrem* Tuum. Defendit semper quæ dixerat, contra Quadraturam Parabolæ Archimedis, & nostra quoque. Respondebo; saltem nullam dari posse constructionem *Archimedea* meliorem. Puto

 habere

1696 Jun. habere eum meditationes profundas nec fpernendas; fed non opus erat, ut iis uteretur ad bene conftituta evertenda. Vale.

Dabam *Hanoveræ*... Junii *1696*.

Deditiffimus
Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

P. S. . . . . *Acta Eruditorum* etiam ad me fatis tarde perveniunt, negligentia Bibliopolæ, qui curare in fe recipit; ut nefciam an Tuum Problema fit in *Actis*, cum monitis de Domini TSCHIRNHAUSII fectione Curvæ parabolicæ. Video eum fæpe paulo promtius pronuntiare.

EPISTOLA XXIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Refponfio ad præcedentem.

De Actione materiæ gravificæ. De æftimatione virium a priori. *De Problemate brachyftochronæ. Cyclois eft linea fegmentorum. De fynchrona. De Trajectoriis orthogonalibus. De* HUGENII *Mftis. De* CLUVERIO. WALLISII *Operum Editio.*

Vir Ampliffime atque Celeberrime! Fautor Honoratiffime!

1696 Jul. CUm nunc de mente mea Tibi conftet, & quis mihi fcopus fit in explicatione actionis materiæ gravificæ intelligas, ei diutius non immorabor; liceat tamen paucis perftringere ea quæ in poftremis tuis hac fuper re monuifti. Promittis Te meo explicandi modo lubentiffime applaufurum, fi poffim invenire viam naturæ confentaneam, qua activum aliquid fic moderari liceat ad modum Elaftrorum; quemadmodum fingere poffemus retia aranearum æqua-

bilitæ

biliter diffusa, quibus perrumpendis grave ascendens decrementa 1696 Jul.
pateretur virium, spatiis proportionalia. Sane si mihi concedis posse saltem sana ratione statui particulam gravificam totam suam vim transferre in grave, jam habemus quod petis; particulæ enim gravificæ; si non continuum faciunt, saltem sunt æquabiliter dispersæ, & sic quod in retibus aranearum fingis, passivum, hic revera ponitur activum; quippe cum quælibet particula totam suam vim transferat [per hypothesim, quia id fieri posse jam in prioribus ostendi]: & cum numerus sit spatio proportionalis, patet utique virium accretionem fore æquabilem. Mentem meam clarius explicare non possum quam per aliquod simile. Pone navigium ferens hominem in puppi, quod primum sit quiescens in aqua stagnante nullius resistentiæ, ipsum autem sit solidissimum, ita ut ejus partes tremoris non sint capaces, sed vim impressam toti navigio impertiant, abstracte etiam a materia ambiente. Nunc homo insidens percutiat malleo puppim secundum directionem horizontalem, quo totum navigium moveri incipiat; repetat ictus æquales non singulis momentis, sed singulis spatiolis per quæ navigium progreditur. Dico navigium eodem modo accelerari, quo grave descendens; recipit enim singulis spatiolis non solum ictus æquales [siquidem distinguis inter ictum & vim] sed etiam vires æquales, eo quod mallei vis, quæ semper eadem supponitur tota ad navigium promovendum impenditur, ipsi enim nil remanet nisi quatenus pars est navigii; sic etiam quia materia gravifica est infinite velox, poterit unica ejus particula considerari quasi corpori gravi semper insideret, suosque inflictus singulis spatiolis reiteraret, loco quod singulis spatiolis nova advenit, unicumque faciat ictum. Ais me non ostendere quomodo consequatur numerum spatio proportionalem fore; sed puto id satis ostensum esse ex eo ipso, quod concedatur particulas gravificas æquabiliter disseminatas esse per totam altitudinem descensus. Nam si numerus particularum percutientium sit spatio proportionalis, ergo etiam numerus ictuum eidem erit proportionalis; quia tot sunt ictus, quot sunt particulæ quæ faciunt ictus. Haud dubie agnosco ventum in navem agere numero ictuum proportionali ad tempus [supposito ventum incomparabiliter

1696 Jul. ter rapidiorem esse navi] sed hoc minime evertit opinionem meam, imo maxime illam confirmat; est enim summa differentia inter utrumque agendi modum; & hinc non miror, quod cum nullam interesse credideris meæ opinioni hucusque assentiri nolueris. Navis propellitur a particulis venti a tergo continue subsequentibus, & motum habentibus progressivum secundum directiones navis; hinc sive quiescat, sive moveatur, semper novas & novas recipit impressiones, & quidem pro ratione venti allabentis, id est pro ratione temporis. Sed grave descendens non impellitur a materia quadam instar venti, quæ a circumferentia versus centrum terræ fiat, sed a particulis quidem rapidissimis, nullum tamen motum TAB. VII. progressivum versus Terræ centrum habentibus; hinc nisi grave moveatur, nullas novas recipit impulsiones. Si globuli (*Fig.* 41.) in æquali distantia se se subsequentes 1, 2, 3, 4 &c. motu parallelo impingant in corpus A, erit numerus ictuum in ratione temporis. Sed si particulæ æquidistantes *a*, *b*, *c*, *d*, &c. moveantur rapidissime, veluti in vorticulis α, β, γ, δ, &c. primaque particula *a*, propellat corpus in vorticulum β, & particula *b*, in vorticulum γ, &c. tunc numerus ictuum erit in ratione spatii a Corpore B percursi. Prior agendi modus est venti, posterior est materiæ gravificæ, vel saltem analogus. Vides satis ex hac explicatione, quænam sint illæ incongruitates, quæ se se produnt; statuendo ictus procedere secundum tempuscula; præter illam, quod in hac hypothesi dicendum sit, corpus jam in motu majorem virium gradum recipere a particula gravifica ut-ut incomparabiliter celeriori, cujus sane respectu corpus quiescere censendum, quam cum quiescit; Hoc si non sit incongruitas, saltem non est veritas adeo clara, quam adversarius minime negare possit.

Optime distinguis inter Potentiam & Actionem; adeoque argumentum Tuum a priori ostendit saltem actionem ipsius A esse quadruplam actionis ipsius C: Volebas autem id demonstrare de potentia. Interim res plana fiet, dicendo actiones hic esse ut potentias quia æquali tempore peraguntur. Bene se habet quod agnoscas nondum potuisse demonstrari actionem A duplam esse actionis B: principium enim illud; *Ubicunque nulla reperiri potest ratio proportionis*

tionis compositæ necesse est simplicem locum habere; obscurum mihi videtur, nec satis hic probat quod probandum est; propositionem vero alteram, quod *actio idem faciens breviori tempore sit major*, a qua incipiendum dicis, ego pro axiomate assumerem. 1696 Jul.

Commercium meum parum sibi proficuum credet, opinor Dominus NIEUWENTIIT, multoque minus indigebit mea scrupulorum suorum enodatione, sive quod me huic operi non parem putet, sive quod malit recurrere ad Te, tanquam ad fontem ex quo illos melius diluet; ultra tres septimanas commoratus fui *Amstelodami*, quod ipse non poterat ignorare, ut amicus ejus MACKRELIUS mihi retulit; nec tamen eum videndi honorem habui: Interim non e re puto, nec mihi author eris, ut operam meam obtrudam ipsi nolenti forsan. En reliquas HUGENII notationes marginales, quas in memoratis Tomis reperi; cœteros nondum habeo.

Mitto hic solutionem meam Problematis mei de invenienda linea celerrimi descensus, illis verbis conscriptam, quibus illam ante acceptas Tuas conceperam, ut si digna videatur simul cum Tua *Actis* inseri cures. Dederam lineæ nomen *Brachystochronæ*, ob rationem quam ibi videbis; sed si magis arrideat nomen *Tachystoptotæ*, permitto ut hoc in illius locum ubicunque substituatur. Valdopere gavisus sum, cum intelligerem adeo Tibi placuisse hoc Problema, ut Te invitum & reluctantem, pulchritudine sua, ut ais, ut pomum Evam ad se traheret, si modo ego non pro serpente illo maliguo habear, qui hoc pomum obtulit; sed gaudio meo multum accessit cum viderim Tibi jam repertam esse solutionem, a qua tamen omnes quibus illud proponebatur, longe absunt, testibus litteris VARIGNONII [*De tous ceux* (inquit) *à qui j'ai annoncé vôtre Problème, je ne sai encore personne qui l'ait resolu; je l'ai tenté, mais la difficulté m'a tout aussi-tot rebuté.*] Etiam ipsi HOSPITALIO minime displicuit Problema [*ce Problème*, mihi scribit, *me paroit des plus curieux & des plus jolis que l'on ait encore proposé, & je serois bien aise de m'y appliquer; mais pour cela il seroit nécessaire que vous me l'envoyassiez réduit à la Mathématique pure; car la Physique m'embarasse* &c.] Interim idem Tibi accidit, quod illis qui detegunt thesaurum, cujus tamen pre-

1696 Jul. tium nondum æſtimare poſſunt, quod etiamnum incluſus eſt ciſtis & capſis, quibus vero reſeratis, eum longe pretioſiorem deprehendunt quam ſperabant. Revera enim & Tu reperiſti ſolutionem Problematis, in quam autem, quantum in ſe contineat nondum introſpexiſti. Perſuaſus ſum totus, quod longe majorem capies voluptatem, ubi noveris curvam quæſitam eſſe Cycloïdem, quam cum illam inveniſſes anonymam: illa, inquam, eſt Cycloïs, de qua in ſimili materia HUGENIUS aliam inſignem proprietatem oſtendit, iſochroniſmum ſcilicet oſcillationum; quid, quæſo inexpectatius evenire potuiſſet? Ob hanc rationem puto ipſi nomen Brachyſtochronæ non male convenire, & ſic Tua ope novæ acceſſerunt proprietates Cycloïdis, cum oſtendas illam eſſe *Lineam ſegmentorum*, & Quadratricem tuæ Quadratricis. Sciendi cupidus ſum, qua via perveneris ad ſolutionem; prævideo Te alii alicui inſtitiſſe, quæ ab utraque mearum duarum diverſa erit. Alter meus ſolvendi modus quidem eſt indirectus, ſed quem directo præfero; quod una opera me deduxit ad ſolutionem Problematis Optici elegantiſſimi de curvatura radii in medio variante, ubi mirum conſenſum detexi inter duas iſtas curvas. Tuam vero ſententiam exopto, quid de utroque ſolvendi modo Tibi videatur; Conſtructionem etiam dedi curvæ, quam voco *ſynchronam*, quam ex occaſione prioris Problematis inveni; oſtendo ibi quod ſit curva, quæ omnibus Cycloïdibus ab eodem initio deſcriptis normaliter occurrit. Eſt ſane mirabilis curva; ejus enim conſtructionem, poſita extenſione arcus circularis, ex contemplatione præcedentis materiæ facile inveni: ſi vero illam in abſtracto conſideratam quærere velim, nequidem ad æquationem differentialem pervenire poſſum; In tantum ut, ſi hoc Problema ſeorſim, vel alio tempore, propoſuiſſem; invenire ſcilicet curvam omnibus Cycloïdibus perpendicularem; vix quiſquam ſolutionem dare potuiſſet; dum ego contra me eam ſolus poſſidere jactare potuiſſem: ſed magis publicæ utilitati, quam ſuæ gloriæ litandum cenſeo. Memini me Tibi olim † generaliter propoſuiſſe invenire curvam, quæ aliis poſitione datis occurrat normaliter, quod

† Epiſt. V.

quod ego in pluribus folveram. Modum quidem Tuum generalem tradebas *; fed fi refumere placet, videbis illum plerumque locum non habere, quando curvæ pofitione datæ funt tranfcendentes, ut in hoc ipfo exemplo apparebit; alterius Exempli, quod in meo fchediafmate propono, de Logarithmicis per curvam normaliter fecandis, nondum quidem conftructionem, nec æquationem differentialem primi gradus inveni, fed tamen feriem quamdam fimpliciffimam pro illa exhibere poffum. Cœterum egregium eft, quod obfervafti de Triangulo rectangulo *Pythagorico*. Ego fane etiam multa non contemnenda detexi ex occafione mei Problematis; inter alia infignem quamdam proprietatem Cycloïdis, quæ hæc eft. Super recta CD (*Fig.* 42.) defcriptæ femicycloïdes eædem AD, *ad*, *ad*, &c omnes normaliter fecabuntur ab omnibus femicycloïdibus iifdem C*b*, *cb*, *cb*, &c. fuper parallela A*b*, defcriptis: Unde nefcio quid peculiare accidit Cycloïdi; ejus enim evoluta eft Cycloïs; ejus cauftica eft Cycloïs; nunc ejus normalis perpetua eft itidem Cycloïs, & quidem eadem. Hæc vero omnia tria etiam conveniunt Logarithmicæ fpirali, quam *Frater* meus vocat Spiram mirabilem, in qua ego primus inveni, quod pro evoluta habeat fpiralem eamdem. En igitur mirabilem affinitatem inter duas iftas curvas. Si quis profundius perfcrutari vellet, quæ dico in fchediafmate meo, amplam fatis materiam pro hoc haberet. Curva noftra Brachyftochrona infinitos habet cafus particulares; ut fi peteretur ex infinitis arcubus circularibus, qui per duo puncta data duci poffunt, ille qui refpectu reliquorum effet celerrimi defcenfus, ideft, fi eodem momento a puncto dato demitterentur gravia per fingulos arcus, quinam ille effet, per quem grave citiffime ad alterum punctum datum veniret: vel, fi loco arcuum circularium fubftituerentur arcus aliarum curvarum determinatarum; Vel etiam, fi fuper linea recta duo data puncta conjungente, erigantur infinita triangula ifofcelia, vel triangula rectangula, vel aliæ figuræ rectilineares, femper poffet quæri cafus citiffimi defcenfus: adeo ut tot Problemata particularia formari poffent quot liberet, & fic noftrum

1696 Jul.

TAB. VII.

 Proble-

* Epift. VI.

1696 Jul. Problema generale consistere dici potest in inventione minimi infinitorum minimorum. Sed transeo ad nova quæ sciscitaris.

Frater meus junior, nulla reperta statione *Parisiis*, reversus est in Patriam; Dominus HOSPITALIUS illum oneravit 3, vel 4. Exemplaribus sui Tractatus novi * de principiis calculi differentialis, quorum unum Tibi destinatur. . . . . Hactenus quidem nihil novi incidit de differentialibus ex analogia differentiarum & potentiarum, quia de eo de novo cogitare nondum vacavit: supersunt tamen nonnulla quæ monebo, quando disputatio nostra fuerit finita.

Novitates Physico-Mathematicæ quæ ex *Batavis* ad me perveniunt, sunt oppido steriles. Audio HUGENIUM, præter VOLDERUM, constituisse Curatorem MStorum suorum Dominum FULLENIUM Matheseos Prof. *Franequeranum*, destinatis pro labore utrique mille florenis Holland. de bonis suis.

Serione loquitur, an jocatur CLUVERIUS? Quidquid sit, non audiendus est; habeat meditationes quantumvis profundas, sane magno conatu magnas nugas dicit *Act.* 1687. pag. 586, quæ nil conducunt, nisi ut matheseos imperitis contemtum inspirent contra scientias Mathematicas. Vereor ne sit ex eorum numero, qui vellent aliquid videri, sed cum nil habeant quod producant, in cortice misere hærent, nec tamen desinunt nucleum arrodere. Ego sic judico, ex iis quæ hucusque ab ipso vidi: quam enim dedit in *Actis* anni 1686 seriem quadraturæ Circuli non valet examinare, qua lege progrediatur, & an sit justa; & si sit, nil novi; nil rari dedit; sed fallor, dedit utique aliquid insoliti, quadravit enim Circulum saltem per seriem; Ergo per seriem, *ex data linea construxit Mundum Divinæ menti analogum.* O Lepidum Creatorem! sed joco id dixerim, animus non est offendere quemquam, forsan est Tuus amicus, forsan est Vir egregius; licet id nondum innotescat per scripta sua; nihil tamen laudi ejus detraham, videtur ut dicam quod res est, easdem sibi quæ NIEUWENTITIO minutias obstaculo esse, quominus nostra amplecti velit. Interim ex ejus ratio-

* *Analyse des infiniment petits.* Paris 1696. 4°.

ratiocinio quo evertere conatur quadraturam Parabolæ, liquido *1696*
fluit, nec ipsum triangulum rectilineum habere rationem subduplam Jul.
ad rectangulum circumscriptum. Quis sanæ mentis Geometra, præter CLUVERIUM, id negabit? . . . .
. . . . Vale & ama Ampl. Tuæ

Groningæ 21. Julii 1696.

Cultorem perpetuum

J. BERNOULLI.

P. S. Nostine jam, [quod aliquoties significare volui] quod WALLISIUS Opera sua universa duobus voluminibus contenta in folio cum argumentis de novo in lucem emiserit? multa quidem habet, quæ Te concernunt; sed Calculum differentialem non ita laudat, uti decet. Suos *Anglos*, pro more suo solito, mirum quantum extollit. Præ illis nil fere est quod alii fecerunt. . . . .

. . . .

EPISTOLA XXX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Problematis Brachystochronæ termino prorogando. De ejusdem solutione directa celanda. Solutionis Leibnitianæ fundamentum. De schediasmate Jac. BERNOULLI. *De* NIEUWENTIITIO. *De Tractione gravitatis & æstimatione virium* a priori. *Varia.*

Vir Celeberrime, Fautor & Amice Honoratissime!

1696 Jul. JUcundum mihi fuit videre consensum nostrarum Problematis a Te propositi solutionum, cum ejusdem lineæ constructiones, licet diversas, dederimus. Ego contentus fui reperisse, quomodo linea per tetragonismum circuli construi possit, non immoratus Problemati, egregio licet, quod vix, ut aggrederer, a tempore meo impetrare poteram. Tu longius progressus Cycloïdem ipsam esse pulchre reperisti. Quod editionem attinet, consuluerim adhuc nonnihil expectari, ut appareat quid alii quoque præstent, inprimis Dominus *Frater* tuus, imo & Dominus. De TSCHIRNHAUS, præsertim cum terminum, ni fallor, assignaveris. Cum Dominus *Marchio* HOSPITALIUS [a morbo gravi restitutus] etiam ad me nuper alia occasione scripserit, se se nunc a meditationibus ejusmodi abstinere debere, putem ipsi Solutionem posse communicari, si Tibi ita videtur, & posse inseri Problematis propositionem in *Diarium Eruditorum Parisinum*, ut Viri Docti excitentur. Idem etiam in *Italia* faciendum puto. Spero Tua Mensi *Junio* * inserta esse, etsi nec verbulo ad me attigerit Dnus. MENCKENIUS. Necdum ego *Junium* accepi, negligentia Librarii nostri, qui credo nundinas *Brunswicenses* mox instantes expectat. Interim monui Dnum. MENCKENIUM, ut si nondum factum, mature Tua edi curet.

Cæterum

* *Actorum Lipsiens.*

Cæterum, ubi folutionis comprobationem edere vel communicare placebit, fuaferim viam illam directam, quam vocas, feu pofteriorem, non edi; * cum prior fufficiat ad demonftrationem, & pofterior, præter neceffitatem, aliis ante tempus viam aperiat. Præftat enim, ut puto, nonnihil adhuc fufpenfos alios teneri, ut vel ipfi inveniant aliquid fortaffe a noftris diverfum, quod augebit fcientiam; vel agnofcant, non effe hæc tam facilia, ut quidem putant, eoque diligentius has methodos aliquando meditentur. Methodus mea nonnihil a Tua diverfa eft, fed tamen eodem duxit, quam ut æquum eft, & ut Tuo candori pari ingenuitate refpondeam, fic paucis habeto. 1696 Jul.

Concipiens fcilicet pro curva Polygonum infinitangulum; video id fore omnium poffibilium facillimi defcenfus, fi fumtis in eo (*Fig.* 43.) tribus punctis vel angulis quibufcunque A, B, C, fit punctum B tale, ut omnium punctorum in recta DE horizontali, hoc unum det viam ab A ad C facillimam. Res ergo redit ad folutionem Problematis facilis: Datis duobus punctis A, & C, & recta horizontali inter ea cadente DE, invenire in hac recta punctum B tale, ut via ABC fit facillima. Ubi prodeunt, quæ in noviffimis Litteris notavi, circa elementa abfciffarum, ordinatarum, & arcuum; fi fcilicet infinite parvum inter puncta A, B, C, ponatur intervallum. Nec opus eft ut aliquid ultra apud Te addam, & tranfcribere calculum non vacat, nimis diftracto. TAB.VII.

Mitto ecce quæ Dominus *Frater* tuus menfi *Julio* inferi curavit circa Problema *Beaunianum* extenfum †, ut vocat, tranfmiffa mihi a Dno. MENCKENIO, quia me tangunt. . . . . Vult in quibufdam a me diffentire, quorum aliqua non fatis intelligo, tum quia figuræ abfunt in his quæ mifit Dnus. MENCKENIUS, tum etiam quia nondum poffum rem confiderare & prioribus conferre. Ut ego rem capio de punctis æquidiftanter affumtibilibus non videtur effe difficultas. Quod deviationem Navis attinet, fateor,

* *Prodiit tantum* A°. 1718, *in* Act. Erud. Febr. pag. 86, & Mem. de l'Acad. pag. 136. *Vide etiam* Opp. Tom. II. N°. CIII. pag. 267.

† Jac. B. *Problema* Beaunianum *universalius conceptum &c. Acta Erud.* 1696. Jul. pag. 332. *vel* Jac. BERNOULLI Opp. N°. 72. pag. 731.

1696 Jul. teor, si circumstantias practicas negligamus, & rem rudius concipiamus, posse dici eamdem esse deviationem, quocunque vento; quanquam rem paulo accuratius adhuc examinare aliquando velim, sed majore otio. Dominus *Frater* Tuus proposuerat æquationem differentialem solvendam; eam redire ad aliam, quam non difficulter solvimus, notavi; & id nunc falsus dat hujus ipsius solutionem præter necessitatem, cum mihi & Tibi quoque non possit esse ignota, & Domino *Marchioni* olim a me fuerit perscripta. . . . .

Mitto & quæ Dominus NIEUWENTIIT petit *Actis* inseri circa Problema *Beaunianum* a Te solutum, quibus Tibi respondet. Mihi videtur non esse tanti quæ dicit, cum Problema hoc sit jam satis elaboratum, ut aliquid ultra addendum non videatur; & scripsi Dno. MENCKENIO, hortandum potius Dnum. NIEUWENTIIT, ut aliquid novum attingat, in quo suas vires experiri possit; præsertim cum Methodum, nescio quam *Barrovianam*, vel suam jactet, cujus utile est ut meliora det specimina. Misi tamen Tibi, ut cum judicio Tuo, si placet, remittas. Mea mens non fuit ut Tu ad eum scriberes, sed potius ut ille ad Te.

Gratias ago pro reliquis excerptis *Hugenianis*. Videtur interdum paulo rigidius judicare: Exempli gratia, cum de WEIGELIO, Viro docto & bene animato, contemtim adeo loquitur, Matheseos imperitum dicere iniquum est, etsi non satis peritus sit Artis analyticæ profundioris. Cum reliquos Tomos obtinebis, itidem excerpta rogabo.

Quod descensum gravium attinet, nondum agnoscere potui, quomodo fieri queat, ut materiæ gravificæ partes totam vim suam in grave transferant. Si homo malleo percutiat puppim, singulis æqualibus spatii intervallis, non tamen tota vis mallei potest in navem transferri. Et difficulter elici potest, ut quovis spatii intervallo fiat ictus per quem æqualis vis navi accedat. Posita tamen tali hypothesi omnia pulchre procedunt. Hoc dico, ut Tibi occasionem dem perficiendi cogitata, præsertim cum mihi applicatio ad gravitatem difficilis videatur. Facile efficitur amissio virium æquabilis secundum spatium, acquisitio non item.

Quod

Quod attinet a me assumta, fateor propositionem illam, quod *Actio faciens idem, brevi tempore, sit major*; posse assumi ut Axioma; sed scito apud me omnis Axiomatis adhibendi desiderari demonstrationem; alioqui imperfectam esse scientiam. Et qui hoc Axioma demonstrabit, simul credo & ad illud alterum, cujus desideratur demonstratio, viam aperiet. Minime tamen improbo, si quis talia sine demonstratione assumat. Cæterum sunt [opinor] quædam, quæ sine illo principio altero non demonstrabuntur. Obscurum non puto, si recte intelligatur. Nobis tamen suffecerit assumtum a me pro æstimanda actione adeoque & potentia, donec ejus quoque occurrat rigorosa quædam demonstratio. Semper distinxi actionem a potentia, sed quomodo inferatur ab una ad aliam in novissimis exposui, idque putavi Tibi placiturum. 1696 Jul.

Brachystochrona appellatio magis mihi placet pro generali significatione; *Tachystoptota* vero nomen posset speciali accommodari, cum agitur de gravis descensu, seu casu. Perpulchra mihi videntur, quæ habes de linea radii in medio continue variante, & de linea alias infinitas normaliter secante; quod Problema excoli meretur.

. . . .

Wallisiana opera vidi, & quæ in illis *Newtoniana*, in quibus sperabam reperire aliquid amplius pro Methodo tangentium inversa; interim virum esse egregium fatendum est. Wallisius antiquum obtinet cum multis aliis *Anglis*, ut de rebus aliorum loquatur contemtius. *David* Gregorius, in libro quodam Optico * novissimo, secundum consilium meum in *Actis* † datum, pro sectionibus conicis substituit circulos osculantes; videbo aliquando, ubi ipsum Librum videro, an sit professus per quem profecerit.

A Domino Fullenio Professore Matheseos *Franequerano*, *Hugenianorum* Manuscriptorum curatore, non memini aliquid me videre. Puto neminem nunc esse in *Batavis*, post Hugenii obi-

Tom. I. A a tum,

* Catoptricæ & Dioptricæ sphæricæ Elementa Oxon. 1675. 8°.
† 1686. Jun. pag. 291.

1696 Jul. tum, [HUDDENIO demto, sed quem aliæ jam cogitationes tenent,] qui Tibi non cogatur submittere fasces. . . . .

Dominus *Frater* Tuus misit mihi quamdam suam disputationem *De seriebus infinitis summandis*; † ubi tamen nihil notavi, quod novum mihi videatur. Item quasdam suas Notas in *Geometriam* CARTESII. * Item quoddam scriptum Domini HOLLANDERI §. Hæc omnia Tibi visa puto. Misit mihi etiam pauculas quasdam Analyses suas datorum in *Actis*, quæ possint aliquando servire additionibus, pro ea quam molior *scientia infiniti*. Sed a Te plura ejus generis spero. Vale, & has scientias præclaris ingenii Tui fœtibus ornare perge. Ita plurimum voluptatis capiet.

Hanoveræ 31. Jul. st. v. 1696.

Tuus totus

LEIBNITIUS

† Jac. BERNOULLI Opp. N°. XXXV. pag. 375. N°. LIV. pag. 517. N°. LXXIV. pag. 745.
* Jac. BERNOULLI Op. N°. LXVII. pag. 667.
§ Tob. HOLLANDERI *amalthæum astronomicum*. Bas. 1699. 4°.

EPIS-

EPISTOLA XXXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Problemate Brachyſtochronæ. De NIEUWENTIITIO. *De actione gravitatis & æſtimatione virium* a priori. *Methodi fluxionum & Calculi differentialis identitas. De* FULLENIO. *De* HOLLANDERI *amalthæo aſtronomico.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

IN eo eram, ut æſtivis hiſce feriis ad Te exſpatiando ipſe harum latorem agerem, quo viva converſatione tua jam a longo tempore mihi deſiderata ad ſatietatem frui potuiſſem; ſed iter grandiuſculum, œconomia nondum conſtituta, & ſanitas nondum reſtituta unici mei Filioli per aliquot jam menſes periculoſe ægrotantis, a propoſito me abduxerunt & in aliam occaſionem id differre me fecerunt. 1696 Auguſt.

Cum Tibi tranſmitterem ſolutionem meam Problematis a me propoſiti, utique mens mea non fuit, ut illam ſtatim publicares, ſed expreſſe Te rogavi, ut quondam illam edas cum Tua; volui tamen in tempore Tibi mittere, ut ſi forte opus fuerit, teſtari poſſis, me non eum in finem propoſuiſſe Problema, ut aliorum Solutiones, ſi quæ apparituræ ſint, mihi ſub velata ſpecie arrogare poſſem. Optime ergo facis, ſi exſpectas terminum aſſignatum, nimirum Anni hujus finem. Non puto Dominum TSCHIRNHAUSIUM hic quicquam præſtiturum, cum nequidem in Catenaria aliquid præſtiterit; quia forſan ſua applicatione hæc non digna cenſet. . . . . Communicabo Domino *Marchioni* HOSPITALIO ſolutionem ſi illam petierit; Non diſplicet Problematis propoſitionem inſeri poſſe in *Diarium Pariſinum* & *Ita-*

1696 Auguſt. *licum*: Oportet autem ut Tute hoc cures; etenim cum *Italia* nihil mihi commercii eſt, Auctor vero *Diarii Pariſini* adeo noſtra vilipendit, [quod ſæpius expertus ſum] ut forſan terminus prius elaberetur, quam Problema lucem videret. Quod Dnus. MENCKENIUS nec ad Te nec ad me verbulo attigerit, dubito an menſi *Junio* mea inſerta ſint, licet illum iteratis vicibus inſtanter rogaverim, ne de brevitate termini pro ſolutione Problematis conceſſi conqueri liceat. Quod ſi finem hujus temporis expectaveris, non video quid impediat quominus altera mea ſolvendi via, quam directam voco, ſimul cum priori edatur; tunc enim aliis non amplius ante tempus viam aperiet, ſed bene lucem accendet pro aliis hujuſmodi inquiſitionibus inſtituendis, quibus ***Maximarum*** & ***Minimarum*** methodus mirifice extendi poteſt; ut ipſe agnoſces, ſi illam paulo penitius contemplari lubeat. Adde quod jam in propoſitione Problematis innuerim duobus diverſis modis me ad eamdem ſolutionem perveniſſe. Tuus ſolvendi modus nihil fere diverſus eſt a meo priori, concipiendo enim viam facillimam a puncto ad punctum per punctum quæſitum, jam involvis Problema *Fermatianum*, illudque de novo calculas, quod a FERMATIO, aliiſque, & a Te ipſo *Act.* 1682. p. 186. jam calculatum habemus, atque quod ego ſuppoſui.

Dicis Te mihi mittere, quæ *Frater* meus menſi *Julio* inſeri curavit, ſed non miſiſti; haud dubie Schedam Litteris includere oblitus es; rogo ut illa mittas cum proxime tuis futuris. Quam propoſuerat æquationem differentialem ſolvendam plane non æſtimo; quid enim facilius eſt quam infinitas hujuſmodi æquationes excogitare, quas ille qui illas propoſuit ſemper nullo labore ſolvet, eo quod ipſe illas per ſyntheſim ita formaverit, loco quod alii forſan per totam vitam fruſtra inſudarent. Non ſecus ac quivis in Algebra Tyro non difficulter æquationem, vel viginti dimenſionum, componere, iterumque ſolvere poteſt, quam tamen verſatiſſimus Algebriſta nequidem aggredi auderet.

En remitto ſchediaſma Dni. NIEUWENTITII, gratias ago pro communicatione; meum judicium ſcripſi ad marginem; ut ſi forte Dnus MENCKENIUS hoc ſchediaſma *Actis* inſerere velit, ſimul

ſimul reſponſionem quaſi ſuo nomine adjicere poſſit. Miror qui 1696
fieri poſſit, ut Dnus. NIEUWENTIIT in re adeo levicula hærere Auguſt.
poſſit; concedit bonitatem Conſtructionis meæ, quam tamen in ſuis *Conſiderationibus* pag. 41. rite examinatam ad abſurdum deducere diſerte dicit. Sed omnis ipſius objectio in hoc conſiſtit, quod putet adhibendum eſſe $r\,dz = +\,z\,dy$, non autem $rdz = -\,zdy$; interim dormitans iſte HOMERUS confundendo dz affirmativum cum dz negativo; non conſideravit quod exiſtente dz ab una parte affirmativo, & ab altera negativo, $r\,dz = +\,z\,dy$, ſit idem quod $r\,dz = -\,z\,dy$. Cæterum magnam habet farraginem ſolutionum Problematis *Beauniani*, quarum operoſus calculus & tot litterarum confuſio non permiſerunt, ut illas examinarem. Quid tandem hæc omnia contra me, qui volui probitatem conſtructionis meæ unice defendere? Hoc autem feci & ille factum agnoſcit: ergo nil amplius rei mihi eſt cum illo. Si quid ſcrupuli invenit in Calculo differentiali, id jam Te illius Auctorem concernit; Defero ego palæſtram.

Potitus ſum tandem reliquis *Actorum* Tomis, ſed marginalia *Hugeniana* exſcribere nondum vacavit, ea Tibi prima ſcribendi occaſione tranſmittam.

Cum nihil dicas de modo meo diſtinguendi inter actionem venti & illam materiæ gravificæ, puto ex ſilentio Te conſentire, quod numerus ictuum ſit ſpatio proportionalis. Quod de homine puppim malleo percutiente dixeram, mihi negare non debes, erat enim tantum hypotheſis. Revera tamen neceſſe eſt, ut malleus totam ſuam vim in navem transferat, ſi dum percutit, incomparabiliter celerius moveatur quam ipſa navis, id quod facile poſſum demonſtrare; nam poſt ictum malleus eam ſaltem retinet celeritatem quam navis jam habet; id eſt infiniteſimam partem celeritatis quam malleus in navem impingit; ergo retinebit etiam tantum infiniteſimam partem ſuæ vis quam ante ictum habebat; & proinde tota mallei vis, demta infiniteſima parte, id eſt, nihilo, translata eſt in navem; abſtraho enim hic a materia ambiente, in qua aliqua pars vis abſorberi poteſt; & ſuppono navem eſſe ſolidiſſimam, & omnis tremoris expertem; Hinc, ni fallor, ſatis percipitur, quod etiam parti-

1696 August. particula materiæ gravificæ totam ſuam vim in grave transferre debeat, ſi modo concedatur poſt ictum non ſtatim repercuti, quod & ipſe jam conceſſiſti.

Oportet ut definias quid per actionem intelligas; alias nihil unquam demonſtrari poterit. Omnis veritas, aut eſt Axioma, aut ex Axiomatibus derivata; Oportet ergo ut ad demonſtrandam illam in aliquo Axiomate ſubſiſtas, ne in infinitum progredi cogaris; miror itaque quod dicis, *Te omnis Axiomatis adhibendi deſiderari demonſtrationem.* Quidni & in dubium vocas, an Totum ſit majus ſua parte? ſed ut ad actionem redeam, da mihi definitionem nominis, & facile difficultatem diluam. Si enim per actionem intelligas ſolum effectum, non conſiderato quanto tempore ſit productus, tunc utique actio A faciens idem brevi tempore, non erit major, ſed æqualis actioni B facienti idem longo tempore, quia effectus producti ſunt æquales; ſi vero per actionem intelligas compoſitum ex effectu producto & tempore, tunc Actio A major erit quam actio B. Hæc, ni fallor, nituntur ſenſu communi, aut forſan mentem Tuam non ſatis aſſequor.

Cum meam curvam appellarem *Brachyſtocronam*, id feci ex conſideratione *Iſochronæ Hugenianæ*, ut cum eidem curvæ competant, habeant etiam nomina quam-maxime affinia. Nihil dicis de curva quam appello *Synchronam*, quamque adeo ſimpliciter conſtruo, etiamſi pro illa nullam invenerim æquationem differentialem, nedum aliquam inveniendi viam perſpiciam: vellem ut novæ huic ſpeculationi otioſa aliquot momenta tribueres, ut & alteri illi exemplo, quod propoſui de invenienda curva omnibus Logarithmicis communis axis & ex eodem puncto deſcriptis normali. Scire Te velim hujus mihi ſolutionem eſſe repertam, paulo poſt ultimas meas ad Te curſori traditas. Inveni quod ſit curva ex percurrentium genere, ut voco, quam proinde ope ipſius Logarithmicæ facillime conſtruo. Eſt ſane Exemplum, ubi Calculi percurrentis uſus inſigniter elucet.

Vallisius Newtoni Methodum paucis quidem explicat; ex illis paucis tamen video, quod in re neutiquam differat a Calculo differentiali, ut ipſe Newtonus fatetur in ſuis *Princ. nat.*

pag.

pag. 254. Quod in hoc dicitur *Differentiale*, ibi est *Fluxio*, & quod in hoc *Summa*, ibi *Fluens*. Et Nervus hujus Methodi, ut & calculi differentialis ad duo hæc Problemata redit. *Datis quantitatibus fluentibus*, *invenire earum fluxiones*; & vicissim, *Datis fluxionibus*, *invenire earum fluentes*. Loco Litteræ *d* ad designandam differentialem primam, vel fluxionem, utitur puncto supra scripto; pro differentiali secunda denotanda utitur duobus punctis, & ita porro. Sic dx est $\dot{x}$, ddx est $\ddot{x}$, $dddx$ est $\dddot{x}$, &c. Cæterum processus ipse operationis est utrobique idem, adeo ut nesciam annon Newtonus, Tuo calculo viso, suam demum Methodum fabricaverit; præsertim cum ex loco citato videam Te ipsi tuum Calculum communicasse, antequam ipse suam edidisset Methodum. De cætero Wallisius Tom. II. pag. 394, modum explicat, quo utitur Newtonus ad radicem extrahendam ex æquatione fluxionem radicis involvente, & quidem per seriem. Sed universali meæ Seriei palmam non præripiet: Est enim ille modus *Newtonianus* admodum operosus, & fere idem cum Tuo, quem vero longe succinctiorem & ad praxin aptiorem reddidisti in *Act.* 1693. pag. 178. . . . . 1695 August.

Dominum Fullenium in *Cartesiana* quidem satis, sed non item in interiori Geometria versatum puto. Memini quod ante quindecim circiter annos, cum in utraque adhuc hospes essem, *Frater* meus Dominum Fullenium crebro consulebat per Litteras, super ea, quæ tunc-temporis non probe intelligebat in Cartesii *Geometria*; me etiam non defugit, quod Dominus Fullenius ipsi roganti omnia fideliter, & [quod miror] patienter explicabat: nescio unde hoc commercium ortum suum traxerat; forte cum *Frater* paulo ante in *Batavis* esset, & nescio item quo facto iterum intercidit.

Quid tibi videtur de scripto Hollanderi, † habet multa Astronomica, quæ certis regulis coërcet, quæ tamen humanitus pene fortuita videntur. Exempli gratia, Regula ejus prima de invenienda obliquitate Eclipticæ Terræ, aut non est exacta & observationibus non respondet, aut debet *a priori* posse demonstrari, ex Legibus

† Vide Epist. XXX. sub fine.

1696 Auguft. Legibus Naturæ. Conditorem Mundi non potuiffe aliam obliquitatem Eclypticæ Terræ efficere, quam quæ ita fit, ut Secans complementi fit exactiffimè media proportionalis inter radium & peripheriam. Verum talia demonftrari poffe geometrice ab humano ingenio non puto. Reftat itaque, ut dicamus Dominum HOLLANDERUM *a pofteriori* rem aggreffum effe, & tentando plures Regulas tandem in aliquam incidiffe, quæ cum obfervationibus quamproxime confentit. Sed fi hoc eft, quis genius illum duxit ad fumendum medium proportionale inter radium & peripheriam, ad habendam fecantem complementi obliquitatis quæfitæ? Cur non potius in alias incidit Regulas, quæ forte magis obviæ fuiffent? Et ita in aliis.

Dominus *Marchio* HOSPITALIUS mihi fcripfit, fe a Te intellexiffe, me in Tuas partes tranfiiffe circa æftimationem virium: an verum fit? fe enim non poffe credere, quod communem fententiam deferuerim. Refcripfi, imo maxime verum effe, & obtuli ipfi, fi velit, excerpta quædam ex mutuis noftris litteris, ut plene videat rationes quæ me eo adigerunt: me non dubitare, quin fi illas ferio fit perpenfurus, mecum fiat transfuga, & erroneam partem relinquat. Hifce, Vale & Fave,

Ampl. Tuæ

Groningæ 15. Auguft. 1696.

Ded. J. BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA XXXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Problemate Brachyſtochronæ. De Synchrona & Trajectoriis Orthogonalibus. De NEWTONO. *De* GREGORII *Elementis Dioptricæ & Catoptricæ. De Axiomatibus demonſtrandis. De* HOLLANDERI *Amalthæo aſtronomico.*

Vir Celeberrime, Fautor & Amice Honoratiſſime.

EX Tuis noviſſimis video me oblitum addere meis fragmentum Menſis *Julii Lipſienſis*; id ergo nunc mitto, & vel ideo reſpondere feſtino. Fragmentum hoc retinere potes, cum totum interim *Julium*, una cum *Junio*, in nundinis acceperim, & quia ſuſpicor *Junium* nondum ad Te perveniſſe, mittam plagulam ad Mathematica ſpectantem, ubi *Hanoveram* reverſus fuero; nam inter ſchedas mecum huc allatas, præter ſpem, non reperio: videbis Dominum MENCKENIUM, deſiderio tuo ſatisfeciſſe. 1696 Auguſt.

Ubi primum Problema Tuum acceperam, aliquam ejus mentionem injeceram in Litteris ad amicos *Italos* eo ipſo tempore miſſis; ſed poſtea rem diſtinctius illis expoſui, addidique recte facturos, ſi in *Diario* ſuo mentionem ejus fieri curarent. Idem apud *Gallos* faciam, quia probas. Video ex *Junio* Te pariter, & Dominum *Fratrem* Tuum * quædam in nuperis TSCHIRNHAUSIANIS notaſſe, & *Fratrem* quidem, ita ut eum etiam provocare videatur; non tamen ſine aliqua verborum humanitate.

De ambabus ſolutionibus Tuis edendis ſtatues quod e re vide-

 bitur;

* Jac. BERN. *Obſervatiuncula ad ea, quæ nupero Menſe Novembri de dimenſionibus curvarum publicata leguntur, Auctore D. T.* Act. Er. 1696. Jun. p. 260. Opp. N°. 69. p. 722.

1696 Auguſt. bitur; nolim enim conſilii mei rationem habeas, ultra quam Tibi commodum erit. Meritiſſimis laudibus Tuis ego nunquam intercedam, ſed præco ſemper ero maximus. Methodum illam poſteriorem diſtuliſſem adhuc nonnihil, ſi Tuo eſſem loco; vel ideo, quia latius patet, ne ſcilicet ſtatim fontes illis indicentur, qui poſtea ſupprimunt indicatos, aut in rivos ſuos avertunt. Ego mea ſolutione paucis verbis defungar; tantum enim dicam, inſigni veritatis indicio nos eamdem reperiſſe lineam, etſi ego conſtructionem ejus aliquam reperiſſe contentus, primariam a qua denominatur non animadverterim, quæ laus in ſolidum Tua eſt; quanquam ſi vidiſſem ego Problematis Tui propoſitionem, qualis *Junio* fuit inſerta, fuiſſem haud dubie ulterius progreſſurus, & fortaſſe etiam receptum nomen deprehenſurus. Habebam eamdem, quam Tu ponis, æquationem differentialem, quam revocare poteram ad eam quam in *Actis* aſſignaveram olim Cycloïdi; ſed talia nunc animo minus obverſantur. Commune quidem hoc videbam Optico & noſtro Problemati, quod utrobique quæritur via facillima, ſed cum in Optico motus uniformis per ſe a medio variationem acciperet, hic acceleratus eſſet; ego, alioqui nihil aliud quam utcunque defungi cupiens, non ultra contuli. Cæterum, calculum faciens, ordine nactus ſum eas proprietates, quas Tibi tranſcripſi; & putem ſimilem viam & in aliis circa maxima profore.

Non memini amplius, quid Tibi ſcripſerim olim * de Methodo mea, pro invenienda perpendiculari ad curvas ordinatim poſitione datas; quam pro tranſcendentibus valere negas; rogoque ut indices, in quo conſiſtat. Saltem accommodari poterit ad tranſcendentes curvas æquatione exponentialiter percurrente datas. Et ſane has earum expreſſiones ſemper pro perfectiſſimis habui. Expreſſiones *percurrentes* apud me ſunt ut genus; *exponentiales* vero ſunt perfectiſſimæ earum ſpecies.

Ad ſynchronam Tuam, & ad omnibus Logarithmicis perpendicularem non eſt quod me voces: perpulchras eſſe non nego, & Te dignas ſpeculationes, ſed cogor eas a Te potius-quam a me ſperare.

* Epiſt. VI.

rare. Scis me, nonnisi vi quadam pellaci, Problematis Tui prioris coactum, ad ejus Solutionem tentandam accessisse; sed sæpe hoc facere non possum: quod agnosceres, credo, si coram videres, quæ mihi sunt agenda toto Cælo diversa ab istis. Et nunc etiam plura accessere, ex quo Serenissimus Elector me inter Consiliarios status, quos vocant *Conseillers privés*, recipi jussit; quia sæpe ad me deferuntur quæ pertinent ad jura domus, aliaque publica negotia. 1696 August.

De NIEUWENTITIO ex vero opinor judicas, melius facturum, si agnoscat candide in quo peccavit, quam si palliando errorem utriusque laudis jacturam faciat, recti judicii & animi boni. Sperabam de eo meliora; eo enim sum ingenio, ut de omnibus, qua licet, optima sentiam. . . . .

Quoniam spem excurrendi ad nos facis, spero nos aliquando coram facilius defuncturos toto illo negotio de explicanda gravium acceleratione; id enim per litteras præstare laboriosius esse video, dum sæpe ad priora recurrere necesse est; & subinde alter ab alterius sensu aberrat, ut solet fieri in talibus, ubi nondum satis stabilitas habemus formulas loquendi. Summæ mihi voluptati erit Tuus ad nos accessus; nec magnum adeo locorum intervallum est. Illud peto, ut antea consilii Tui certiorem me facias; ne tunc forte domo absim; sæpe enim cogor excurrere, in vicinas præsertim aulas, *Cellensem* & *Guelferbytanam*; cum subinde agenda sunt mihi, quæ ad totam Domum *Brunswicensem* pertinent. Quod si præmonitus sim, nihil conspectu Tuo antiquius habebo.

Quædam in VALLISIO a Te notata non animadverteram, cum omnia attente satis legere non vacarit. Verum est me Domino NEWTONO, ante viginti annos, meæ Methodi differentialis fundamenta communicasse, antequam ille mihi quicquam de suis huc spectantibus. An nonnihil inde profecerit haud satis scio: neque ideo dicere ausim: Interea præclara illum jam tum habuisse facile crediderim, procedente tempore, ut fieri solet, magis expolita.

Grata sunt quæ de Domino FULLENIO indicas; unde judicare licet, Virum esse non tantum doctum, sed & bonum........

1696 Tractatum *Davidis* GREGORII Catoptrico-Dioptricum † acce-
August. pi; totus innititur principio a me indicato de circulis osculantibus in locum curvarum, ut ita dicam, appropriatarum substituendis. Et tamen vel mei, ea in re, vel etiam circulorum osculantium mentionem nullam fecit. Id moneri aliquando in *Actis* non inutile erit, sine ulla tamen displicentiæ significatione, & malim ab alio fieri, quam a me ipso.

Quod dixi, omnis Axiomatis a me demonstrationem desiderari, non temere dictum est; idque animadvertes opinor; si quando vacabit inspicere meditationes quasdam meas de ideis, quæ extant in *Lipsiensium Actis*. * Excipio tamen Axiomata illa, quæ sunt indemonstrabilia, ipsas scilicet identicas propositiones. Cætera omnia, quæ scilicet possunt demonstrari, etiam utile est demonstrari, cum aliqua magni momenti Theoremata in iis fundantur. Idque etiam Veteres viderunt. Unde APOLLONIUS [in scriptis deperditis,] & PROCLUS, & alii Axiomata ab EUCLIDE assumta demonstrare sunt conati. Eamque rem fructu non carere facile opinor concedes, quem tamen non vident, qui scientiarum utilitatem vulgari modulo metiuntur. Interim vides, ea limitatione, quam addidi & quam addendam esse prævideri poterat, non esse cur progressum in infinitum vereare in demonstrando.

Unum addo multum apud me interesse inter hæc duo, in dubium vocare propositionem, & demonstrationem ejus expetere; quod dum a Te hic pro eodem habetur, hinc jam video, cur quæ dixeram de Axiomatibus demonstrandis mira Tibi sint visa. Si CARTESIUS hoc tantum voluisset, cum de omnibus dubitandum dixit, quod ego desidero, nullo jure reprehenderetur; sed ille dupliciter peccavit, nimis dubitando, & nimis facile a dubitatione discedendo. Illud ipsum, quod objicis Axioma, ***Totum esse majus parte***, opportune a Te affertur. Id certe nunquam in dubium vocavi, & tamen aliquando demonstrationem ejus expetii, imo inveni, uno syllogismo comprehensam, innixo definitioni minoris & majoris & Axio-

† Catoptricæ & Dioptricæ sphæricæ Elementa. Auct. *Davide* GREGORIO M.D. Astron. Prof. Saviliano Oxoniæ, & S. R. S. *Oxon.* 1695. 8°.
* *Meditationes de Cognitione, Veritate, & Ideis, per* G. G. L. Act. Erud. 1684. Nov. pag. 537.

Axiomati identico: *Minus* enim definio, quod alterius [*majoris*] parti æquale eſt. Axioma autem identicum quod adhibeo eſt, *Unumquodque æquale eſſe ſibi ipſi*, ſeu $a = a$. Hoc enim tanquam indemonſtrabile ſumo. Sic ergo argumentor in ſyllogiſmo primæ figuræ. 1696 Auguſt.

Quidquid eſt æquale parti totius, id toto minus eſt,

per Definitionem Minoris.

Pars totius eſt æqualis parti totius,

nempe ſibi ipſi, per Axioma identicum,

Ergo pars totius toto minor eſt. *Quod erat demonſtrandum.*

Ita vides, quomodo omnium demonſtrationum a priori duo ſint principia ultima, definitiones, & Propoſitiones indenticæ; quod etiam alibi a me notatum eſt. Atque hæc paulo latius deducere operæ pretium putavi, ut pro æquitate Tua facilius me abſolvas in poſterum, ſi qua forte dicam obiter, quæ primo aſpectu inſubidiora videbuntur, aut ſpeciem ſubterfugii habebunt, cum nihil ſint minus.

Dnum. HOLLANDERUM, [vel ut Dominus *Frater* tuus ſuſpicatur Dnum. SPLEISSIUM] a poſteriori ut vocant, illum mirabilem obliquitatis Eclypticæ Terræ cum tetragoniſmo conſenſum animadvertiſſe nullus dubito. Si idem eſſet in cæteris Planetis, major ſpes foret rationis aliquando deprehendendæ. Interim pulcherrima illa, &, ut ſic dicam, fortunata animadverſio eſt. Nam quantacunque ſagacitas, niſi a fortuna adjuta, hoc non dediſſet. Puto numeros varios tractantem caſu aliquando conſenſum inter hæc tam remota notaſſe.

Problematis circa æquationem differentialem, a Domino *Fratre* tuo propoſiti Solutionem ſtatim dedi, & Te quoque poſſe non dubito, ſi, quod inutile eſt, actum agere velis.

Perplacet, quod Dno. *Marchioni* HOSPITALIO reſpondiſti, Te, caſtris receptæ in Dynamicis ſententiæ deſertis, ad meam tranſiiſſe. Ea enim res ipſius curioſitatem haud dubie excitabit; præſertim cum ἀκρίβειαν Tuam in aliis jam ſit expertus: in Tua etiam poteſtate eſt communicare ipſi, ex noſtris amœbeis, quæ voles....

Si vis ut *Italis Galliſ*que aliquod ſpatium relinquatur examinandi

 Pro-

1696 Problematis Tui, ne ansam habeant excusandi se se, prorogandus
August. nonnihil terminus erit. Nam in *Gallia*, vix ante Novembrem Problema inseri *Diario* poterit, quia nunc sunt *Vacantiæ*, quas vocant, sive Feriæ Vindemiales. Quid ergo, si expectes usque ad finem Anni a prima publicatione *Lipsiensi* computati, id est ad Junium Anni sequentis? Ego interim a Domino *Fratre* Tuo petam, ut si forte inveniat, nonnisi nobiscum publicet, ut appareat quid aliorum Methodi possint.

23. August. 1696.

Deditissimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPISTOLA XXXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

Solutio Problematis Fraterni.

Vir Amplissime atque Celeberrime Fautor Honoratissime.

1696
August. EX quo nuperas [ad quas responsionem exspecto] ad Te dedi, venerunt mihi posteriores Actorum menses, usque ad *Junium* inclusive, a Domino MENCKENIO transmissi. Lustrando occurrerunt & Tua † & *Fratris*.......:.................. Cum videam Te ipsum non dedignatum fuisse Fraterno Problemati vacare, effecit ut & ego tentarem quid humeri valerent, & ecce intra semiquadrantem horæ nodum hunc Gordium solvi, ...
&

† G. G. L. *Notatiuncula ad* Acta Decemb. 1695. & *Acta Erud.* 1696. Mart pag. 145. vel Jac. BERN. Opp. N°. 72. pag. 728.

& quidem illico perveni ad formulam Tuam, ad quam æquationem propoſitam Te reduxiſſe ais in Menſe *Maio*. Ut enim poteſtas n deprimatur, ponendum eſt $y^n = v^{n:(1-n)}$, unde propoſita $ady = ypdx + by^n qdx$, mutatur in hanc $\frac{1}{1-n} adv = vpdx + bqdx$, quæ Tuæ formulæ omnino reſpondet, & quæ adhuc reſolvenda eſt. Interim hac depreſſione poteſtatis non opus habeo: immediate enim attingo ſcopum; ponendo $y = mz$, ideoque $dy = mdz + zdm$, quibus ſubſtitutis in æquatione propoſita habebitur $azdm + amdz = mzpdx + bm^n z^n qdx$. Nunc ut hæc æquatio quatuor terminorum ad duos redigatur, pono $amdz = mzpdx$, id eſt $adz : z = pdx$; unde poteſt haberi z per x, aut algebraïce aut ſaltem tranſcendenter, eſto itaque $z = X$, per majuſcula X, $[X]$, &c. intelligo quantitates diverſas utcunque datas per indeterminatam x, & conſtantes. Quoniam vero deſtructis $amdz$ & $mzpdx$, in æquatione tranſmutata, remanet $azdm = bm^n z^n qdx$, ſeu ſubrogato valore ipſius z, $a\overset{1}{X}dm = bm^n \overset{4}{X}{}^n qdx$, ideſt, $m^{-n} dm = \frac{b}{a} X^{n-1} qdx$, unde etiam habetur m, per x, nimirum $\frac{1}{-n+1} m^{-n+1} = \frac{b}{a} \int X^{n-1} qdx$. Sit igitur $m = [X]$, adeoque $y (zm) = X[X]$, & ſic habetur y, vel algebraïce, vel tranſcendenter per x. Sunt enim X, $[X]$, quantitates pure dependentes ab x & conſtantibus. *Q. E. I.*

1696 Auguſt.

En totius arcani ſolutionem; neſcio quidem quouſque cum Fraterna conſpiret, ideoque ſchediaſma illud, quod jam in ultimis tuis mihi debebat eſſe tranſmiſſum avide exſpecto. Optarim, ut excerpta ex his litteris cum Tuis, quæ forte edenda habes *Lipſiam* mittas *Actis* inſerenda. . . . .

Super alia, quæ in hiſce *Actorum* Menſibus obſervavi, proxime

me fcribam, nunc plura adjicere non vacat, nifi ut Te valere jubeam quam optime & amare quem nofti ex mente & manu,

Amplitudinis Tuæ

Groningæ raptim 25. Aug. 1696.

Devotiffimum

J. BERNOULLI.

EPISTOLA XXXIV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Refponfio ad EPIST. XXXII.

Gratulatio ob Confiliarii munus. Quales curvæ in fe redeuntes poffint rectificari. Error TSCHIRNHAUSII. *De progreffionis harmonicæ fummatione compendiaria. De annotationibus* Hugenianis *ad* Acta Erud. *De Probl. Brachyftochronæ & Trajectoriis Orthogonalibus.* GREGORII *Tractatus Catoptrico-Dioptricus. De Axiomatum demonftratione.*

Vir Ampliffime atque Celeberrime! Fautor Honoratiffime!

1696 Septemb. UNde melius exordiar quam ftatim a limine tibi gratulando infignem, qua mactaris à Sereniffimo Tuo Electore dignitatem, quaque altius contendere nequis? ita tamen ut Te moneam noftrorum Mathematum non penitus oblivifci, ut fere in poftremis Tuis infinuare videris, ne nobis anfam præbeas indolendi magis quam Tecum lætandi. Non nego, licet non coram videns, multorum & gravium Te fubiiffe negotiorum jugum, in quorum minimo plus fitum eft quam in folutione omnium Problematum Catenariorum, Ifochronorum, Tachyftoptotorum &c. fed quid eft, quod magis recreabit animum, feriis occupationibus & innumerarum rerum agendarum

darum molestiis tantum non succumbentem, quam jucundæ medi- 1696
tationes mathematicæ. Siste Tibi ipsius JULII CÆSARIS exem- Septemb.
plum, quem *media inter prælia semper Stellarum cælique plagis superis vacasse*.

LUCANUS refert. Gratias ago pro transmisso Fragmento *Julii Actor. Lips.* Litteræ Tuæ, quod miror, cum illas acciperem, erant vetustæ 12 dies. Non est quod mittas mihi plagulam ex *Junio*; accepi enim hunc mensem ut videris ex ultimis meis, in quibus mittebam solutionem meam Problematis fraterni..............................

Optime ipsi objecisti * dari curvas in se redeuntes algebraïcas, quæ rectificationem admittunt, & præter illas ex Cycloïdalium genere reperio ego infinitas alias; exempli gratia, omnes causticæ & omnes evolutæ curvarum algebraïcarum in se redeuntium, & ipsæ semper sunt algebraïcæ in se redeuntes, & simul rectificabiles. Putat quidem *Frater* se causam sui erroris detexisse, sed minime. Ego quidem me determinare posse credo, quando possunt esse rectificabiles & quando non possunt; puto enim curvas illas in se redeuntes, quæ nullum habent punctum, quod ego voco reflexus, [*point de rebroussement*] non esse rectificabiles, ut curvas (*Fig.* 44.) A; TAB. VIII.
illas vero quæ habent unum plurave puncta reflexus posse interdum rectificari, ut B; Ratio prioris est, quia evolvendo lineam A progeneratur spiralis infinitorum circuituum, quæ quia à linea recta in infinitis punctis secari potest, semper erit transcendens, & proinde ipsa linea A non poterit rectificari; alias Spiralis illa, quæ ex evolutione describitur, foret algebraïca, quod est impossibile; Ratio vero posterioris est, quia, licet curva B sit etiam in se rediens, curva tamen, quæ ex evolutione provenit, non est spiralis, sed ob punctum reflexus, etiam in se redit; hinc cum nihil impediat, quominus hæc possit esse Algebraïca, etiam nihil impedit quominus curva B possit esse rectificabilis. Et revera hoc ita se se habere in Circulo & Epycycloïde per se patet; illum enim evolvendo describitur Spiralis infinitorum gyrorum; hæc autem sui evolutione dat aliam Epicycloïdem, sed inversam; quod utrumque hic per curvas punctatas notavi: Et ob hanc rationem puto, cur Circulus,

* Act. Erud. 1696. p. 146. vel Jac. BERN. Opp. N°. 71. pag. 729.

1696 aliæque curvæ in ſe redeuntes, quæ nullum habent reflexum, non Septemb. ſint *indefinite* rectificabiles; Dic quæſo an aliquid in contrarium habeas. Addo *indefinite*, nam ut ipſe contra Dominum TSCHIRNHAUSIUM perbene notaſti, dari aliquas figuras quoad certas partes quadrabiles, indefinite tamen inquadrabiles; idem & ego de rectificatione curvarum ſtatuo. Animadvertit quidem Dominus TSCHIRNHAUSIUS, † & quidem recte in exemplo, quod ipſi in eam rem propoſueras, * præter illam figuræ partem, quam Tu obſervaveras quadrabilem, infinitas alias eſſe partes, quæ admittunt Quadraturam; ſed ut ipſe fatetur, infinitum non eſt indefinitum; habet enim infinitas partes quadrabiles, ſed etiam infinitas non quadrabiles. Miror autem, quod exinde inferre voluerit Dominus TSCHIRNHAUSIUS, omnes figuras algebraïcas, aut nullam, aut infinitas habere partes quadrabiles; omnes figuras autem tranſcendentes, aut nullam, aut duas, aut tres &c. non vero infinitas [niſi ipſa ſit indefinite quadrabilis] habere partes quadrabiles; quod utrumque veritati adverſatur; poſſum enim exhibere curvas algebraïcas, in quibus oſtendo, præter unicam quadrabilem partem, nullam aliam eſſe; & contra habeo curvas tranſcendentes, quæ ut ut indefinite non quadrabiles, infinitas tamen habent partes quadraturam admittentes: in quarum cenſu eſt ipſa Cycloïs primaria, quam ille in Exemplum adhibuit; in qua methodum habeo determinandi infinitas partes, meris rectis & portionibus curvæ cycloïdalis comprehenſas, quadrabiles; id quod hactenus nemo præſtitit. Duæ enim hactenus tantum innotuerunt, una *Hugeniana*, quæ æqualis eſt ſemihexagono circulo genitori inſcriptæ; & altera, neſcio a quo inventa, quæ æquatur ſemiquadrato radii. . . . .

Quod Tu menſe *Martio* agnoſcis, Navem quieſcentem ab eodem vento fortius impelli quam procedentem, & ego agnoſco, ſi venti celeritas finitam habeat rationem ad celeritatem navis; alias ſi ratio ſtatuatur infinita, dico ego ſemper æque fortiter navem impelli; ſed, ſecundum Tuum materiæ gravificæ actionem explicandi modum, procedens Navis fortius impellitur quam quieſcens. Mitto

† Act. Erud. 1687. Sept. pag. 526.
* Act. Erud. 1684. Mai. pag. 235, & Dec. p. 865, *nec non* 1686. Jun. p. 293.

Mitto ego Notas *Hugenianas*, quas in reliquis *Actorum* Tomis reperi: videbis ab initio Hugenium idem quod olim a Te petebam sciscitari, compendium scilicet summandi progressionem harmonicam terminorum numero finitorum; mihi quidem roganti rescripseras nec Tibi hoc compendium notum esse; quia autem tum temporis hujus loci in *Actis* non recordabar, nunc commode incidit, ut instantiam faciam, quomodo ergo interpretanda sint hæc tua verba, *quotcunque terminorum numero finitorum progressionis harmonicæ summa compendio aliquo iniri potest.* Occurrerunt quædam partim plumbagine confuse scripta, partim a Bibliopega a margine resecta, quæ non probe legere poteram. Nonnunquam alios reprehendens ipse maxime fallitur; exempli gratia, cum contra D. T. asserit non solum infinitarum, sed omnium Lunulæ *Hippocraticæ* partium haberi quadraturas; falsissimum est: haberetur enim quadratura ipsius Circuli, si omnes partes Lunulæ essent quadrabiles. Videbis etiam, quem in Tuis castris totum putabas, quousque novæ opinioni de æstimatione virium astipulatus fuerit: tunc tantum scilicet, quando agebatur de viribus, ut vocat, ascensionalibus: sed quis tam absonam limitationem à tanto Viro profectam putet. 1696 Septemb.

Verum est *Fratrem*, & me, eadem fere in *Tschirnausianis* notasse; non tamen animadvertit quod ego; quod scilicet modus abscindendi portiones a curva parabolica in data ratione dependeat a rectificatione ipsius curvæ parabolicæ. . . . . Quid Tibi videtur de curvis illis, quas neque per *Cartesianam*, neque per infinitorum Geometriam determinari posse ostendo §: Habebunt hic vulgaris Geometriæ amatores novam speculandi materiam.

Recte sentis, posterior mea Methodus Brachystochronam solvendi, quam late patere dicis, non statim vulganda est; donec Mathematici suas solutiones exhibuerint, aut hæc non adeo levia esse ingenue professi fuerint. Non dubito, quin si vidisses Problematis mei propositionem, ut in *Actis* extat, statim fuisses nomen curvæ deprehensurus; quod enim dixi esse curvam Geometris notissimam,

§ Act. Erud. 1696. Jun. p. 264. & seq. *vel* Opp. Tom. I. N°. XXX. p. 155.

1696 Septemb. hoc illi, qui solverit Problema, quod Tu solvisti, ansam præbebit ulterius inquirere in nomen curvæ. Non ita mihi sum ignotus, ut non intelligam aliena maxime & diversissima Tibi agenda esse, quæ prohibeant, quominus Problematibus meis vacare possis; sed nec adeo iniquus sum, ut id a Te exigam, nisi vacuo omnibus negotiis gravioribus.

En, quia petis, propria verba, quæ mihi olim scripseras de methodo pro invenienda perpendiculari ad curvas ordinatim positione datas; Tenta an quid faciant pro synchrona, & omnibus Logarithmicis perpendiculari. D. $\frac{6}{19}$ 10*bris* 1694. „ Pene exciderat problema inveniendi curvam, quæ ordinatim positione datis occurrat „ ad angulos rectos. Cujus methodus, meo judicio, consistit in „ duabus æquationibus, una continente relationem inter x & y, & „ constantem quamdam in curva positione data, sed pro diversis talibus ordinatim datis variabilem b; altera continente valorem ipsius $dy : dx$ in curva quæsita, expressam ex proprietate perpendicularium in curva positione data; cujus æquationis ope datur „ ipsius b valor per dy, dx, y, x, pro re nata; quarum duarum „ æquationum ope tollendo b, habetur æquatio differentialis primi „ gradus pro reliquis inter x & y ".

. . . .

Lubentissime in me suscipiam quod moneri velles in *Actis* circa Tractatum *Davidis* GREGORII Catoptrico-Dioptricum: sed cum Tractatum hunc non viderim, nec forte videre contingat; explicari mihi vellem principium illud a Te indicatum de circulis osculantibus in locum curvarum appropriatarum substituendis, & quid proprie monitum cuperes; facit utique mentionem circulorum osculantium, ut videre est ex excerptis, quorum portio quædam extat ad finem Schediasmatis Fraterni mihi transmissi.

Et ego ita putavi Dominum HOLLANDERUM, Virum sane eruditum & generosum, a posteriori incidisse varios numeros tractantem in consensum circuli tetragonismi & obliquitatis Eclypticæ. sed hoc non unicum est: complura hujus modi alia habet, quæ omnia forte fortuna tantum detexisse, vix est ut dici possit.

Jure

Jure distinguis inter in dubium vocare propositionem & demonstrationem ejus expetere. Credo & Cartesii sensum ita fuisse, quamvis non ita expresserit: non enim dubitavit de Dei existentia, sed supposuit non existere. Speciose quidem Axioma, *Totum majus esse sua parte*, demonstrare conaris; sed annon & aliquis syllogismi, quo uteris, primæ figuræ probitatem esse demonstrandam urgere posset? Omnes enim syllogismi recte concludentes eo nituntur principio, ut minor terminus alligetur, vel separetur a majori, ope medii termini ad minimum semel universaliter sumti. Unde tritum illud, *Quæ eidem tertio conveniunt, illa inter se conveniunt*, quod idem est, quam illud apud Geometras usitatum, *Quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia*: Hoc ergo Axioma, vel huic affine supponendum est, ut syllogismus recte concludere dicatur. Quæro autem an hoc clarius sit, quam illud quod demonstrandum suscipis. 1696 Sept.

Ecce quid ad oblationem meam Dominus *Marchio* Hospitalius responderit, in litteris hesterno cursore acceptis. *Je vous suis obligé de l'offre que vous me faites de me donner part de vos Objections au systême de Monsieur* Leibnitz, *pour l'estime de la force & de ses réponses; cependant je vous prie de reserver cette bonne volonté pour un autre tems, lorsque j'examinerai cette matiére à fond, qui me paroit des plus importantes pour la Physique.......* Consentio ut proroges Terminum pro solutione Problematis mei concessum ad finem sequentis semestris....... Vale & fave,

Ampl. Tuæ

Devotissimo
J. Bernoulli.

EPISTOLA XXXV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De notis Hugenianis. *De curvis rectificabilibus & quadrabilibus. De Curvis ex plurium punctorum relatione determinandis. Varia.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

1696 Octob. PRo communicatis reliquis *Hugenianis* maximas ago gratias. Non is ſum qui negem mea aliquando poſſe emendari. Interim, ni fallor, interdum judicavit feſtinantius. Quæ ipſi diſplicuit demonſtratio meæ Iſochronæ, * ejus me eo minus pœnitet, quod, quantum ex Domini *Fratris* Tui ſchediaſmatis intelligo, ejus occaſione Calculi differentialis verum uſum perſpexiſtis. Et ipſe, ſtudio, Analyſeos filo accommodaveram. Etiam amicus quidam *Florentinus* ejus auxilio nonnihil in noſtra penetravit. Quia approbas, ſcripſi ad *Italos* & *Gallos*, ut Paſcha proximum pro termino ſolutionum ſtatuatur.

. . . .

Vellem Methodum tractoriam applicari potius ad inverſa tangentium, quam ad Quadraturas, ubi jam habemus.

Non diſplicet limitatio Tua, † & in univerſum videtur dici poſſe, omnem lineam quæ a linea algebraïca in infinitis punctis ſecari poteſt non eſſe algebraïcam.

Exemplum, quod Domino TSCHYRNHAUSIO propoſueram pro inſtantia, § ſumpſeram ex Lunula HIPPOCRATIS, ordinatis ejus ad

* G. G. L. *De linea Iſochrona in qua grave ſine acceleratione deſcendit.* Act. Erud. 1689. apr. pag. 195.

† *De curvis in ſe redeuntibus & tamen rectificabilibus.*

§ Act. Erud. 1684, Mai. pag. 233, & Dec. pag. 865. nec non 1686. Jun. pag. 293.

ad axem applicatis, ubi prodibit curva, cujus æquationem notaveram. Hæsit diu, donec multo post tempore Lunulam forte tractans, ut apparet ex ejus schediasmate, * rem deprehendit; ex Analysi credo non facile detecturus. Illud manifestum puto, nondum nos, ex eo quod curvæ algebraïcæ segmentum vel semisegmentum [id est, portio curvæ arcu uno & recta, vel rectis comprehensa] quadrari potest, concludere posse, quod curva indefinite quadrari potest. Imo ne illud quidem confectum puto, quod Dominus Tschirnhausius sui excusandi causa attulit, ubi datur una talis quadratura dari infinitas. Et fortasse excogitari possent instantiæ, ubi sudandum esset pro tali infinitorum segmentorum quadratura invenienda. 1696 Octob.

Circa summam progressionis harmonicæ vereor ne sim deceptus.

Quod illas attinet curvas, quæ ex plurium punctorum curvæ inter se relatione determinantur, notavi ex Cartesii litteris idem etiam movisse Fermatium; sed Cartesium in responsione rem non attigisse. Ego nonnihil de talibus, sed alio quodam modo cogitavi, de quibus alias; nunc festinantissimus ista scribo, currumque inscensurus. Nolui autem differre hanc scriptionem, ut *Menckenianam* mature exciperes. Nescio an curvam determinaveris, quam aliis relinquis determinandam.

Placet, quod scribis Dominum Hollanderum eo esse ingenio, ut illa pulchra inventa ab ipsomet profecta censeri possint.

Syllogismi primæ figuræ probitas demonstrari omnino potest, independenter a veritate hujus Axiomatis, quod Totum sit majus sua parte; ut in ea re nullus sit circulus timendus.

Domini *Marchionis* Hospitalii Opus expecto, sed a Te, *Lipsiensibus* credo nundinis, demum habebo. Nunc vale & litteris deproperatis ignosce.

Dabam *Hanoveræ* 6°. 8br. 1696.

Deditissimus
G. G. Leibnitius.

* Acta Erud. 1687. Sept. pag. 526.

EPIS-

EPISTOLA XXXVI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De HUGENII *annotationibus ad* NEWTONUM. *De quadraturis. De Trajectoria orthogonali logarithmicarum.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1696 Octob. Non est cur Te moveat HUGENII festinatum judicium; non enim statim emendanda sunt, quæ ipsi displicuerunt; ipse potius multa multis in locis habet, quæ correctionem admitterent. Nuper hac transiens *Wismariensis* quidam promisit, se mihi missurum aliquod Manuscriptum HUGENII, in auctione ipsius librorum coëmptum, cum NEWTONI Tractatu, cui Manuscripto titulus esset NEWTONI *Errores*; quod si obtinuero, Tibi, si illud desideras, transcribi curabo, aut si nimis fuerit prolixum, principaliora mittam excerpta.

Quod ad *Italos* & *Gallos* scripseris propter Problema meum; gratias ago magnas; per hasce inclusas rogo Dominum MENCKENIUM, ut prorogationem termini etiam in *Actis* publicet, nisi, Te monente, id jam fecerit. Scire percuperem, quid *Frater* meus de hoc Problemate statuat, & an illud solverit. Dominus MENCKENIUS scribit, se quid in *Actis* inserendum ab ipso accepisse, de complanatione superficierum conoidæarum & sphæroidearum, conferendum cum meis nupero *Junio* exhibitis, * gratum esset mature intelligere quid id sit; saltem nec ipse, nec alius, Problematis mei solutionem hactenus MENCKENIO misit. Nihil attigisti in novissimis Tuis, an penultimas meas acceperis, per quas Tibi miseram solutionem æquationis differentialis à *Fratre* propositæ.

Miror

* Jac. BERNOULLI *Complanatio superficierum Conoidearum & Sphæroidicarum.* Acta Erud. 1696. Oct. p. 479. & Opp. N°. 73. p. 739.

Miror Dominum TSCHIRNHAUSIUM diu hæsisse in solvendo exemplo, quod ipsi pro instantia proposueras; cum tamen olim Parisiis ego semi-hora, postquam illud mihi proposuisset Dominus *Marchio* HOSPITALIUS, eodem præsente, Quadraturam principalem, cœterasque possibiles ex Analysi determinaverim, idque sine interventu Lunulæ HIPPOCRATIS, de qua ne cogitabam quidem, atque illa occasione jam tum reperi, quod in ultimis meis ad Te notavi, dari curvas, in quibus TSCHIRNHAUSII excusatio plane nullum locum obtinet, utpote in quibus, præter unicum spatium quadrabile, nullum aliud esse demonstro. Et sic jam excogitavi instantias, quas excogitari posse dicis. 1696 Octob.

Non animadverti locum in *Epistolis* CARTESII, ubi FERMATIUM de curvis illis, quæ ex relatione punctorum in curvâ determinantur, aliquid habere, dicis. Rogo ut mihi indices hunc locum. Si id mihi innotuisset, procul-dubio mentionem injecissem, eoque magis quod, ut ais, CARTESIUS in responsione rem non attigerit; unde ipsius methodi infirmitas luculentius constitisset: Gratissimum erit Tua quondam cogitata de hisce percipere. Curvæ, quam aliis determinandam relinquo, memet ipsum nondum satis applicui; si non æquationem finitam, saltem Seriem pro illa me exhibere posse puto.

Cum Te continuis negotiis obrutum videam, quæ impediunt quominus vacare possis Problemati de invenienda curva omnibus Logarithmicis normali, lubens nunc te hoc labore levabo. Esto (*Fig*. 45.) AB axis communis omnium logarithmicarum CD, Cd, ex puncto C eductarum; determinanda est curva Dd omnibus CD, Cd normalis. Positis coordinatis AB, BD, x, y, & CA, a. Concipiatur ad lubitum determinata quædam logarithmica CE ad quam cæteræ referendæ sunt. Sit illa, facilioris calculi gratia talis, ut ipsius subtangens sit æqualis ipsi CA, seu a. Jam ex puncto quovis curvæ quæsitæ D, ductam intellige DE, parallelam BA; quæ secet assumptam logarithmicam in E; ex quo si ducatur EF, designabit AF Logarithmum ipsius EF, seu DB, seu y. Nunc ob normalitatem Dd, ad CD, erit generaliter $dx : -dy :: BD : BG$, sub- TAB. VIII.

1696 Octob. perpendicularem curvæ Dd, ideoque $BG = \frac{-y\,dy}{dx}$. Est autem ex proprietate Logarithmicarum subtangens Logarithmicæ CE ad subtangentem Logarithmicæ CD, id est, CA ad BG, ut AF ad AB, quod hanc suppeditat propositionem $a : \frac{-y\,dy}{dx} = ly : x$, unde habetur $axdx = -yly.dy$. Potest autem, si meministi eorum quæ olim ad te scripsi, $yly.dy$ summari hoc pacto $-yly.dy = -yly.dy - \frac{1}{2}yyddy + \frac{1}{2}aydy$ [quia $dly = \frac{a\,dy}{y}$] sumtis itaque summis per partes, erit $\int -yly.dy = -\frac{1}{2}yyly + \frac{1}{4}ayy$ & per consequens $= \frac{1}{2}axx$ id est $x = y\sqrt{\frac{a - 2ly}{2a}}$, vel, si mavis æquationem percurrentem, sit b numerus ipsius a, seu $lb = a$, tunc erit $2yly = yylb - 2xxbb$, adeoque $y^{2yy} = \frac{b^{yy}}{b^{2xx}} = b^{yy - 2xx}$ vel etiam $b^{2xx}y^{2yy} = b^{yy}$.

Si limitatio mea non displicet, pro demonstratione legitima valebit, Circulum, Ellipses, aliasque curvas in se redeuntes, nullumque punctum reflexus habentes, neque rectificari, neque quadrari posse indefinite. Plura scribendi impræsentiarum Tuæ præter solitum steriles non suggerunt occasionem. Hisce igitur, Vale & Fave,

Amplitudinis Tuæ

Groningæ 27. 8bris 1696.

Devotissimo
BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA XXXVII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad praecedentem

De Analysi infinite parvorum HOSPITALII. *De tangentibus curvarum per Focos descriptarum. De curvis ex plurium punctorum proprietate determinandis. De Serie quadratorum reciproca. Varia.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime!

LItteras ad Dominum MENCKENIUM Tuas rite curavi; si quid ipsi significas novum in Republica litteraria, fac, quæso, ut nec a me ignoretur. 1696 Nov.

Gratissimæ erunt censuræ HUGENII in Opus NEWTONI, rogoque, ut si obtinere potes, totum mihi cures describi. Et hos & cæteros pro me sumtus reddam lubens merito.

Putabam me, in respondendo, etiam illa Tua attigisse, in quibus Problema solveras a Domino *Fratre* Tuo propositum. Non est quod quæras qui satisfaciat; nunquam enim credidi, quod mihi facile successit in hoc genere, Tibi negotium magnum facessere posse, idque statim significaveram.

Accepi Librum Domini *Marchionis* HOSPITALII * & prima quaque die ipsi gratias agam. Multa illic præclara reperio, etsi nondum licuerit meditari attentius. Pulcherrima inprimis ratio est, qua † ex Focis determinat tangentes, dum observat, punctorum, in quibus Circulus assumtus secat rectas ex Focis ad curvæ punctum ductas, distantias a normali ad curvam, esse ipsis rectarum differentiis proportionales, atque adeo ipsam normalem transi-

Dd 2 re

* *Analyse des infiniment petits &c.* Paris 1696. 4°.

† Art. 32. & seq.

1696 Novemb. re per centrum gravitatis, si puncta in ratione, quam exhibet differentialis æquatio, onerata intelligantur. Quæ Dominus Fatius † & ego * dedimus, nonnisi initia quædam fuere. In meo id peculiare est, quod ex ipsa tensionis, seu compositionis motuum natura, deduxi transitum per centrum gravitatis. Vellem autem hanc motuum rationem huc applicari, remque ad fila deduci posse, tunc quoque, cum ad emissarum ex Focis versus punctum curvæ potentias ascenditur; ut scilicet parallelismus ille elegans Mechanicæ & Calculi continuaretur. Dominus Tschirnhaus in prima editione suæ *Medicinæ mentis* lapsus erat, idque ipse ei subindicaveram per litteras, ante Italicum iter, & innueram esse mihi viam corrigendi: Sed a Domino Fatio in edendo sum præventus. Ipse Dominus Tschirnhaus correxit sua in secunda editione *Medicinæ mentis*, sed quæ exhibet Theoremata nullo modo accedunt ad pulchritudinem & generalitatem Methodi *Hospitalianæ*. Interim ipse nuper inspecto Domini *Marchionis* Hospitalii Libro ad me scribit, tametsi parum temporis sibi in Nundinis superfuerit ad ejus lectionem, credere tamen pauca in eo fore, quæ sibi non sint nota. Nec dubito, quin inspexerit, quæ hoc negotium concernunt, quod ipsum potissimum tangit. Quod si hæc jam tum noverat, vellem in Operis sui editione novissima non dissimulasset rem tam utilem & elegantem.

Mitto hic ex *Actis Lipsiensibus* mensis *Octobris*, quæ Dominus *Frater* Tuus de superficiebus Conoidum dixit. § Mihi nondum vacavit respondere iis quæ in *Actis* ad me pertinentia dixit; faciam tamen primo otio, eaque occasione, etiam candori Tuo atque inventis, quanquam non necessarium testimonium perhibebo.

Transcribo hic verba Fermatii, in appendice ad Epistolam Mersenni, quæ est 67a in Tomo Tertio *Cartesianorum*. §§ *Je puis*, dit-il, *donner la résolution de cette question: Trouver autant*

tant

* *Bibliotheque universelle.*

† *Journal des Sçavans*, 1693. 36e. Journal du 14. Sept.

§ Jac. Bern. *Complanatio superficierum Conoidicarum & Sphæroidicarum. Act. Erud.* 1696. Oct. p. 479. vel Opp. N°. 73. p. 739.

§§ *Ea est 59a. in Edit. latina quæ prodiit* Lewardiæ. A°. 1711.

tant de lignes courbes qu'on voudra, en chacune desquelles, prenant tels nombres des points qu'on voudra, tous ces points ensemble produisent un même effet. 1696 Nov.

Non invenio Cartesium, Mersenno hæc mittenti respondentem, hunc locum attigisse.

Fac quæso ut sciam quis ille *Wismariensis*, quorsum ierit, & an nostris se se studiis cum successu applicuerit, ut Tuæ litteræ innuere videntur.

Gratias ago pro Tua communicatione lineæ ad Logarithmicas ordinatim datas normalis. Fateor me ita distractum, ut talia attentare vix amplius ausim: nolim tamen hoc ita accipias, quasi eo prætextu velim me, si potuissem aggredi, statim fuisse præstiturum.

Circa summam harmonicorum nondum mihi satisfeci, & vereor ne sim deceptus. Interim circa cognata proponam quæ olim in mentem venere, ubi & judicium Tuum & auxilium desidero.

Quæritur summa horum numerorum $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ + &c.? Fingo esse casum specialem hujus $\frac{1}{1}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{16}x^5$ + &c. $= y$, cum scilicet sit $x = 1$. Quod si ergo semper haberi posset y, haberetur & summa quæsita. Ergo fiet $\frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ + &c. $= dy : dx =$ log. $(1 - x)$, seu $ddy : dx = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$ + &c. $= 1 : (1 - x)$ seu $y = \int (dx \int (dx : (1 - x)))$.

Res ergo pendet a Quadratura figuræ logarithmicæ, quæ datur. Eademque methodus ad alia idgenus porrigitur, ad quæ non alius facile aditus patet. Quare cogita quæso de perfectione & prosecutione.

. . . .

Vale & fave,

Dabam *Hanoveræ* Novembr. 1696.

Deditissimo
G. G. Leibnitio.

P. S.

1696 Nov. P. S. Grata erit instantia curvæ ordinariæ in qua Domini TSCHIRNHAUSII excusatio non habeat locum. Memini in aliqua præcedentium * Te quadraturam obliqui Cycloïdis segmenti tribuere nescio cui : scito eum quem nescieras, me esse. Multi sunt anni quod curavi inseri *Diario Parisino.* † Nonnihil adhuc scrupuli mihi subest circa demonstrationem irrectificabilitatis ovalium puncto reversionis carentium, de quo alias amplius; nunc enim tempore meditandi excludor.

* Supra Epist. XXXIV.
† *Journal des Sçavans* 1678. 23. Mai.

EPISTOLA XXXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De Serie quadratorum reciproca & summandis quantitatibus Logarithmicalibus.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime!

1696 Nov. Litteris ad Te dimissis mox in mentem venit oportere, ut error in illis admissus fuerit. Nam area illa, quam æqualem feceram seriei de qua agebatur infinita est. Re ergo resumta vidi sic procedendum : $\frac{1}{1} + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 +$ &c. $= dy$. Unde $\frac{1}{1}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 +$ &c. $= y$; ergo $dy =$ log. $(1 - x)\, dx : x$, seu $y = \int($log. $(1-x)\,dx : x)$. Sed cum log. $(1 - x)$ sit infinitus, eo casu quo $x = 1$, ideo putavi commodius rei accedi posse, si adhibeamus $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} +$ &c. Nam reperio hac summa data, etiam haberi summam

mam $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c. itaque assumo $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{4} x^3 +$ &c. $= dy$. Unde $\frac{1}{1} x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{16} x^4 +$ &c. $= y$ cumque $\frac{1}{1} x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4$ &c. sit log. $(1+x)$ utique patet fore $dy =$ log. $(1+x) dx : x$ seu $y = \int($log. $(1+x) dx : x)$ Reperio autem generaliter esse $\int(x.^e$ log. $(1+x) dx) = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x) - \frac{1}{e+1} \int(x^{e+1} dx : (1+x))$; & tamen singulari naturæ cautione accidit, ut in unico nostro casu res non succedat, cum scilicet sit $e = -1$, tunc enim $\frac{1}{e+1} = \frac{1}{0}$ quæ est quantitas infinita; unde subsidia summationis evanescunt. 1696 Nov.

Nondum hactenus occurrit mihi alia ratio quæsitam y inveniendi. An aliunde pateat aditus, Tu optime dispexeris.

Si summa hæc dividatur per x, & quod provenit rursus summetur, prodit summa cuborum; & si cum hac procedatur eodem modo, prodit summa biquadraticorum & ita porro. Habemus ergo reductionem serierum ad suas quadraturas: sed ipsæ hoc loco quadraturæ adhuc desiderantur. Interim ipsam methodum aggrediendi series non displicituram puto, cum sæpe res ad quadraturas quæ in potestate sunt reduci possit. Exempli causa series $\frac{1}{1+e} - \frac{1}{2.(1+e)} + \frac{1}{3.(2+e)} - \frac{1}{4.(3+e)}$ &c., semper haberi potest, modo e sit numerus major unitate, quod ex præcedentibus patet, quia fit $\int(x^{e-2}.l(1+x) dx = \frac{x^e}{1.e} - \frac{x^{e+1}}{2.(e+1)} + \frac{x^{e+2}}{3.(e+2)} - \frac{x^{e+3}}{4.(e+3)}$ &c. quod semper haberi potest, excepto casu quo $e = 1$. Quanquam fortasse & in hoc casu habebitur, Tua ope accedente. Hæc raptim prioribus submittere volui, ne

Tibi

1696 Nov. Tibi error calculi a me dormitante neſcio quomodo commiſſus fruſtra negotium faceſſeret. Vale,

Dabam *Hanoveræ* 9. Novembr. 1696.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

P. S. Cum reperiam ſemper eſſe $\int(l(1+x)^n x^e dx) = l(1+x)^n (1+x)x^e - n\int(l(1+x)^{n-1} x^e dx - e\int(l(1+x)^n x^{e-1} dx$, hinc patet potentias ſuperiores reduci ad inferiores, x^e ad x^{e-1}, ſi e ſit affirmativus numerus, vel contra x^{e-1} ad x^e, ſi e ſit numerus negativus; idemque eſt de $l(1+x)^n$ & $l(1+x)^{n-1}$. Unde poſſent haberi hæc omnia, niſi obſtarent illi caſus, ubi ob o, vel infinitum, evaneſcunt ſubſidia. Speciatim reperio $(l(1+x)^2.(1+x)):x = 2\int(l(1+x)dx:x) - \int(l(1+x)^2 dx:xx)$. Fortaſſe ſi omnia ordine examinare liceret, lux aliqua affulgeret.

EPIS-

EPISTOLA XXXIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentes.

De ſummis Serierum ad quadraturas & æquationes differentiales reducendis, & de ipſis in partes datam rationem habentes diſpeſcendis. De GRONINGIO. *Curva unicum ſpatium habens quadrabile. De* NIEUWENTIITII *ſcripto.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

UTraſque Tuas uno eodemque Curſore accepi; in poſterioribus recte correxiſti, quem in prioribus admiſeras lapſum. Olim eram, Te non invito id dixerim, in ſimilibus fere ſpeculationibus: hanc autem materiam jam a longo tempore deſerui, ut pene exciderit, quid ſuper ea præſtiterim. Adverſaria mea diſcutiens hoc reperio. In Hyperbola (*Fig.* 46.) ABCD, ſi AB = BC = B*a* = 1 fiat EM = ſpatio hyperb. EBCF diviſ. per BE & ſic ubique; *em* vero = ſpatio hyperbol. *e*BC*f* diviſ. per B*e*, & ſic ubique: erit ſpatium ABLN $= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ &c. ſpatium vero *a*BL*n* erit $= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ &c. Præterea ſpatium ABLN erit duplum ſpatii *a*BL*n*, & per conſequens, quod probe notaſti, data ſumma $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$, &c. habetur etiam ſumma $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$, &c. hæc enim illius dupla eſt. Quod ſi ulterius ſpatia BLME & BL*me* applicentur ad BE, & B*e*; prodibunt nova ſpatia pro cubis $\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64}$ &c. & $\frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64}$, &c., & ita

1696 Decemb.

TAB. VIII.

1696 Dec. ita porro pro biquadratricis. Quamvis autem omnes istæ Series sint insummabiles, possum tamen, non ineleganti quodam artificio, illas dispescere in partes datam habentes rationem; sic Series generalis potestatis numeri n est hæc $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ &c. & multiplicatis numeratoribus & denominatoribus, per datum numerum ad n elevatum, exempli gratia per 2^n, erit $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ + &c. $= \frac{2^n}{2^n} + \frac{2^n}{4^n} + \frac{2^n}{6^n} + \frac{2^n}{8^n} +$ &c. $= 2^n \times (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n}$ &c.). Est ergo summa terminorum imparium $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}$ &c. ad summam parium $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n}$ &c. ut $2^n - 1$ ad 1: & proinde $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ + &c. ad $\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}$ &c., ut 2^n ad $2^n - 2$. Hinc patet quod supra innui (existente scilicet $n = 2$) summam $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ &c. esse duplam summæ $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ &c. hinc etiam ultro sequitur summam harmonicorum esse infinitam; est enim eo in casu $n = 1$, & proinde 2^n ad $2^n - 2$, ut 2 ad 0, id est, summa $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ &c. infinities major est summa $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ &c. quod obiter dictum velim; ideo præcipue quod memini Fratrem olim id ipsum longa & operosa via apodictice demonstrare instituisse, postquam ego antea illud apodictice demonstrassem, ut videre poteris ex ejus Dissertationibus de Seriebus. Jam si facimus $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} +$

it

$\frac{1}{4^n}$ + &c. $= \frac{3^n}{3^n} + \frac{3^n}{6^n} + \frac{3^n}{9^n} + \frac{3^n}{12^n}$ &c. $= 3^n \cdot \times (\frac{1}{3^n} +$ 1696 Decemb.
$\frac{1}{6^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{12^n} +$ &c.), habebitur ratio quam habet Series tota ad terminos suos omnes tertianos; pari modo invenire licet rationem inter Seriem & suos terminos quartanos, & ita porro. Atque adeo summa, licet ignota, habet tamen partes cognitæ rationis; quemadmodum & Circulus & Hyperbola sunt inquadrabiles, possunt tamen secari in ratione data, quod hic idem in Serie annotasse non injucundum erit.

Quantum vero ad reductionem Serierum ad quadraturas, vides ex iis quæ supra de spatiis ABLN & *a*BL*n*, protuli, me jam diu talia meditatum fuisse: Omnes quidem quadraturæ facile ad Series revocantur, sed vicissim Series ad quadraturas reducere artis foret non mediocris. Ex occasione eorum quæ perscripsisti, negotium resumsi, & quantum per otium licuit unum alterumve Tibi forte non ingratum annotavi. Primo statim animadverti, Te præcipue eo attendisse, ut Series tuas ope differentiationis reduceres ad Seriem harmonicorum, quæ utique quantitate finita logarithmica exprimi potest. Ego exinde cogitare cæpi, annon series proposita per differentiationem bis, ter pluriesve repetitam eamque multiplicando vel dividendo per x, xx, &c. prout res id postulat, tandem reduci posset ad seriem identicam, unde prodiret æquatio differentialis primi, secundi, altiorisve gradus, quæ explicaret summam Seriei. Et quidem spe concepta non omnino excidi: in nonnullis enim quas hic apponam, talis summandi modus commode succedit. Quæritur summa hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ &c. Scio equidem aliunde, si unitas est logarithmus, hanc seriem esse numerum unitatis, sed idem a priori per methodum ita invenio. Fingo ad Tui imitationem esse casum specialem hujus speciei, $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ &c. $= y$, quando scilicet

1696 Dec. x fit $= 1$, hinc fiet, differentiando Seriem $\frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ &c. $= \frac{dy}{dx}$; ablato itaque primo termino $\frac{1}{1}$ provenit Series identica $\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ &c. & consequenter $= y$ & proinde $dy = ydx + dx$, quæ æquatio ostendit y seu potius $y + 1$ esse numerum ipsius x, seu unitatis. Cæterum reperio Seriem $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ &c. esse æqualem huic alteri $\frac{1}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{9}{1.2.3.4} + \frac{16}{1.2.3.4.5}$ &c. Esto jam quærenda summa hujus Seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4.6.8}$, &c. fiat $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$, &c. $= y$, ideoque $x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2.4} + \frac{x^7}{2.4.6}$ &c. $= \frac{dy}{dx}$: transposito x, & divisa æquatione per x, habetur $\frac{dy}{xdx} - 1 = \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$ &c. $= y$ id est $dy = yxdx + xdx$, quæ æquatio [posito $xx = z$] reducitur ad præcedentem: quod etiam alia via invenitur faciendo $xx = 2t$, unde $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$ &c. $= \frac{2t}{2} + \frac{2.2.tt}{2.4} + \frac{2.2.2.t^3}{2.4.6}$ &c. $= \frac{t}{1} + \frac{tt}{1.2} + \frac{ttt}{1.2.3}$ &c. quæ Series utique similis est præcedenti. Quando vero denominationes componuntur ex numeris imparibus, æquatio prodit omnino diversa ab illa præcedenti, ut si proponatur $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{1.3.5.7}$ &c. proindeque fiat $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.2.3} + \frac{x^7}{1.3.5.7}$ &c. $= y$, & $1 + \frac{xx}{1} + \frac{x^4}{1.3} + \frac{x^6}{1.3.5}$ &c. $= \frac{dy}{dx}$ seu $\frac{dy}{xdx} - \frac{1}{x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \frac{x^7}{1.3.5.7}$ &c. $= y$, habebitur hæc æquatio $dy = xydy + dx$; quæ cum sit specialis casus æquationis à *Fratre* in *Actis* nuper propositæ,

positæ, & a Te & a me solutæ, potest per nostras methodos ulterius reduci ad aliam, cujus indeterminatæ separari possunt. Videamus jam quid proveniendum sit ex hac generali Serie $\frac{1}{a} + \frac{1}{a.(a+b)} + \frac{1}{a.(a+b.)(a+2b)} + \frac{1}{a.(a+b.)(a+2b.)(a+3b)}$ &c. 1696 Decemb.
(intelligo per a & b numeros quoscunque, ita ut a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ &c. faciant progressionem quamcunque arithmeticam;] faciamus ergo $\frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a.(a+b)} + \frac{x^{a+2b}}{a.(a+b.)(a+2b)}$ &c. $= y$, unde $\frac{dy}{dx} = x^{a-1} + \frac{x^{a+b-1}}{a} + \frac{x^{a+2b-1}}{a.(a+b)} + \frac{x^{a+3b-1}}{a.(a+b.)(a+2b)}$ + &c., & transposito x^{a-1}, & divisa æquatione per x^{b-1} erit $\frac{dy}{x^{b-1}dx} - x^{a-b} = \frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a.(a+b)} + \frac{x^{a+2b}}{a.(a+b).(a+2b)}$ &c. $= y$ id quod hanc suggerit æquationem $dy = yx^{b-1}dx + x^{a-1}dx$; quæ sane ipsissima est *Fratris* satis generaliter proposita; unde præter spem incidi in modum solvendi hanc æquationem per Seriem simplicissimam, quam forsan *Frater* non ita facile reperiret, si sollicitaretur propriam suam æquationem, vel saltem hanc per Seriem solvere. Sumamus jam aliud exemplum; ubi proveniat æquatio differentialis secundi gradus. Quæritur summa hujus Seriei, $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.4.9} + \frac{1}{1.4.9.16}$ &c. ponatur $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9} + \frac{x^4}{1.4.9.16}$ &c. $= y$, differentiando fiet $1 + \frac{x}{1.2} + \frac{xx}{1.4.3} + \frac{x^3}{1.4.9.4}$ &c. $= \frac{dy}{dx}$ multiplicetur per x, & erit $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.4.3} + \frac{x^4}{1.4.9.4}$ + &c. $= \frac{xdy}{dx}$: differentietur iterum, & habebitur $1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9}$ &c. $= \frac{dxdy + xddy}{dx^2}$ ablato 1, provenit tandem Series identica $\frac{dxdy + xddy}{dx^2} - 1 = \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4}$

Ee 3 +

1696 Decemb. $+ \frac{x^3}{1.4.9} + \frac{x^4}{1.4.9.16}$ &c. $= y$, quæ reducta dabit $xddy = ydx^2 + dx^2 - dxdy$ pro æquatione quæsita, quæ an ad æquationem differentialem primi generis possit reduci, vellem ut dispiceres. Si quæratur summa seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{1.8.27} + \frac{1}{1.8.27.64}$ &c. obtinebitur æquatio differentialis tertii gradus; ponendo enim $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.8} + \frac{x^3}{1.8.27} + \frac{x^4}{1.8.27.64}$ &c. $= y$, post alternatim institutas tres differentiationes, totidemque multiplicationes per x, pervenitur ad seriem identicam; unde elicitur æquatio quæsita hæc $xxd^3y = ydx^3 + dx^3 - 3xdxddy + dx^2dy$. Atque hac ratione in altioribus gradibus operari licet.

Multa alia, quæ olim circa hanc materiam observaveram, omitto; lubet tamen attingere paucis aliud Serierum genus, quod ante decennium, ut puto, primus ego consideravi; quodque cum Fratri aperuissem, protinus ipsi ansam dedit Problemata solida & hypersolida, ope circini & normæ construendi, per approximationem Geometricam §. Hujusmodi enim Serierum summa, vel potius valor perpetuo æquatione algebraïca finita exprimi potest, idque eodem fere modo, quo Serierum jam prolatarum summas indagavimus; procedendo scilicet donec ad Seriem identicam perveniatur. Quæritur exempli gratia, valor hujus Seriei

$\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}$ &c. Pono illum $= x$, sumendo utriusque quadratum erit $xx = 2 + \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ &c. seu $xx - 2 = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ &c.: quadrando iterum provenit $x^4 - 4xx + 4 = 1 + \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ &c.: ablato 1. habetur series identica $x^4 - 4xx + 3 = \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}$ &c.

§ Jac. BERNOULLI *Vera constructio geometrica Problematum solidorum &c.* Acta Erud. 1689. Sept. pag. 454. Opp. N°. 37. pag. 411. Vid. etiam *De Seriebus infin.* Disp. 2a. §. 27-35. Opp. N°. 54. pag. 536. & seq.

$= x$. Hinc $x^4 - 4xx - x + 3 = 0$: cujus proinde æquationis radix ostendet verum valorem Seriei propositæ. Ex hisce paucis facile intelliguntur omnia quæ de constructione solidorum problematum exhibuit Frater meus. Non dubito quin hæc & Tibi jam aliquando considerata fuerint, quamvis apud Authores de Seriebus tractantes hactenus tale quid non repererim. Hac methodo invenitur 1696 Dec.

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ &c. $= 2$ & $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$ &c. $= 3$, aliaque id-genus multa inveniri possunt quæ nemo Te melius perscrutabitur. Quod superest, vix putem alio modo quam fecisti inveniri posse summam Seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c., saltem ad aliam expressionem quam Logarithmicam non reducetur. Quod reperiisti $\int x^e \log.(1+x)\,dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x) - \frac{1}{e+1}$ $\int(\frac{x^{e+1}}{e+x} dx)$; verum est. De hoc autem, ni fallor, jam tum agebamus, cum de exponentialium seu percurrentium Calculo sermones sereremus §: Interim non magis miror rem in nostro unico casu non succedere, quam mirarer Hyperbolam communem non esse quadrabilem: eadem enim naturæ cautione accidit ut ex infinitis Hyperboloïdibus hæc sola quadraturam non admittat. In postscripto facis $\int l(1+x)^n x.\, x^e\,dx$, nescio cui prolixæ quantitati æqualem; rogo ut revideas; forsan lapsus irrepsit; invenio enim simplicius, sic $\int l(1+x)^n x^e dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x)^n$ $- \frac{n}{e+1} \int(\frac{x^{e+1}}{e+1} dx)$. Speciatim Te reperisse ais $\frac{l(1+x)^2.(1+x)}{x}$ $= 2\int\frac{l(1+x)}{x} dx - \int\frac{l(1+x).^2 dx}{xx}$: ego vero reperio $\frac{l(1+x).^2(1+x)}{x} = 2\,lx - \int\frac{l(1+x).^2 dx}{xx}$. Sed de hâc materiâ hæc sufficiant impræsentiarum; plura tempus dabit.

Gratias

§ Epist. VI. & VII.

1696 Decemb. Gratias ago, quod litteras meas ad Dominum MENCKENIUM rite curasti, mittebam ipsi modum generalem *Actis* inserendum † construendi tetragonismum cujuscunque figuræ curvilineæ in plano descriptæ per approximationem geometricam, nulla adhibita expressione analytica; quem modum ob infinitatem adjungere volui Seriei meæ universali pro quadraturis jam ante biennium in *Actis* propositæ.

Ex quo *Wismariensis* iste, nomine GRONINGIUS, hinc discessit, nihil de eo amplius inaudivi; procul-dubio in Patriam migravit; In transitu hic se Doctorem Juris creari fecit. Amator apparuit studiorum nostrorum, videtur tamen historicam magis quam solidam eorum habere notitiam; Decrevit tamen, ut dixit, *historiam* edere *Cycloïdis*, ad imitationem alterius illius PASCHALII; quapropter nostra petiit inventa super illa; De omnibus loqui novit, sed sine fundamentis; *Sueciam*, *Daniam*, *Germaniam*, & *Italiam*, peragravit; Jam diu in Patria officio quodam fungitur.

Nondum obtinui, sed propediem obtinebo, Librum Domini *Marchionis* HOSPITALII; interim ex illis quæ refers, video bonam partem ejus, & forte integrum conscriptum esse ex occasione eorum quæ ipsi *Parisiis* communicaveram: non dubito tamen, quin pro suo, quo pollet, ingenio, auxerit multis, perpoliverit, & vernacula sua lingua nitide concinnaverit.

. . . .

Verba FERMATII, quæ notas, latiori sensu intelligi possunt, quam ut præcise ad curvas meas applicentur.

En quamdam instantiam contra Domini TSCHIRNHAUSII excusationem. Sit (*Fig.* 47.) curva quæcunque ABC quæ secetur, in puncto C, a recta AC faciente angulum semirectum CAE cum axe AE. Erecta normali AF, ducatur & producatur applicata DBH secans AC in G, agaturque GF parallela ipsi AD, secans curvam in L; deinde sumatur BH æqualis ipsi LF, & hoc fiat ubique; generabitur inde nova curva AHI, cujus spatium determinatum AEI, qualiscunque sit curva ABC, semper æquatur quadrato

TAB.VIII.

† Insertum est *Mense Decembri* 1696. pag. 551. Vid. Opp. Tom. I. N°. XXXI. pag. 162.

drato AE vel EC; ipſum vero ſpatium ADH indefinite nunquam erit quadrabile, niſi & ipſum ſpatium ADB ſit indefinite quadrabile: Præterea ſi ſpatium ADB ſit tale, ut, etiamſi inquadrabile, ab eo tamen poſſint algebraïce ſecari ſegmenta æqualia, vel in ratione data, qualis eſt Circulus, vel Ellipſis, vel Hyperbola [neſcio an aliæ curvæ etiam hac proprietate gaudeant] tunc ſpatium indefinitum ADH erit quidem inquadrabile, ſed præter quadrabile AEI infinitas alias habet partes quadrabiles; & hoc eſt quod impoſuit Domino Tschirnhausio animadvertenti id accidere in Lunula ad axim applicata, & perperam univerſalitatem inde inferenti; Dico enim, ſi ſpatium ADB non ſolum ſit indefinite inquadrabile, ſed etiam ſi non poſſint algebraïce ab eo abſcindi ſegmenta æqualia, vel in data ratione [hæc enim diviſio in ſegmenta æqualia in pleriſque curvis dependet ab ipſa quadratura indefinita ſpatii curvilinei] dico, inquam, tunc, præter ſpatium AEI, in curva AHI plane nullum aliud eſſe quadrabile. 1696 Decemb.

Complicaturo hanc mihi affertur, neſcio a quo, nec per quem, novus tractatulus *Bernardi* Nieuwentitii quem inſcribit, *Conſiderationes ſecundæ circa calculi differentialis principia, & reſponſio ad virum Nob.* G. G. Leibnitium. A me impetrare minime poſſum, ut illas legendo tempus perdam. Ex fortuita apertione video eamdem ſemper Crambem recoquere, & ei unice ſtudere, ut verborum Tuorum ſenſum detorqueat; uti patet. ea pag. 7. & 8. Igitur oportet, ut tandem ſerio & rigide reſpondeas; ne iſte Pan, Tibi Apollini obſtrepens, unum vel alterum inveniat Midam ſiniſtre judicantem. Hiſce vale & favere perge

Amplitud. Tuæ

Devotiſſimo

J. Bernoulli.

EPISTOLA XL.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

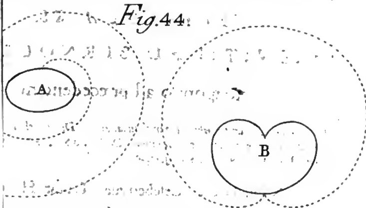
Reſponſio ad præcedentem.

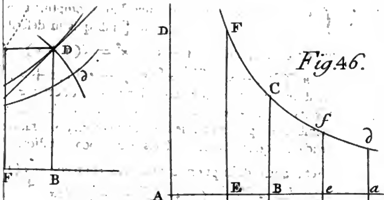
De ſummandis quantitatibus logarithmicalibus. De ſeriebus. De appropinquationibus ex fonte implicationum. De GRONINGII *hiſtoria Cycloïdis. De* TSCHIRNHAUSII *ſcripto.*

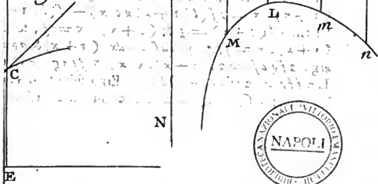
Vir Nobiliſſime & Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1696 Decemb. IGnoſce, quod impeditiſſimus Tibi promptius non reſcripſi. Veriſſimum eſt, quod dixeram [niſi quis in deſcribendo commiſſus eſt error] eſſe $\int l(1+x)^n x^e = l(1+x)^n (1+x) x^e - n\int(l(1+x)^{n-1} x^e dx) - e\int(l(1+x)^n x^{e-1} dx)$ quod reperies differentiando, ſi ponas ut oportet $d(\log.(1+x))$ eſſe $dx:(1+x)$ neque iſte valor altero de quo mox, niſi uno membro eſt prolixior: ſed annotavi eum, ob rationem non ſpernendam, quam adjeci. Tuus ejus loco ſubſtitutus, errore non caret, quem deſcriptioni tribuo. Ais enim eſſe $\int(l(1+x)^n x^e dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x)^n - \frac{n}{e+1}\int(x^{e+1} dx:(1+x))$. Cum ſit $\frac{1}{e+1} x^{e+1} l(1+x)^n - \frac{n}{e+1}\int(x^{e+1} l(1+x)^{n-1} dx:(1+x))$. Neque minus verum eſt quod dixi eſſe $\odot\ l(1+x)^2 (1+x):x = 2\int(l(1+x)dx:x) - \int(l(1+x)^2 dx:xx)$. Sit enim $l(1+x) = f$ & $(1+x):x = g$, foret $l(1+x)^2.(1+x):x = ffg$, jam $df = dx:(1+x)$ & $dg = -dx:xx$, ergo $2fg\,df = 2l(1+x)dx:x$, & $ff\,dg = l(1+x)^2 dx:xx$. Jam $ffg = 2\int fg\,df + \int ff\,dg$. Ergo ſubſtitutis valoribus, prodibit æquatio $\odot$. Quod ſi jam etiam verum eſſet, quod ais eſſe

$l($ 1


Fig. 44.
A
B


D
∂
F
B
D
F
Fig. 46.
C
f
∂
A
E
B
e
a


Fig. 47.
C
E
L
m
M
n
N



$l(1+x)^2.(1+x) : x = 2lx - \int(l(1+x)^2 dx : xx$, haberemus quaesitum; nam foret $\int(l(1+x)dx : x = lx$, quod tamen locum habere non potest. Itaque suspicor Tibi hoc loco contigisse, quod mihi nimis saepius solet, calculi errorem. 1696. 11 Decemb.

Quae de Seriebus ad quadraturas reducendis habes optima sunt, & meis consentanea, qui methodo quidem ista, ut vides, sum usus subinde; sed non omnia observavi, itaque ex Tuis fio doctior. Nonnulla ejus generis latent dispersa in meis schedis; sed quae facilius, ubi opus, denuo eruo, quam in illa Chartarum indigesta mole quaero. Haud dubie regressus a Seriebus ad summas, vel per quadraturas, vel sine quadraturis, pendet a quibusdam aequationibus finitis, quae ex ipsa Serie oriuntur varie tractata; sic ut ipsa tandem ex Calculo possit tolli. Neque hoc in Seriebus tantum verum est, sed & in aliis expressionibus in infinitum tendentibus, quae Seriem proprie dictam non constituunt. Qualis est tua $\sqrt{(2+\sqrt{(1+\sqrt{(2+\sqrt{(1+\&c.)})})})}$, ope extractionis, qualis est etiam ista mea, ope divisionis

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\&c.,}}}}}$$

per quam secatur linea in extrema & media ratione, & generaliter pro tali divisione si scribas

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\&c.}}}}$$

erunt, a, b, c, &c. quotientes, qui prodeunt quaerendo maximam communem mensuram, inter duas quantitates: quae si sint commensurabiles, finitur progressio; sin minus pergitur in infinitum. *Vicecomes* BROUNKERUS, apud WALLISIUM, in *arithmetica infinitorum* dedit talem expressionem pro Circulo, ubi pro a, b, c, d, e, &c. proveniunt, si bene memini unitates; sed ubi ego hic pono unitates, ibi ipsi proveniunt numeri quadrati. Sed mallem progressionem pro Circulo dari, qualem hic designo, ut haberi posset Series quotientium in infinitum proveniens

 opera-

1696 Dec. operatione, qualis adhibetur quærendo maximam communem mensuram. Etiam extractionibus radicalibus continuatis, exhibetur latus polygoni circularis, ut constat. Sed magnitudo Circuli inde non derivatur, nisi multiplicando per numerum infinitum. Circa continuatas quotientium investigationes multum meditatus est Dominus LALOVERA Auctor *Itinerarii Siamensis*; etsi istam expressionem continuatæ in infinitum divisionis non adhibuerit. Continuatæ istæ in infinitum expressiones etiam adhiberi possunt in Tangentium inversis ad quadraturas revocandis. Nam Tangentium inversæ, & similes, se habent quodammodo ad quadraturas ut radices affectæ ad puras, seu absolutas, ut si sit $dy = xdx + ydx$, seu $y = \frac{1}{2} xx + \int y dx$. Ubi in $\int y dx$ substituendo valorem ipsius y inventum, fit $y = \frac{1}{2} xx + \frac{1}{6} x^3 + \int (\int y dx) dx$ ubi rursus in $\int (\int y dx) dx$ valor ipsius y repertus substitui potest. *Galli* quidam, ni fallor Dominus ROOLLE & Dominus *Abbas* LANION, appropinquationes quasdam pro æquationibus dedere, quæ hoc fonte *Implicationum*, ut voco, nitebantur; dum scilicet valor semirepertus in parte sua nondum reperta substituitur. Memini & *Angli* cujusdam, cujus nomen non succurrit, scriptum anglicum vidisse in *Anglia*, qui similia quædam adhibebat pro æquationum radicibus; sed in numeris magis quam in constructionibus linearibus, quas a Te, & Domino *Fratre* Tuo, ex hoc fonte ductas libenter intelligo, & gratias pro indicio ago; etsi enim viderim quæ Dominus *Frater* Tuus in *Actis* dederat, non potui tamen considerare attentius.

Dominus GRONINGIUS etiam ad me nuper scripsit, & de *Historia Cycloïdis* consuluit; indicavi ipsi me esse Auctorem quadraturæ segmenti obliqui, quam & olim publicavi in *Diario Parisino*, ante multos annos †. Sed suasi ut ne nimis immoretur leviculæ controversiæ inter TORRICELLIUM & ROBERVALLIUM, de primo Auctore quadraturæ Cycloïdis, cum ipsa sit perfacilis: Exponenda potius inventa WRENNI & DETTONVILLÆI, seu PASCHALII, & ipsius inprimis HUGENII de Cycloïdis usu ad pendula

† *Journal des Sçavans.* 1678. 18. Journal du 23. May.

pendula sane pulcherrimo; de Tuo novo Cycloïdis usu nihil adhuc dicere licuit. 1696 Decemb.

Rogo ut mihi folium de *Mense Lipsiensi* novissime missum remittas, ut scilicet mensem, alias mutilum futurum, redintegrare possim: Mitto nunc folium novum cum dimidio, in quo videbis quæ Vir Egregius, * cui ambo quædam objecistis, respondeat. Vellem venisset ad rem, & locutus fuisset paulo apertius, directiusque, ut Tibi mihique mos est. Ego, quoties lapsus sum, id libenter & sine circuitione fateor. Miror quid hoc sit, cum dicit, *Methodum tangentium inversam non amplius a se magni-fieri*. Habet-ne pro parum utili, an pro parum difficili? Nam si utilis & difficilis est, utique magni-facienda est. Utilem esse ad magni momenti Problemata, experientia ni fallor docet. An ergo ipse eam facilem reddidit? Hoc non puto, alioqui dixisset. Nam quod ait *sibi successisse, quando inquisivit*, fortasse indiget multa limitatione. Certe ego ipsi talia aliquando in *Actis* proposueram, quæ non attigit: nescio an in ea inquisiverit, quemadmodum quidem verisimile videri posset. Est Vir magni ingenii; sed tamen hanc in eo observo hypocrisin, ut sic dicam Philosophicam, quod vult videri spernere gloriam, quando eam maxime affectat. Quando *Hanovera* transibat, mihi nescio quæ exposuit Theoremata de circuli inscriptis, & aliis, quorum non satis memini; ex quibus se magna ducturum augurabatur; quod ego animadvertere satis non poteram. Habet haud dubie multa egregia; quæ si candide proferret, plus obtineret veræ gloriæ, & magis prodesset Reipublicæ. Quod ait *se a figura data contenta duabus rectis & una curva ordinaria abscindere posse partem imperatam, ductu alterius curvæ ordinariæ*; id est facillimum; tantum enim oportet constituere figuram datæ similem, quod fit emittendo rectas ex puncto in figura sumto, ad quodlibet punctum ambitus, & eas in ratione constanti minuendo: sic habebimus datæ similem & similiter positam. Fiant autem homologæ in subduplicata ratione rationis datæ, quam pars imperata ad

Ff 3 totum

* D. Tschirnhausius. *Responsio ad Observationes Dn.* Bernoulliorum. Acta Erud. 1696. Nov. p. 519. vel Joh. Bernoulli Opp. Tom. I. N°. XXXIV. pag. 170.

1696 Dec. totum habere debet. Pro solido seu corpore, latera homologa seu emissarum imminutiones esse deberent in ratione subtriplicata. sed si Methodus ejus daret simul quadrationem, quando est possibilis, [ut verba innuere videntur] maximi utique momenti foret: Verum hoc difficile puto. Præclara est Tua contra ejus excusationem instantia. Inter inquisitione dignissima foret in Geometria, producere quod in Circulo, Hyperbola, & Ellipsi quodammodo incipitur. Nam Circulus sectorum magnitudine exhibet sectionem anguli; Hyperbola sectionem rationis seu logarithmi. Non dubito jam, quin porro certo ordine exurgant altiores lineæ alias sectiones exhibituræ.

. . . .

Si Dominus NIEUWENTIIT non vult, aut non potest, capere meliora, & tamen pervicacem se se ostendit; tractandus est instar hæretici, quem, post unam alteramve admonitionem, devitandum esse Scriptura docet. Vellem ipsi responderet Dominus CLUVERIUS; jucundum id futurum esset. Vale.

Dabam *Guelferbyti* 28. Decembr. 1696.

Deditissimus

Godefridus Guilielmus LEIBNITIUS.

EPIS-

EPISTOLA XLI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad praecedentem.

De quantitatum logarithmicalium summatione. De seriebus. Cycloïdis segmenta innumera quadrabilia. De TSCHIRNHAUSIO. *De tentamine quodam solutionis Probl. celerrimi descensus. Dni.* Sauveur *scheda de Problemate Celerrimi descensus.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

AD Novissimas Tuas nudius-tertius acceptas, ita statim respondeo. En exemplar Programmatis *, per quod prorogationem termini Mathematicis significo. Neuter nostrum erravit in summanda $l(1+x)^n . x^e\, dx$; quin egregiam potius logomachiam commisimus, dum alter alterum non intelleximus. Tibi enim $l(1+x)^n$, erat Logarithmi potestas, mihi autem Potestatis Logarithmus. Hinc deliberandum do, annon satius esset ut ad evitandam confusionem illud ita scriberetur, $l^n(1+x)$ hoc autem sic $l(1+x)^n$. Nec-dum tamen bene se habet $\int l^n(1+x)\, x^e\, dx = l^n(1+x).(1+x)\, x^e - n\int(l^{n-1}(1+x)\, x^e\, dx) - e\int(l^n(1+x)\, x^{e-1}\, dx)$: videtur loco ultimi membri poni debere $- e\int(l^n(1+x)(1+x)\, x^{e-1}\, dx)$. Videbis, si denuo ultimas meas examinare placeret, hoc sensu mihi nullum ut suspicaris, contigisse calculi errorem. 1696 Januar.

Optime dicis expressiones illas in infinitum tendentes Series proprie non esse dicendas, aptius ita scriberentur, &c. $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b}}}}$, pro-

* Opp. Tom. I. N°. XXXIII. pag. 166.

1696 Januar. procedendo a dextra ad sinistram; unde ridicula comparatio mihi venit in mentem, quasi hujusmodi Series æternitatem, ut ita dicam, præteritam, vulgares vero futuram repræsentarent. Cum *Parisiis* degerem, memini aliquid vidisse à Domino ROLLE & LAGNY [nescio an sit idem qui LANION] circa appropinquationes radicum, quod nitebatur fonte, ut vocas, implicationum. Sed ROLLE pro cubicis absurdos committebat paralogismos, quos etiam correxi, & methodum correctam Dno. HOSPITALIO exhibui. †

Cum GRONINGIUS ad Te scripserit, nihilne attigit de Manuscriptis *Hugenianis* mihi promissis. Potuisses ipsi indicare, me infinita spatia Cycloïdis vulgaris quadrabilia invenisse, præter illa duo a Te & HUGENIO reperta, quod forte etiam in *Actis* ostendam. Non erat cur GRONINGIUM celares novum meum Cycloïdis usum pro celerrimo descensu; hic enim ipsi ipsemet ego rem aperui, persuasus scilicet ejus *Historiam* ante terminum elapsum lucem non aspecturam.

Legi & relegi schediasma Dni. TSCHIRNHAUSII, * sed fateor nulli ex nostris objectionibus satisfecit; multa dicit, sed nihil dicit; affectat nescio quam obscuritatem, qua errores suos palliare satagit, & simul sua mysteria pomposis verbis, ut Alchymistæ solent, promittit usque & usque, nihil tamen unquam producit; si planam adeo habet Methodum Tangentium inversam, ut ipsi jam sit lusus puerilis, quidni se accingit Problemati celerrimi descensus.

Sub finem loquitur de quodam specimine quod, jam ante biennium, Tecum, ut dicit, communicavit: gestio scire quid sit, an inde probabile videatur rectangula rectarum se intersecantium, non solum in circulo & illis curvis, quas ego determinavi, sed in omnibus omnino curvis esse æqualia. Interim falsum hoc esse perfacile demonstrarem, nisi id velit intelligere de duabus rectis tantum; uti innuere videtur, quando ait, certissimum id esse in tribus sectionibus conicis: hoc autem cum hic nihil faciat ad rem, facile largior: non enim duabus dumtaxat, sed infinitis, imo omnibus rectis

† Opp. Tom. III. N°. CXLIX. L. 50. & seq. pag. 529. & seq.

* *Responsio ad Observat. DD.* BERNOULLIORUM. A. E. 1696. Nov. p. 519, & Joh. BERNOULLI Opp. N°. XXXIV, pag 170.

rectis ex eodem puncto redeuntibus æqualitas rectangulorum competere debet. 1697 Januar.

Mitto ecce; [rogo remittas] Scriptum certi cujusdam Mathematici Salvatoris, quod Dominus *Marchio* mihi communicavit, ubi Auctor erroneam quamdam solutionem mei Problematis exhibet: nihil magis miror, quam quod Dominus Hospitalius eam, ... adeo laudarit, & ...... errores quibus evidenter laborat, non animadverterit. Quærit enim primo, quod non est in Quæstione, curvam scilicet de qua non est sermo; & deinde peccat in principia Calculi differentialis, quando considerat duas lineas, angulum infinite parvum constituentes, ut absolute parallelas. Falsitas hujus solutionis vel ex eo solo patet, quod juxta determinationem geometricam tangentis curvæ quæsitæ, art. 5. hujus scripti traditam, sequitur, dari quosdam casus, in quibus Problema esset impossibile; facile autem percipitur, in omni casu esse possibile.

Dominus Nieuventiit utique responsione non dignus est; ipsi tamen forsan respondebo § circa æquationes saltem exponentiales, quia ibi etiam mea res specialiter agitur; non tam illius in gratiam, quam Publici, quod hactenus exponentialium tractationem nondum satis vidit. Cur dicis, quod velles ipsi responderet Cluverius, quod jucundum id foret, Cum tamen Cluverii nullam mentionem faciat? An alias hi duo mutuis elogiis scilicet se extulerunt? Vale, & cum novo anno nova fruere sanitate.

Amplitudinis Tuæ

Jan. 1697.

Observantissimus
J. Bernoulli.

§ *Principia calculi exponentialium sive percurrentium.* Act. Er. 1697. Mart. p.125. vel Opp. Tom. I. N°. XXXVI. pag. 189.

Scheda Dni SAUVEUR *Latine Versa*

PROBLEMA.

TAB. IX. D*Atis* (Fig. 48.) *punctis* A, B; *invenire curvam* AB, *talem, ut ipsam describens Corpus grave minimo tempore ab* A *ad* B *perveniat.*

LEMMA.

TAB. IX. *Si grave unum* (Fig. 49.) *descendat per* AB; *aliud vero per* ADB: *invenire rationem temporis per* AB *ad tempus per* ADB.

Agantur horizontales rectæ BC, DF; capiatur AG media proportionalis inter AF, AB; ducatur GE horizontalis.

Dico tempus per AB ad tempus per ADB esse ut AB ad AE + HB.

NB. Tempus per AB designetur per $\overline{AB}$, & $\frac{AD}{\overline{DB}}$ designet tempus per DB post descriptam lineam AD.

Nam $\overline{AB} : \overline{AC} = AB : AC$

& $\overline{AC} : \overline{AD} = AC : AE$. Ergo ex æquo

$\overline{AB} : \overline{AD} = AB : AE$ *

Rursus $\overline{AB} : \frac{AF}{\overline{FB}} = AB : BG$

& $\frac{AF}{\overline{FB}} : \frac{AD}{\overline{DB}} = BG : BH$. Ergo ex æquo

$\overline{AB} : \frac{AD}{\overline{DB}} = AB : BH$ * Et addendo * cum *

$\overline{AB} : \overline{ADB} = AB : AE + BH$

Sequitur 1°. si sit BF infinite parva, DE = EC, & DH = HB; adeo ut secandæ modo sint bifariam lineæ DB, DC in H & E.

2°. Si BC sit infinite parva, DC erit parallela ipsi BF.

PRO-

PROPOSITIO.

Detur (*Fig.* 50.) AB, BL horizontalis, normalis FL. Bissecetur FB in G agaturque GL. Ducantur AC, DB, EH horizontalis. Agatur AC ipsi AC infinite vicina, Bd, & eh horizontalis. Demittantur perpendiculares HP, DR, ES. Pono DF & BC infinite parvas primi gradus, & quæratur situs linearum AD, DB ut minimo tempore percurrantur. TAB. IX

Hunc in finem, quæritur AE + HB minimum.

1°. Obliquarum AD, Ad excessus supra perpendicularem AF est infinite parva quantitas secundi gradus, respectu ipsius AB: igitur negligenda respectu ipsarum DE & HE, quæ sunt primi gradus.

2°. DC, & dc sunt ipsi FB parallelæ: ideo bisecantur in E & e, uti & DB, dB in H & h, & BR in P. Igitur $Ph = \frac{1}{2} Rd$.

3°. Dum AC abit in Ac, DE evadit de, ejusque different. est $- Se$, & BH evadit Bh, ejusque differ. est $Ph = \frac{1}{2} Rd$: quæ differentialia ponenda sunt æqualia, ut habeatur ipsius AD situs quæsitus.

4°. Triangula ESe, LFG similia sunt, quemadmodum & DRd, BFD.

$$\text{Ergo } eS : SE\ (Dd) = GF : FL$$
$$Dd : Rd\ (2Ph) = BD : DF$$
$$\text{Igitur multipl. } eS : 2Ph = GF \times BD : FL \times DF$$
$$\text{id est, } eS : Ph = BF \times BD : FL \times DF$$
$$\text{Est autem } eS = Ph, \text{ (hyp.). Igitur } BF \times BD = FL \times DF,$$
$$\text{Ergo } FL : BF = BD : DF.$$

estque hic lineæ AC situs quæsitus, tuncque BD tangit curvam quæsitam.

5°. Geometrice ducitur hæc tangens BD, descripto (*Fig.* 51.) super AB semicirculo, ductis verticali BT, & ad ipsam AB normali AT, inscribendo in semicirculo rectam AV æqualem ipsi AT, & ducendo BV. Hæc enim ipsa tangens est. TAB. IX.

 Nam,

Nam, si capiatur BF infinite parva, & FL normalis, quæ ipsi BV occurrat in D, Triang. LFB, BAT similia sunt, ut & BDF, BAV. Quamobrem $LF : FB = BA : AT\ (AV) = BD : DF$, ut requirebatur.

6°. Habentur subtangentes, ducendo horizontalem XAZ, aut verticalem AP. Sunt enim subtangentes AZ vel AS sumendo A pro puncto fixo, & $AX = x$, $BX = y$, habentur successive AB, $AT = AV$, BV, & tandem AZ. Denique inveniuntur PS & AS.

Per subtangentes reperitur æquatio inter dx & dy, atque integrando æquatio ad curvam. Sed multa negotia, quibus distineor, non permittunt ut hisce speculationibus diutius indulgeam.

Parisiis, 26 Dec. 1696.

SAUVEUR.

EPISTOLA XLII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

Tentamen Solutionis Probl. Brachystochronæ refutatur. De SALVATORE, TSCHYRNHAUSIO & GRONINGIO. *Varia.*

Vir Nobilissime & Celeberrime, Fautor Honoratissime.

1697 Januar. SChedam Domini SALVATORIS, Mathematici *Parisini*, cum gratiarum actione remitto. Placet in specimen elegantis & subtilis aberrationis. Nam, ut sæpe dicere soleo, Egregiorum Hominum etiam errata docent. Inter alia autem hinc discimus, quam lubricum sit, uti infinitesimalibus, nisi nostri Calculi filo dirigantur. Pro certo habeo Illustrem Dominum *Marchionem* HOSPITALIUM, si rem voluisset ad calculum redigere, statim errorem fuisse

se deprehensurum. Credo etiam, si valetudo ejus nondum plane 1697
confirmata intentiores istas meditationes pateretur, ipsius Problema- Januar.
tis solutionem non esse ingenium ejus effugituram.

Quod attentatam a Domino Salvatore solutionem attinet; equidem concedi potest, non tantum mediam geometricam & mediam arithmeticam duarum quantitatum infinitesimaliter, seu per inaccomparabile, differentium coincidere, sed & duas rectas angulum infinite parvum facientes haberi posse pro parallelis, dum de alia recta eas secante quoeritur, &, quantum judicare possum, Dominum Salvatorem his regulis male usum non esse. Sed alia sunt, quæ solutioni ejus obstant; nam [ut differam infra notanda, quod rem aliam plane indagat, quam quæ desideratur] reperio, tum neglectum veræ methodi infinitesimalis, tum insufficientem enumerationem eorum, ex quibus aptissimum est eligendum. Neglectus Methodi infinitesimalis in eo consistit, quod re eo reducta, ut (*Fig.* 50.) $AE + BH$ sit omnium minima, & inde inferendo $dAE = dBH$, necesse est dBH esse infinities infinite parvam, atque adeo & dAE, quorum tamen neutrum in processu hujus solutionis observatur.

Nam omnis quantitas differentialis est utique uno minimum gradu inferior sua integrali. Cum igitur BH, vel ejus dupla BD, sit infinitesimalis primi gradus, utique dBH seu Pb aut ejus dupla dBD seu Rd non possunt non esse infra primum gradum, seu erunt differentio-differentiales ad minimum. Ergo etiam dAE infra gradum primum, seu minimum differentio-differentialis esse debebit. Sed hoc non fit in isto processu, & dAE seu Se est differentialis primi gradus, quod ex ipsomet processu sic colligitur: Triangula ESe & LFG sunt similia. Jam hujus trianguli LFG latera sunt accomparabilia, seu inter se comparabilia, cum omnes angulos habeat assignabiles, ergo & trianguli ESe latera sunt accomparabilia; jam recta Ee est primi gradus, ergo impossibile est ut Se sit gradus secundi, alioqui foret ipsi Ee incomparabilis; Interdum quidem fieri potest, ut differentiæ quantitatum ordinariarum sint secundi gradus, ut ipsarum AD vel Ad quippe angulum ad FDd facientium a recto inassignabiliter differentem, sed ipsarum AF dif-

 feren-

1697 Januar. ferentiæ funt gradus primi, Cum tamen, ut dixi, deberent esse secundi. Imo quod amplius est, ex figura inspecta, processuque solutionis, vides ne ipsas quidem dBH esse secundi gradus, sed primi; quod utique prorsus incongruum est, differentias, seu Elementares quantitates esse homogeneas ipsis terminis, seu quantitatibus integralibus. Id autem sic esse patet. Nam Rd dupla ipsius dBH, seu ipsius Pb est primi gradus; ergo & ipsa dBH. Ipsam autem Rd primi gradus esse eodem modo probo, ut ante. Nam, per ipsum solutionis processum, triangulum DRd simile est triangulo BFD; hujus autem anguli sunt assignabiles; ergo latera accomparabilia. Itaque & trianguli DRd latera sunt accomparabilia. Jam unum hujus latus Dd est primi gradus, ergo & Rd est primi gradus, non secundi; alioqui ipsi Dd inaccomparabile foret. Patet ergo neglectus veræ Methodi infinitesimalis.

Quid vero, si quis dicat, Cc, Dd, Ee, esse secundi gradus? Respondeo hoc esse contra mentem authoris; qui simpliciter dixit C & c infinite vicinas esse; quod utique intelligitur de primo gradu; & alioqui admonuisset de secundo, ut alio loco fecit. Si quis tamen ad secundum gradum confugiendum jam putet, ne sic quidem effugiet, incidetur enim in defectum imperfectæ enumerationis, de quo jam dicendum. Nam si d esset vicina ipsi D per intervallum secundi gradus, tantum enim ex sic vicinis, non ex aliis innumeris inassignabilitate primi gradus vicinis aptissimum eligeretur.

Insufficiens quoque enumeratio eorum, ex quibus eligendum est aptissimum, ex eo patet, quod in solutione non eligitur aptissimum ex omnibus punctis possibilibus, sed ex iis tantum, quæ cadunt in rectam D, nam & alterum d assumitur, non ubicunque, sed in recta FD ad AB angulum rectum faciente; ergo si proba essent cætera, sequeretur tamen punctum D non esse electum ex omnibus possibilibus aptissimum, ut desideratur.

Sed si nullum in his omnibus peccatum esset, tamen, ut jam dicere occupavi, id quod indagandum sibi sumit solutio, scopum non ferit, alienumque est a Problemate proposito. A nobis enim quærebatur, ut curva AD una cum sua productione infinite parva

DB

DB daret descensum brevissimum; hic vero indagatur modus effi- 1697
ciendi ut chorda curvæ AD, nempe recta AD cum dicta curvæ Januar.
productione DB sumta descensum brevissimum præbeat, quod est diversissimum.

Quanquam, etsi omnia se se bene haberent, & ad desideratam curvam pertinerent, tamen Problema non esset solutum; tantummodo enim reperta esset aliqua curvæ quæsitæ proprietas secundum suas tangentes; quod quidem non esset contemnendum, saltem enim Problema physicum reductum esset ad Problema puræ Geometriæ; sed non ideo esset solutum, nisi hoc geometrico Problemate soluto. Constat autem quam difficile sit invenire curvas ex datis tangentium proprietatibus, quod Methodum tangentium inversam vocare solitus sum; & licet possit inveniri valor differentialium, seu ratio dy ad dx in ordinariis; non tamen inde semper calculum summatorium instituere, seu terminorum integralium relationes invenire in potestate est. Et quanquam concedi possit hæc Problemata aliquo modo pro solutis habenda esse, quando redacta sunt ad quadraturas, cum scilicet demonstratum est, esse transcendentalia, constat tamen rationem hæc præstandi nondum extare. Itaque hanc solutionem a Domino SALVATORE tentatam, a vera multis modis abesse fatendum est. Agnosco tamen non contemnenda, nec vulgaria eum specimina etiam hic dedisse ingenii & acuminis; ac non procul abesse a regno cœlorum Mathematicorum, si ita de nostris rebus jocari fas est. Non memini me quicquam vidisse ab eo editum: obversatur tamen animo nescio quid, ut videar mihi caracterem manus ejus agnoscere.

Cum *Parisiis* essem, videbam subinde juvenem *Lugdunensem* peringeniosum, & singulari acumine in interiora etiam Analyseos & Geometriæ penetrantem; sed ille ni fallor discesserat, dum adhuc essem *Parisiis*. Vix tamen mihi tunc occurrerant in *Gallia*, qui aptiores quam ille viderentur ad hæc studia excolenda. Nominis non memini, ac proinde dicere non possum, an sit hic ipse Dominus SAUVEUR; nosse velim, an sit in Academia Scientiarum Regia, aliudve munus gerat? sed quicunque sit, certe insigne aliquid præstare posse videtur. Memini legere olim in *Diario Eruditorum*

1697 Januar. *ditorum Parisino*, ipsum circa ludum *Bassettæ* aliquid mathematice fuisse meditatum, † quod tamen non vidi. Optarem vel ipsum vel alium aliquem ludos omnis generis mathematice tractare, & tam regularum, sive legum rationem reddere, quam artificia primaria tradere. Dici non potest quam multa ad Artem inveniendi utilia lateant in Ludis. Cujus rei ratio est, quod homines in jocosis ingeniosiores quam in seriis esse solent, cum magis nobis succedant quæ cum delectatione peragimus. Vale,

Dabam *Hanoveræ* 29. Januar. 1697.

Deditissimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

P. S. Habes sententiam meam de solutione a Domino SALVATORE tentata. Putem cavendum Tibi esse, ne dum defectus ejus indicas, veram solvendi rationem invitus demonstres. Et quidem quod Dominum *Marchionem* HOSPITALIUM attinet, putem optime Te facturum, si solutionem veram ipsis communices, siquidem eam ipse desiderat; præsertim cum ipsi a morbo gravi restituto, ne suadendum quidem sit ut hæc meditetur. Puto vere a Te dici nomen illi Appropinquatori cum Dn. ROOLLE concertanti non esse LANION, sed LAGNI, & a me vicina nomina fuisse confusa. Vellem Dominus TSCHIRNHAUSIUS excitari se pateretur, ad edendum aliquid in nostris studiis se dignum; habere enim talia non dubito. Sperabam objectiones vestras hunc effectum habituras, sed hactenus declinavit. Fortasse dabit tandem manus. Non memini distincte Theorematum, de quibus loquebatur cum hac transiret. Quæ elegantiora mihi videbantur, pertinebant ad Polygona circulo inscripta & circumscripta. Nihil mihi scripto consignatum dedit, unde miror quod, in schediasmate suo, de nescio qua communicatione mihi facta mentionem facere voluerit. Talia sic dicere, perinde est ac si non dicas. Certe aliquid inde duci posse ad sol-

venda

† *Journal des Sçavans* 1679. 4. Journ. du 13. fevr.

venda Problemata, qualia a Te novissime proponuntur non puto. 1697
Etiam Domino HUGENIO talia quædam exposuerat, (nam hac Januar.
transiens ad Batavos tendebat;) sed is mihi scripsit, se se magnas consequentias, quas exinde deducere vellet Dominus TSCHIRNHAUS, non videre.

Dominus GRONINGIUS nihil vel de Te, vel de Manuscriptis *Hugenianis*: unde ego quoque dissimulavi talia mihi ex Te esse nota, quæ ipse attingere noluerat. Præsertim cum se se novam *Newtoniani* Operis editionem moliri scripserit: quam tamen dissuasi, quod de ea cogitare NEWTONUM ipsum intellexissem. Et suspicor *Hugeniana* ibi adjicere voluisse. Quod si iterum scribat, videbo an commode efficere possim, ut hæc nobis communicet; præsertim si editionis cogitationem deposuerit. Etsi autem scribas, potuisse me significare ipsi usum Cycloïdis ad Problema Tuum; ego tamen si fecissem, Te inconsulto, putassem fecisse me reprehensibiliter: cur enim arcanum tuum ipsi crederem, quod si ipsius neglectu, vel studio, ad alios emanaret, merito de me queri potuisses. Nec refert quod ille Librum suum tam subito editurus non est; potuisset enim rem aliis communicare aliter quam per librum, nec mihi ille satis est notus.

. . . .

NIEUWENTIITIUS contra CLUVERIUM in primis suis opusculis scripsit. Id puto Domino CLUVERIO non satis esse exploratum; alioqui fortasse respondisset. Idque non injucundum esse futurum; si modo acerbitas absit.

EPISTOLA XLIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad praecedentem.

De eodem tentamine solutionis Prob. Brachystochronae. De SALVATORE. *De ludis & arte conjectandi. De Probl. celerrimi descensus. De* TSCHIRNHAUSIO & GRONINGIO.

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1697 Febr. NOn improbavi quod Dominus SALVATOR duas rectas AC, A*c*, angulum infinite parvum constituentes assumserit pro parallelis; hoc enim non concesso, pleraque nostra caderent; sed illud falsum puto, quod quasi absolute parallelae essent, inde conclusit (*Fig.* 50.) duarum illarum linearum partes DC, *dc*, bifariam divisas esse in E*e*, per lineam GL; cum tamen differant divisiones istae a veris bisectionibus, quantitate quidem incomparabili cum DC, sed tamen comparabili cum P*h*, vel R*d*; ita ut non legitime inferri possit, Ergo $Ph = \frac{1}{2} Rd$; quamvis alias hoc verum sit, si [non attendendo ad lineam GL, ut ipse SALVATOR in subsequentibus facit] modo supponantur DC, *dc*, exacte bifariam divisae in E*e*. Quantum ad Tuas objectiones, in eumdem fere modum ego objeceram. Et quidem primo intuitu videbam SALVATOREM quaerere aliquam curvam, quae non est in quaestione, quod Domino *Marchioni* eadem hora, qua accepi solutionem *salvatorianam* rescripseram, ut &, ni fallor, Tibi in praecedentibus meis. Sed ecce, ut Dominus *Marchio* ad hanc objectionem reposuit. *Lorsque Monsieur* SAUVEUR *m'aporta sa solution, j'étois*, &c. Eamdem insufficientem enumerationem eorum, ex quibus aptissimum est eligendum, etiam a me fuisse animadversam

TAB. IX.

sam in SALVATORIS solutione, colligere poteris ex iis, quæ Domino HOSPITALIO respondi, quorum studio descriptionem retinui, ne forte alia quam quæ revera objeci, mihi affingi possent: En autem propria mea verba, ut videas, an quid insit veritati non consentaneum. *Je soutiens encore, que les lignes que Monsieur* SAUVEUR *suppose coupées en deux également*, &c. 1697 Febr.

Cæterum peibene observasti in SALVATORIS solutione neglectum veræ methodi infinitesimalis, dum ille confundit diversorum graduum differentiales; aliquando scilicet differentialem quantitatis infinite parvæ cum differentiali quantitatis finitæ, quæ duæ differentiales ad minimum uno gradu differunt: responderi quidem posse ipse notas, quod quantitates finitæ quandoque differre possint differentiali secundi gradus, sed id isto loco non quadrat, nisi statuatur angulus EAe [in fig. prima] infinities infinite parvus. Optima mihi videtur via, quando aliquid quærendum circa quantitates finitas & infinite parvas, ut primo omnes quantitates statuantur finitæ, ut hic BF, quam considerarem tanquam finitam; unde communi modo indagarem quantitatem anguli FBD: quo generaliter cognito, fac in æquatione $BF = 0$, & sic prodiret quantitas anguli FBD; & per consequens positio lineæ, quam Dominus SALVATOR quærit pro tangente curvæ suæ.

Largior quidem in istis, quæ dedit Dominus SALVATOR multum ingenii & acuminis inesse, patet tamen etiam illum nondum possidere genuinam methodum talia tractandi, sed quasi in tenebris palpare, cum interdum quærat per longas ambages quod uno ductu calami absolvi potest; teste Problemate æquilibrii, * quod in casu simplicissimo, post 27 analogias institutas, nondum ad finem perducere poterat, cum tamen nil facilius fuerit, licet generaliter proponatur. Interim non dubito egregia ab eo exspectari posse, si modo strenue hisce vacare velit. An sit in Academia Scientiarum ignoro: puto tamen non esse, cum enim *Parisiis* essem, ne nomen quidem audiveram. Quis sit, quidve muneris gerat ex HOSPITALIO rescifcam. Ipsum circa Ludum *Bassetæ* aliquid Mathematice fuisse meditatum nesciebam; id videre optarem; nam *Fra-*

* *De quo* Epist. VII.

1697 Febr. *ter* meus jam a longo tempore Opus molitur, quod *Artem conjecturandi* inscribet, ubi non solum omnivarios Ludos Mathematice tractandi, sed etiam alias in omni vitæ genere probabilitates ad calculum revocandi modum traditurus est. Nescio autem annon opus reliquerit imperfectum; saltem mea, quæ olim contuli, ipseque non spernenda judicavit, jam vix non expunget,..........
Cæterum diu est, quod Dominus HUGENIUS aliquid exhibuit de *ludo Aleæ*; item in operibus Mathematicis in folio [*Ouvrages de Mathématiques*] quæ paucis abhinc annis prodierunt *Parisiis*, aliquid videre est a FRENICLIO de combinationibus, ubi etiam agit de Sorte investiganda certantium circa Electionem Senatorum *Genuensium*.

Ex quo unam alteramve proprietatem curvæ celerrimi descensus subindicavi Domino *Marchioni* HOSPITALIO, de novo sperat, se penetraturum ante Pascha in solutionem meam, itaque oblatam ipsi mittere differo, donec rursus petat. *Je vous prie,* [inquit] *de ne me point envoyer vos solutions, si elles ne sont pas encore parties; parce que cela m'ôteroit le plaisir de pouvoir penser à vôtre Probléme, que je trouve de plus en plus curieux; je vous prie seulement de les tenir toutes prétes pour me les envoyer dans le terme de Paques, qui est celui que vous avez fixé.*

Ex *Hollandia* mihi rescriptum est Dominum MACKRELIUM, viso meo Programmate nuper impresso quo Problema istud Eruditis propono, pro responso hoc tantum dedisse; *Que cela étoit bon pour les Allemans, mais que les Hollandois n'y répondroient pas.* Tale judicium à sutore ultra crepidam judicante parum moror. Credo enim HUGENIUM, Mathematicorum *Hollandorum* maximum, si viveret, aliter fore judicaturum. Interim rescripsi, ut ipsi indicetur, si solutionem intra terminum propositum dederit, se centum florenos à me obtenturum; ne Problema tanquam inutile quid infra dignitatem suam æstimet, cui solvendo ne opellam quidem perdere dignari velit.

Hisce diebus aliquid ad *Acta* misi de Calculo exponentialium; * quod

* *Principia Calculi exponentialium seu percurrentium.* Acta Erud. 1697. Mart. pag. 125. Opp. Tom. I. N°. XXVI. pag. 179.

quod pro responsione inserviet ad ea quæ Dominus NIEUWENTITIUS circa hanc materiam de novo opposuit. Spero illum tandem acquieturum censuræ satis severæ, nisi severiorem amaverit. Eo ipso schediasmate respondi etiam Domino TSCHIRNHAUSIO, sed longe modestius, ita ut hoc forsan ipsum sit fortius excitaturum ad edenda quæ premit. 1697 Febr.

Male sibi consulit Dominus GRONINGIUS, si Operis *Newtoniani* èditionem recudendam in se suscipit: quid enim expectandum ab homine qui talia non intelligit, imo quem vix communis Geometriæ limina transgressum credo? Tecum suspicor *Hugeniana* ibi adjicere voluisse; forsan quia videbat, cum hic esset, me nonnullo desiderio teneri illa obtinendi, atque sic thesaurum sibi esse non mediocrem, quem Orbi Litterato impertiendo, miror quantum de Publico mereri putabit. Hinc non operæ pretium duco, ut novas apud illum instantias facias, nisi ultro communicaverit. Remitto hic schediasma *Tschirnhausianum*, maxima cum gratiarum actione; plura hac vice scribere nequeo, Vale.

Amplitudinis Tuæ

Obsequentissimus

J. BERNOULLI.

EPISTOLA XLIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad praecedentem.

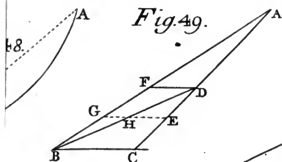
De NIEUWENTIITIO. *De Probl. celerrimi descensus. De Curva segmentorum, i. e. illa quae rectas per datum punctum actas ita secat, ut segmentorum datae potestates datam summam efficiant.*

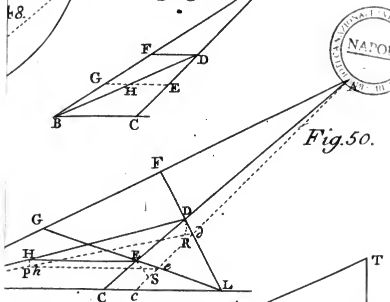
Vir Nobilissime & Experientissime, Fautor Honoratissime.

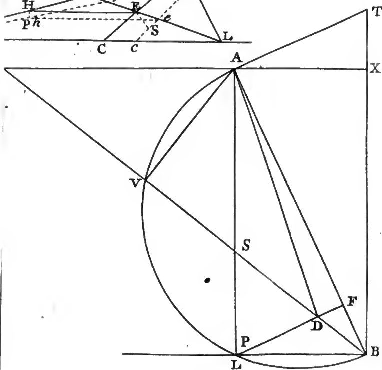
1697 Febr. CRedo ipsum Dnum. SALVATOREM, intellectis judiciis, assensurum longe se se adhuc a proposito Problemate abfuisse. Itaque non est quod ejus tentatae solutioni amplius immoremur. Verissimum est ne illi quidem curvae exhibendae sufficere, quam quaesisse videri possit, & quae vereor ut sit possibilis, aut intelligibilis.

Domini NIEUWENTIIT *Considerationes secundas* accepi tandem, missu ipsius, ut videtur, Auctoris, etsi ipse non apparuerit. Nam Bibliopola *Batavus*, cum alios libros *Hanoveram* mitteret, hunc extra ordinem adjecit, suggerente opinor Auctore, vel ejus amico. Dici non potest, quam jucunda mihi fuerit harum considerationum inspectio, & quam effusos risus expresserit; usque adeo nugas agit Vir bonus. Exempli causa, vult numerum infinitum unum alio non esse majorem: Esto numerus infinitus m. Jam ipse agnoscit in calculo dari $2m$; unde sequitur utique $2m$ esse majorem quam m, cum $2m$ sit duplus ipsius m. Hic noster respondet, negando $2m$ esse duplum ipsius m. Et ut absurditatem cumulet absurditate, rationem reddit suae negationis, nempe $2m$ non fieri multiplicando numerum m per numerum 2, sed multiplicando numerum 2 per numerum m. *Spectatum admissi risum teneatis amici.* Qui talia concoquere potest, ab eo quis demonstrationes severas exigi ferat? *Quis tulerit Gracchos de seditione querentes?* Itaque constitui pro responsione, haec & similia quaedam, verbote-

nus


Fig. 49.
48.
A
A
F
D
G
H
E
B
C


Fig. 50.
A
F
D
G
R
H
E
P h
e
S
L
C
c


T
A
X
V
S
F
D
P
B
L

nus excerpta, ad *Acta* mittere, judiciumque relinquere Lectori, annon talia recitasse sit refutasse. Vellem mihi datum fuisset inspicere quæ pro *Actis* contra eum mittis. . . . . . . 1697 Febr.

Si qui in *Batavis* Problema Tuum se indignum dicunt, næ illi vel rem non intelligunt, vel vulpem imitantur, quæ pyra, cum attingere non posset, acerba esse dicebat. Dnum. MAKREELIUM scio Dno. NIEUWENTIIT esse amicum; nam hic facit illius mentionem, & ille hujus Libellum priorem mihi, per quemdam iter hac facientem misit: sed non putabam, sive affectu erga amicum, sive invidia erga alios, eo se abripi passurum, ut res pulcherrimas contemneret, cum famæ suæ jactura.

Certe si HUGENIUS viveret & valeret; vix quiesceret nisi Problemate tuo soluto. Nunc nemo est a quo solutionem facile expectem, nisi a Dno. *Marchione* HOSPITALIO, aut a Dno. *Fratre* Tuo, aut a Dno. NEWTONO, quibus adderem Dnum. HUDDENIUM Consulem *Amstelodamensem*, nisi dudum has meditationes sepofuisset. Aliorum nescio an quisquam toto Orbe nunc Problemati isti par sit. Uret interim *Batavos* istos & horum similes nobis invidentes, quod Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS tam candide de methodis nostris judicavit. Repeto autem, quod initio dixi, recte facturum Te, si eam tantum partem solutionis Tuæ edas, quæ Analysin adhuc nonnihil involvit methodo, quam vocas indirectam. Mihi enim, nescio an & Tibi, consultum videtur nondum in interiora admittere homines ingratos, & beneficium postea strenue dissimulaturos.

Gratias Tibi debeo, quod in Programmate Tuo † honorificam mei mentionem facis. Problema quod subjecisti pure Analyticum * nuper, otium nactus in itinere ad nundinas *Brunsvicenses*, consideravi in curru solus, & viam solvendi reperi, nescio an Tuæ vel *Fermatianæ* affinem; certe expeditam & commodam, & ni fallor generalem.

Videtur autem Tua solvendi ratio non omnes curvas complecti, quæ quæsito satisfaciunt. Exempli gratia, cum curva quæritur, cujus

† Opp. Tom. I. N°. XXXIII. pag. 166.
* Ibid. pag. 169.

1697 Febr. cujus rectangulum sub segmentis æquatur constanti, retentis Tuis valoribus pro x & y, in *Actis Junii* proximi, satisfaciet curva, in qua sit $y = bxx : (xx + bc)$ posito bc esse valorem rectangulorum constantem. Hæc autem curva in Tuarum numero non continetur, talesque alias possem assignare infinitas. Sed & Problema quod in *Actis Junii* proponis & in Programmate per transcendentes a Te solvi ais, potest solvi per ordinariam quoque. Sed venio ad Problema, cujus solutionem generalem Analystis proponis. Sit potentiæ segmenti exponens e, segmenta ipsa sint DB & D [B], posito punctum constans esse D, & puncta, quibus recta per D curvæ occurrit, esse B & [B], & desiderari ut $DB^e + D[B]^e$ sit æqual. constanti b. Dico, retentis valoribus tuis ipsarum x & y, quæsito satisfactum iri si fiat $y = (x^{2e+1} - bx^{e+1}) : C$. Quanquam adhuc aliis modis infinitis itidem generalibus satisfieri, & ad formam Tuæ, etiam Series satisfaciens concinnari possit, plus minusve pro arbitrio producenda. Ita vides me, in Tui gratiam, etiam hoc Problema tentasse; sed vix talia ultra promittere ausim. Atque adeo ut vetulus ille athleta Virgilianus; ***hic cestus artemque repono.*** Vale

Dabam *Hanoveræ* 23. Februar. 1697.

Deditissimus
G. G. LEIBNITIUS.

EPIS-

EPISTOLA XLV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad Epistolam *Bernoullianam*, quæ deest.

De Solutione Hospitaliana *Probl. celerrimi descensus.*

Vir Nobilissime & Celeberrime! Fautor Honoratissime!

PEr novissimum Cursorem ad Te dedi litteras, quas redditas non dubito. Nunc vel ideo scribo, ut *Hospitalianas* a Te acceptas statim remittam. Suspicabar Dnum. *Marchionem* HOSPITALIUM [cui de successu gratulabor] Problematis Tui solutionem tandem esse reperturum, ubi animum intenderet, ut ex novissimis meis videbis; interim non dubito Tuis litteris multum fuisse adjutum, unde id ipsum fortasse hausit, quærendum esse $\int y^{n} \, ds$ minimum. Dubitatio quidem Tua, de legitimitate ratiocinationis qua utitur, ratione non caret. Revera enim posito ds elemento curvæ, & ejus distantia ab horizonte posita y, & pondere quo gravatur unumquodque corpus posito $y^{n-1} ds$; momentum curvæ ex axe erit summa factorum ex pondere ducto in distantiam, seu $\int y^{n} ds$; sed hinc non statim sequitur, centrum gravitatis curvæ sic oneratæ per y^{n-1} maxime descendere, cum distantia Centri gravitatis sit momentum semper divisum per pondus totum $\int (y^{n-1} ds)$.

1697 Febr.

Verum enimvero, quia pondus absolute sumtum potest intelligi datum, Problemate ita concepto, ut quæratur curva, quæ datum pondus data lege distributum per ipsam quamproxime horizonti admoveat, ideo res succedit feliciter, & dum momentum fit

1697 Feb. minimum, etiam centrum gravitatis maxime descendit. Et vicissim si curva detur, cujus sic oneratæ centrum gravitatis maxime descenderit, etiam momentum maxime descendet, adeoque erit $\int y^n ds$ minimum, unde cætera consequuntur.

In Catenaria fit $n = 1$, unde fit $\int y ds$ minima, data $\int y^{n-1} ds$, seu data $\int ds$, seu data s curvæ magnitudine.

Catenariam, seu funiculariam, sine tangentium consideratione, ex sola consideratione maximi descensus dari posse non est dubium; sed cum talia per Seriem quærerem, de maximis istis nondum satis eram meditatus.

Olim cum Catenariam nostram tractarem, notaveram in schedis ejus exemplo multa alia hujusmodi Problemata maximorum vel minimorum a curvis præstandorum posse solvi, & ad tangentium viam reduci; sed postea, cum Problema Tuum aggrederer, jam sciebam id non esse opus, & via hæc nonnihil est indirecta; sed abrumpo coactus, ut hoc cursore Tibi Tua remittam. Vale & fave.

Hanoveræ, 26. Febr. 1697.

Deditissimo

Godefrido Guillelmo LEIBNITIO.

EPIS-

EPISTOLA XLVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De Arte conjectandi. Varia.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

VEnit etiam in mentem rurſus quod de Domini *Fratris* tui *Arte conjecturarum* ſcripſeras; ea erit haud dubie non contemnenda. Ego quoque talia jam olim ſum meditatus; præſertim in uſum Juriſprudentiæ & Politicæ. Voco Doctrinam de gradibus probabilitatis. An Dnus. *Frater* tuus aget etiam de arte, quam vocant, deciphrandi, quæ utique a Mathematico tractari meretur: Ea quæ hactenus in eam rem extant, parvi ſunt momenti. Vellem etiam oriretur aliquis qui mathematice tractaret omne genus ludorum. 1697 Mart.

In Problematis tui Analytici ſolutione fortaſſe rectius ſigna mutaſſem & dixiſſem $y = (-x^{2e+1} + b x^{e+1}) : c$. Revera tamen nihil refert, quæ ſigna ſumas, cum in arbitrio ſit facere c quantitatem negativam. Dominus Lic. MENCKENIUS hæret nonnihil, veretur que ne tua in NIEUWENTIITIUM ſint aſperiora. Ego, quanquam non viderim, quæ in eum ſcripſiſti, reſpondi tamen mihi videri non plane illi impune eſſe debere, quod tot tantaque abſurda in brevem libellum congeſſit; ne exemplo ejus incitatus ignariſſimus quiſque de rebus non intellectis ſcribere cavillarique audeat.

Etiam Dnus. *Frater* ad me ſcripſit, Problema tuum ſibi eſſe ſolutum, & mox alia difficiliora a ſe propoſitum iri; quod bene vertat: Miſit ſolutionem ad Dnum. MENCKENIUM; qui dubi-

tat an lapsus termini sit expectandus, ut edatur ea solutio. Respondi haud dubie eousque differendam editionem, ne alii se praeventos querantur. Vale,

Dabam *Hanoveræ* 5. Martii 1697.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA XLVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad praecedentes.

De NIEUWENTIITIO. *De Probl. celerrimi descensus. De Catenaria per maximum Centri gravitatis descensum determinanda. De Curva segmentorum.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1697 Mart. Binas Tuas novissimas successivis Cursoribus recte accepi. Quæ notas de NIEUVENTITII *Considerationibus*, & ego notaveram; tot tantasque ineptias ibi contineri, (ut dixeram) Tibi imaginari non poteras, antequam illas vidisses; jam vero spectatum admissus, nec ipse risum tenes. Ridiculam illam distinctionem inter $2 \times m$ & $m \times 2$, quorum illud possibile, hoc impossibile dicit, etiam in excerptis, quæ Tibi sub involucro ad Dnum. MENCKENIUM transmiseram, tanquam mirabile quid, & in Mathesi inauditum notavi; sed tamen laudando Virum ubique; affectabam enim nudam & historicam relationem scripti hujus, qualem Dominus MENCKENIUS, velut a suis excerptoribus, factam desideraverat. Nescio quo fato accidit, ut hæc excerpta nondum acceperit

acceperit, uti ex ejus noviſſimis intelligo: ſi nondum miſeris, rogo quantocius mittas, una cum incluſis hiſce, quo ſuſpicionem ſuam videat eſſe vanam, dum ex ſilentio meo credidit me admonitione ſua, ut cum NIEUWENTITIO mitius agerem, offenſum fuiſſe. Sed ecce quod jam maxime miror in Litteris Dni. MENCKENII, quando ſcribit, ad manus ſuas perveniſſe *ſecundas* iſtas *conſiderationes*, ſed plane nihil ibi deprehendiſſe cenſura adeo ſevera dignum; Auctorem omni modeſtia & honeſtate, imo non-niſi honorifice Tui noſtrique mentionem facere, &, quod plus eſt, ſibi conſultius videri, ut huic adverſario publico ſcripto reſpondeam; ut verbo dicam; Dus. MENCKENIUS meam reſponſionem [ſane non eſt reſponſio, ſimpliciter enim inventa mea expono, ubi ad objectiones *Nieuwentitianas* non-niſi incidenter reſpondeo] *Actis* inſerere declinat; idque, uti dicit, Tui præcipue cauſa; ſe enim non dubitare, quin Tibi ſit ſumme diſplicitura rigida nimis caſtigatio. Tanta tamen non eſt, qua non graviorem meruerit. Vellem ut Dnus. MENCKENIUS meum ſchediaſma [ſi imprimere nolit] Tibi videndum communicaret, quo ipſe deliberares an ſupprimendum eſſet. . . . . 1697 Mart.

Mihi perinde eſt, ſive contemnat, ſive æſtimet meum Problema MACKRELIUS. . . . .

Quidni addis etiam WALLISIUM, qui nil non ſolviſſe putat, iis quos Problemati meo pares exiſtimas? Huic, & NEWTONO, utrique bina exemplaria Programmatis mei ſub nudo involucro in *Angliam* tranſmiſi; an autem acceperint, neſcio. Intelligo a Dno. MENCKENIO, perveniſſe nuper a *Fratre* meo ſolutionem; .... ſic ergo duas habemus novas ſolutiones, alteram ab HOSPITALIO, alteram a *Fratre*, quas tamen non haberemus, niſi prior terminus aſſignatus prolongatus fuiſſet......... Puto jam tempus eſſe ut noſtras ſolutiones *Lipſiam* mittas, quo omnes ſimul edantur. Approbo quidquid Tibi viſum fuerit de edenda, vel non edenda methodo mea directa. Schediaſma meum in Tuis eſt manibus; dele quod voles; gratum erit quocunque modo agas; poſſet interim mentio fieri, nobis eſſe Methodum talia directe ſolvendi, quam communicaturos nos eſſe privatim petentibus; non enim

 æquum

1697 Mart. æquum est ut justus cum injusto patiatur, & gratus cum ingrato excludatur.

Ecce jam quo pacto Catenariam vulgarem, sine tangentium consideratione, per methodum hanc directam determino. Esto (*Fig.* 52.) curva quæsita AB, cujus elementum Bb, radii circuli osculatoris LBE, Lbe, secantes horizontalem ER in angulo quocunque; Nunc, ut in curva celerrimi descensus feci, ita & hic, centro L descriptos considero arcus Cc, Bb, Cc; &c. ex quibus eum quæro, qui ductus in suam distantiam, ob humillimum descensum centri gravitatis ab horizonte, faciat minimum; ut habeam relationem inter LB & BE, unde deinde curvæ determinatio. Si ergo LE constans ponatur a, & LB, x: erit BE $a - x$; sint autem Cc, Bb, Cc, ut LC, LB, LC, id est ut x; & CG, BH, CG, ut EC, EB, EB, EB. id est ut $a - x$:, ergo $x \times (a - x)$, seu $ax - xx$, debet æquari minimo; unde invenitur $x = \frac{1}{2}a$. Ex quo nunc colligo curvam funiculariam ABD, esse talem ut radius circuli osculatoris productus ad horizontalem utique bisecetur ab ipsa curva; & hoc perfecte respondet curvæ nostræ olim inventæ. Si enim examinetur, reperietur habere hanc proprietatem, & horizontalem, a qua puncta curvæ distare censentur, esse illam quæ transit per centrum funiculariæ R. Ast, vide quid insoliti hic contingat, quod nondum diluere possum: summa ipsorum Bb in AB debet utrique esse minimum, quia centrum gravitatis quam-maxime descendit; interim, existente $x = \frac{1}{2}a$, $ax - xx$ non minimum sed maximum est, id est $Bb \times$ IIB majus quam $Cc \times$ GC; & per consequens videtur hac ratione reperiri curva, cujus centrum gravitatis, non quam-proxime, sed quam-remotissime ab horizontali distet. Hæc nondum satis mihi conciliata fateor. Interim eodem modo omnes alias funicularias, sine tangentium interventu, determinari posse facile vides.

Quod ad dubitationem meam reponis pro legitimitate solutionis *Hospitaliana*, idem est quod ego ipsemet Domino *Marchioni* in sui defensionem simul suggessi, quando illi dubitationem meam aperiebam;

riebam; scilicet pondus curvæ oneratæ absolute sumtum posse in- 1696.
telligi datum; sed hoc, si placet, nondum ad amussim satisfacit; Mart.
nam licet unius curvæ portionis pondus sit datum reliquarum tamen non item; videtur itaque considerata curvæ portione indeterminata, & ipsum pondus considerandum esse ut indeterminatum.

Quod quærendum sit $\int y^n ds$ minimum, jam tum aperiebam Dno. HOSPITALIO, cum me rogaret, ut sibi Problema mechanicum in pure Geometricum reductum exhiberem; sed ei postea facem longe clariorem accendi.

Problema pure analyticum, quod in Programmate priori subjeci rite solvisti, & quod miror, cum infinitæ sint solutiones, Tua illa ipsa est quæ mea. En Analysin meam, ut si solutionem edis me quoque solvisse testari possis. Esto (*Fig.* 53.) DB, x; DC, z: exponens e, constans b, & alia utcunque assumta c; Ex hypoth. $x^e + z^e = b$. Reduco hanc æquationem ad aliam, ubi x & z analogam positionem utrobique observent [id quod fundamentum est in hujusmodi scrutinio] multiplicando per $x^e - z^e$, unde habetur $x^{2e} - z^{2e} = bx^e - bz^e$, seu $x^{2e} - bx^e = z^{2e} - bz^e$; ergo DB: DC: [$x : z$], seu BF: CH $= cx \times (x^{2e} - bx^e)$: $cz \times (z^{2e} - bz^e)$: unde sequitur quod si BF fiat $= cx \times (x^{2e} - bx^e)$, etiam CH habebit valorem analogum $cz. (z^{2e} - bz^e)$, & per consequens curva ABC respondebit quæstioni. Quod vero observas meam solvendi rationem non omnes curvas complecti, libenter agnosco. Est enim impossibile, ut una eademque methodus omnes solutiones exhibere possit; quod enim jamdiu etiam respondi Dno. *Marchioni* HOSPITALIO sciscitanti, an possim demonstrare omnes solutiones possibiles comprehensas esse in illa Serie quam in *Actis* exhibui; quæ Series etiamsi infinities infinitas solutiones comprehendat; (bini enim quilibet termini infinitarum curvarum naturas exprimunt,) habeo tamen infinitas, ut ita dicam, methodos, quæ totidem Series ejusmodi suppeditant. En quamdam, quam HOSPITALIO in eam rem communicavi. Retentis

1697 Mart. tentis iisdem litteris, oportet ut $xz = 1$. Eligatur quantitas composita ex x & 1 quomodocunque, exempli gratia $1+x$ vel $1+xx$, vel $1+x^3$ vel $1+x+xx$ vel $1+xx+x^3$ vel $x+x^4$, &c. Sumamus simplicissimam $1+x$, posita $BF = ax^m \times (1+x)^n$, determinandæ erunt m & n, aut saltem una per alteram, id quod sic facio. Natura curvæ ABC, cum sit ubique eadem, erit $CH = az^m \times (1+z)^n$ sed ob similia triang. DBF & DCH, $x : ax^m(1+x)^n = z : az^m(1+z)^n$ vel $1 : x^{m-1}(1+x)^n = 1 : z^{m-1}(1+z)^n$ & consequenter $x^{m-1}(1+x)^n = z^{m-1}(1+z)^n =$ [ob $zx = 1$ seu $z = \frac{1}{x}$] $\frac{1}{x^{m-1}}(1+\frac{1}{x})^n = x^{-m+1}\frac{(x+1)^n}{x^n} = x^{-m+1-n}(1+x)^n$ hinc ultimum & primum dividendo per $(1+x)^n$ erit $x^{m-1} = x^{-m+1-n}$, id est $m-1 = -m+1-n$ seu $n = -2m+2$. Dico igitur si fiat $BF = ax^m(1+x)^{-2m+2}$, habebitur curva quæsita ABC; quæ cum sit m arbitraria, infinitis modis variari potest, & ut puto etiam Tua $y = bxx : (xx+bc)$ ibi comprehenditur, ponendo $m = 2$. En igitur aliam speciem y, seu $BF = ax^m(1+x)^{-2m+2} + bx^p(1+x)^{-2p+2} + cx^q(1+x)^{-2q+2}$ &c. Cujus termini, tam conjuncti quam separati, satisfaciunt. Eligendo $1+x+xx$, & ponendo $BF = ax^m(1+x+xx)^n$, eodem ratiocinio reperietur $n = 1-m$ & per consequens erit y, seu $FB = ax^m(1+x+xx)^{-m+1}$ vel per Seriem $y = ax^m(1+x+xx)^{-m+1} + bx^p(1+x+xx)^{-p+1} + cx^q(1+x+xx)^{-q+1}$ &c. Hinc ad lubitum Series innumeræ construi possunt quarum quælibet infinities infinitas continet solutiones.

tiones. Vides ergo quam impossibile esset generalem tentare methodum omnes possibiles complectentem. 1697 Mart.

Problema quod in *Actis* solvendum relinquo & in Programmate per transcendentes à me solvi dico, per ordinariam solvi posse nondum video. Tuum itaque modum per ordinariam solvendi libenter viderem. Vale,

Amplitudinis Tuæ

Groningæ ad.... Martii 1697.

Devotissimus

J. BERNOULLI.

EPISTOLA XLVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De inventione Curvæ segmentorum. De catenaria & maximo descensu centri gravitatis. De Probl. celerrimi descensus solutionibus.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

GRatum est, quod mea solutio secundi Problematis Tui a Tua non abludit: Video tamen methodos nostras differre, & cum Tuam mihi aliquo modo significaveris, meam vicissim mittam; quam spero, ob generalitatem & extensionem, Tibi non displiciturum. Cum olim notassem locum ex *Epistolis Cartesianis* de FERMATIO, has paucas voculas notaveram: *Hoc fieri potest.* 1697 Mart.

1697 Mart. *per radices æquationum.* Hæc verba diu multumque frustra consideravi; donec nuper, in curru dum solus *Brunswicum* vehor, sensum eorum reperi, qui hic est: Perinde esse, ac si quæratur curva, quæ rectam propositam ita secet in duobus punctis, ut, sublata una ex duabus incognitis curvæ & rectæ æquationem localem ingredientibus, prodeat æquatio ad unam incognitam, cujus secundus terminus, exempli gratia, sit datus; posito enim segmenta vel ipsorum potentias esse radices æquationis, utique summa eorum æquabitur termino ejus secundo. Sit ergo punctum fixum D, unde educta recta secet curvam quæsitam in punctis B & (B) & debet $DB^e + D(B)^e$ esse æquale ipsi $a^{e-1}b$, constanti.

DB sit x; fiet æquatio (1) $x^{2e} - a^{e-1}bx^e + a^{2e-1}h = 0$. Hujus æquationis [1mæ] duarum radicum x^e, $(x)^e$, summa faciet $a^{e-1}b$. Præterea quoniam puncta B & (B) cadunt in rectam; ideo ex B ordinatim applicatam BF vel (B)(F) ducendo ad directricem quamdam, seu axem DF (F), & BF vocando y; utique ex natura rectæ DB (B) erit (2) $x : y = m : a$, posito per rationem ipsius m ad constantissimam a, exprimi angulum rectæ hujus ad rectam primariam seu directricem.

Habemus ergo duas æquationes ex visceribus Problematis suppeditatas, unam unius incognitæ, alteram ad rectam.

Hinc jam possumus invenire æquationes ad curvam satisfacientem, via generali omnes modos possibiles complexa. Nempe assumatur relatio qualiscunque algebraïca, vel transcendens, apta inter m & h, intervenientibus ut lubet constantibus a & b, vel c &c., & hæc relatio dabit *æquationem tertiam*, cujus ope tollatur m, si placet ex æquatione 2, & habebitur *æquatio quarta*, in qua extabunt x, y & h. Hanc denique conjungendo cum æquatione prima, quæ etiam continet h, tollatur h, & habebitur *æquatio quinta* quæsita, solas continens indeterminatas, x & y, quæ proinde est ad curvam quæsitam. Si jam æquatio tertia assumatur satis simplex, verbi gratia $h = ac : m$ pro æquatione quarta fiet $cy : x = h$, quem valorem ipsius h substituendo in æquatione prima, fiet æquatio quinta

ta quæsita, nempe ad curvam, scilicet $y = (\dot{-} x^{2e+1} + a^{e-1} bx^{e+1}) : c. a^{2e}$. 1697 Mart.

Ita vides hac methodo omnes solutiones possibiles contineri semel in universum. Tua autem mihi multo majore artificio & ingenio opus habere videtur, ut analogæ positiones bene formentur. Et meretur bene distincteque exponi, cum possit habere multos alios usus. Cæterum meam vides itidem latissime patere, etiamsi scilicet non duo, sed plura curvæ puncta in unum conjuncta aliquid præstare debeant, ubi Tuo artificio uti difficilius foret. Idemque est si proprietas talis sit, ut curva quæsita non a recta, ut hactenus, sed ab alia curva sit secanda. Ubi vides novum plane campum aperiri Analyseos localis generalissimæ, pro quantocunque numero punctorum curvæ & pro summis, rectangulis, potentiis &c. Nondum autem necesse puto, ut hanc methodum publicemus, itaque hactenus eam Tibi soli significare constitui: Rogo ut Tuos calculos pro curvis istis mihi distincte communices.

Dno. Menckenio scripsi denuo, ne supprimat justissimas censuras, præsertim cum mihi significaveris non esse acerbas, sed sale conditas. Dudum ei Tuas priores misi, nunc & alteras statim ad eum destinavi. Solutiones pro *Actis* mittam. Fateor Te, non sine magna ratione, in Dni. *Marchionis* solutione hæsisse, atque etiam vidisse per Te remedium, quod cogitavi. Difficultas, quæ superest, non est spernenda, quod scilicet curvæ portio sit indeterminata, adeoque & pondus. Cogitandum interim relinquo, annon, hoc non obstante, pondus illud quodcunque, pro illa portione curvæ, quæcunque ea sit, ut determinatum assumi possit. Et hoc memini me & olim observasse. Quidquid sit, hæsissemus fateor non parum & spatium deliberandi pro meditatione attentiore petiissemus, nisi constitisset de successu, qui fecit ut accuratius inspicientes contenti esse possimus.

In Tua ratione perveniendi ad Funiculariam, per viam descensus maximi, miror consensum eventus, cum in methodo ipsa sit difficultas: neque enim satis video, quomodo cum natura lineæ cohæreat,

1697 Mart. hæreat, ut ex arculis sumatur ille cujus momentum ex horizontali sit minimum.

Video Te magnam lucem Dno. *Marchioni* HOSPITALIO accendisse; cum suppeditasti ipsi quæri, ut $\int y^n\ ds$ sit minimum: Quod si adhuc clariorem, ut ait, facem ipsi accendisti, minus miror quid successit. Misit mihi suas solutiones utriusque Tui Problematis. sed sine analysi, *Actis* inserendas, quas cum Tua mittam Dno. MENCKENIO, sed ita tamen ut tuæ mentionem factam in ipsa mea, per modum Epistolæ, ubi pro merito & ipsam, & directam methodum commendabo, quam tamen nunc supprimam, quia probas. Interim, si quid adhuc vis Tuis verbis addi, significabis.

Puto me Tibi de Domini *Fratris* Tui solutione in meis nuperis scripsisse & notasse, quod in suis ad me litteris Cycloïdem diserte nominarit. Tunc cum prorogabamus terminum, consilium meum erat, suadere Tibi, ut primo termino elapso, Domino *Marchioni* & Domino *Fratri* solutionem mitteres, ita ut prorogatio pertineret ad extraneos nostrarum Methodorum; sed nescio quomodo oblitus sum. Semper suspicabar commercio Tuo futurum esse ut Domino *Marchioni* res suboleret; sed cum fundamenta debeat, eo minus id displicere debet.

Vellem nosse quæ Domini *Fratris* Tui methodus fuerit: ait se hac occasione nova Problemata propositurum.

His scriptis, accipio litteras Domini MENCKENII, quibus video, non expectatis nostris, festinasse studiose recensionem Libri *Nieuwentiitiani*, quæ mihi non parum displicet; ita enim videtur homo esse, dixisse aliquid, cum dixerit nihil. Tua etiam contra ipsum sunt adjecta; sed cum priora non viderim, nescio an quid sit resectum.

Pene oblitus eram adjicere curvam algebraïcam Problemati priori Tuo satisfacientem, quam desiderabas, & nunc ridebis, esse circulum; in eo enim utique factum ex quadrato unius segmenti in alterum segmentum erit semper idem, si punctum ex quo recta educitur, quæ segmenta contineat, sit ipsum centrum; Cum segmenta

menta sint semper æqualia, nempe radii.......... Quomodo curvam investigaris videre gratum erit. . . . . Vale.

Dabam *Hanoveræ* 19. Martii 1697.

Deditissimus

G. G. Leibnitius.

EPISTOLA XLIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

Deesse tamen videtur Epistola quædam Bernoulliana.

De Inventione Curvæ segmentorum tam Leibnitiana, *quam* Newtoniana, *&* Bernoulliana. *De Curva quæ rectas perdatum punctum actas ita secat ut solidum sub uno segmento & alterius quadrato sit datum. De* Nieuwentiitio, *&* Tschirnhausio. *De Brachystochrona datæ longitudinis.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Misi nuper, cum quibusdam aliis, solutionem *Angli* Anonymi quam Te accepisse non dubito. Quod Tua Solutio secundi mei Problematis a mea non abludat, tanto jam magis miror, quod, per diversissimam a mea Methodum, Te eo pervenisse videam; cum tamen ex infinitis solutionibus, quæ satisfaciunt, perfacile in aliam incidere potuisses, si modo pro æquat. 3, $h = ac:m$, assumisses quamcumque aliam. Lubens credam Te multum in hac Methodo indaganda adjutum esse, voculis illis quas in Epistolis *Cartesianis* notaveras; *hoc fieri potest per radices æquatio-* 1697 April.

1697 April. *num.* Vellem ſcire, quo loco hæc verba extent, ut videam an de eadem materia agant: quem enim mihi ante illud tempus indicaveras locum, talia verba continere non video. Interim ut ad Methodum Tuam redeam; perſpexeris ex ſcripto illius *Angli* [quem NEWTONUM firmiter credo †] conſimilem, niſi omnino eamdem exhibuiſſe; hoc tantum diſcrimine, quod ille omnes illas Tuas quinque æquationes, quæ inſtituendæ ſunt, antequam ad quæſitam pervenias, una ſola comprehendat, artificio non ineleganti; ducta ſcilicet recta poſitione data, & rectas ex Polo egredientes tranſverſim ſecante, quam ut abſciſſam, illas vero ut applicatas conſiderat. Potuiſſet tamen & ipſe hanc viam adhuc magis abbreviare, ita ut non opus fuiſſet pro ſingulis poteſtatibus ſegmentorum novam quantitatem datam aſſignare, quandoquidem una generalis æquatio omnes continere poteſt. Ego enim ſolutionem univerſaliſſime concep-
TAB.X. tam ita enuntio. S, (*Fig.* 54.) ſuper recta poſitione data, tanquam axe, AD concipiantur curvæ datæ qualeſcunque AE, AF, AG, &c. voceturque AD x; applicatæ vero DE, DF, DG, &c. q, r, s, &c. ita ut q, r, s, ſint datæ per x & conſtantes: Dico ſi a puncto dato P, ducatur utcunque recta PKLMN ſecans axem in D; ſitque PK vel PL, $y =$ radici hujus æquationis $y^{2e} - qy^{e} + r^{2} = 0$, erit, poſita AF recta & parallela ipſi AD, punctum K vel L, in curva KIL, hanc habente proprietatem ut Rect. LPK ſit perpetuo æquale. Si vero AE ponatur recta parallela ipſi AD, erit, KIL curva talis ut $PK^{e} + PL^{e}$, faciat ubique eamdem ſummam. Quod ſi fiat PK vel PL, vel PM, $y =$ radici hujus æquationis $y^{3e} - qy^{2e} + rry^{e} - s^{3} = 0$, ſitque AG recta, & parallela ipſi AD; erit curva KILRM talis ut ſolidum ſub PK, PL, & PM ſit ſemper æquale: Si vero AE ſit recta, & parallela ipſi AD; erit ſumma $PK^{e} + PL^{e} + PM^{e}$ ſemper eadem. Sin AF eſſet recta parallela ipſi AD, foret ſumma rectangulorum poteſtatum $PK^{e}.PL^{e} + PK^{e}.PM^{e} + PL^{e}.PM^{e}$, æqualis. Eadem ratione inve-

† *Et recte quidem.* Vide Tranſ. Philoſ. Menſ. Jan An. 1697. Num. 224. 225.; & Opuſc. Newt. Tom. I. Opuſc. VI. pag. 289.

invenitur curva KILRMSN, cujus segmenta quatuor PK, PL, PM, PN, imperata præstent; sicque in altioribus. Atque hæc omnia fluunt ex notissimo illo principio algebraïco, quod scilicet q sit = summæ radicum, rr = summæ rectangulorum radicum; s^3 = summæ solidorum radicum &c. Hinc potest etiam construi curva quæ simul præstet duo ex requisitis; Exempli gratia, si curva KILRM debeat esse talis, ut non solum solidum sub PK, PL, & PM, sed etiam aggregatum potentiarum $PK^e + PL^e + PM^e$, faciat idem ubique. Dico si curvæ duæ AE & AG ponantur rectæ & parallelæ ipsi AD; satisfaciet curva KILRM utrique simul conditioni. 1697 April.

Vides quam amplus mihi pateat campus ex paucis, quæ Tu & *Anglus* ille suppeditastis; ita ut jam libenter agnoscam, quod mea solvendi ratio per positiones analogas, tam uberes fructus simul producere nequeat; nam præterquam quod majori & difficiliori artificio opus habet; etiam ad curvas plurium quam duorum segmentorum, ut probe notas, adaptari posse nondum perspicio. Interim mihi sufficit, harum rerum me primum fuisse contemplatorem; nam quod de Fermatio dicis hæc eadem jam considerasse, sane nihil certe constat. Quantum ad prius Problema, quod initio statim in *Actis* proposui, ubi desideratur curva ut solidum, sub uno segmento & quadrato alterius sit constans; Mea methodo reperio curvam, si non algebraïcam, saltem transcendentem. Quod vero Tu notas [joco forte] etiam algebraïcam satisfacere, scilicet circulum [pace Tua id dixerim], hic nihil aliud dicis quam quod a nemine ignorari potest; hæcque solutio similis est illi, quam olim Wallisius dederat Fermatio quærenti cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis faciat quadratum, & vicissim quadratum, qui cum suis partibus aliquotis faciat cubum, ostendens iteratis vicibus unitatem pro numeris quæsitis. Sed quam contenti fuerint hac solutione Fermatius & Freniclius, non est ut hic dicam. Interim hac Methodo, per radices æquationum, moderamine quodam adhibito, feliciter solvo Problema per curvam algebraïcam. Sic æquationis $yy - qy + rr = 0$, radices

1697 April dices sunt $y = \frac{1}{2} q + \sqrt{(\frac{1}{4} qq - rr)} = PL$, & $y = \frac{1}{2} q - \sqrt{(\frac{1}{4} qq - rr)} = PK$; nunc quia ex hyp. PLq, $PK = a^3$ constanti; erit $\frac{1}{2} qrr + rr \sqrt{(\frac{1}{4} qq - rr)} = a^3$, unde $q = (a^6 + r^6) : a^3 rr$: sic curva AE jam non est arbitraria, sed oportet esse talem, ut assumta curva AF quacumque, DE sit $= (a^6 + DF^6) : a^3 DF^2$; quo facto, dico radicem æquationis $yy - qy + rr = 0$, producere curvam optatam KIL. Non secus operandum est in aliis; ut si quæreretur curva talis, ubi non quidem summa, sed differentia potentiarum $PL^e - PK^e$, sit constans; Tunc enim q, seu DE facienda est $= \sqrt[2e]{(a^{2e} + 4 DF^{2e})}$, & radix æquationis $y^{2e} - q^e y^e + r^{2e} = 0$, determinabit curvam quæsitam. Nescio quales alios meos calculos pro curvis istis desideres. Si eos cupias, quos institui pro illis in *Actis* editis, lubenter communicabo, & quid aliud hactenus observavi super hac materia.

Et ego miror quod Dnus MENCKENIUS adeo festinaverit recensionem Libri NIEUVENTITII: scribit se etiam a Te accepisse relationem prolixam ejus Libri una cum mea, sed post festum. Videtur Dnus. MENCKENIUS scrupulosus nimis in edendis, quæ vel in minimis quempiam offendere putat; unde forsan consulto nostra expectare nolebat, & mea quoque ambo schediasmata quæ adjecit, non parum mutilavit; quod quidem non ægre fero, dummodo aliquibus in locis argumentorum pondus non simul imminuisset. . . . .

In fragmento *Actorum* quod mihi misisti, video etiam Domini TSCHIRNHAUSII quadraturam universalem, * puto occasione meorum nupero *Decembri* † editorum demum excogitatam; quid-

* *Quadratura universalis figurarum curvilinearum, per series infinitas, simplici transpositione rectarum linearum formatas*, per D. T. Acta Erud. 1697. Mart. pag. 113.

† J. B *Tetragonismus universalis figurarum curvilinearum per constructionem geometricam continuo appropinquantem.* Acta Erud. 1696. Dec. pag. 551. Opp. T. I. N°. XXXI pag. 162.

quidquid author dicat, illam sibi jam a multis annis fuisse familiarem. Ob defectum figurarum capere non satis potui, an vel quousque meo Tetragonismo congruat. Virum hunc magnifacio; sed male me habet ejus vanitas, quod aliis inventa ipsorum ita invideat, ut nihil fere in lucem prodeat, quod ipsi non diu ante fuerit cognitum. 1697 April.

In præcedentibus Tuis dicis, Problema meum *Fratri* solutum esse, sed mox, ea occasione, a se alia longe difficiliora propositum iri.............. si publicum exercendum esset difficilioribus..... forsan & ego proponere possem, quod multum negotii facesseret: Exempli gratia: ***Si Lamina sit data longitudinis, quæritur quamnam Curvaturam inducere debeat, ut mobile super illa a dato puncto ad datum punctum citissime descendat.*** * Sed vererer ne mihi responderetur. ***Quærit delirus, cui non respondet Homerus.***

Miror, quod hactenus nullam in *Actis* relationem videam Libri Dni. *Marchionis* Hospitalii, † cum tamen illum jam diu proculdubio acceperit Dnus. Menckenius. Vale & Fave

Groningæ 3. Aprilis 1697.

Amplitud. Tuæ
Observantissimo
J. Bernoulli.

P. S. In ratione mea perveniendi ad Funiculariam per viam descensus, utique latet quædam difficultas, sed optarem ut illam tolleres; legitima enim oportet sit methodus ipsa, & necessarius nexus cum natura lineæ, cum non solum procedat in Funicularia ordinaria, quod accidenti cuidam rescribi potuisset, sed in omni alia, sive æquabiliter, sive inæquabiliter gravatus statuatur funis.......

. . . .

* *Vid.* Act. Erud. 1718. Febr. p. 74, aut, Mémoires de l'Acad. R. des Sciences 1718. pag. 120, *aut denique* Opp. Tom. II. N°. CIII. p. 254.
\+ *Analyse des Infiniment petits.* Paris 4°. 1696.

EPISTOLA L.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad Epistolam præcedentem & eam quæ intercidit.

De solutionibus Problematis celerrimi descensus, præsertim Newtoniana. *De Epistola* BELVALLII. *De animadversionibus suis in* Principia CARTESII. *De inventione Curvæ segmentorum, alteriusque affinis.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime!

1697 April CUm *Guelfebytum* irem, ferias illic acturus, mecum sumpsi quæ ad Problemata Tua spectant, ut illinc *Lipsiam* expedirem, quæ *Actis* inserenda viderentur; quod & feci.

Et transmisi solutiones, tuam pariter & *Hospitalianam* mihi commendatam curvæ Brachystochronæ. Alteram Tuam methodum directiorem permissu Tuo omisi.................. Problema autem Tuum, non minus quam solutionem & præclarum in Opticis usum ex merito commendavi, simulque institutum Problemata modeste proponendi laudavi.

Iis omnibus jam *Lipsiam* missis, post ferias demum Paschales, *Hanovera* accepi Tuas novissimas, quæ illic hæserant; quod initio litteras venientes mihi transmitti vetuissem, spem statim a feriis redeundi; sed consilio deinde mutato, jussi mitti quæ advenissent, & inter cæteras inveni quæ a BELVALLIO * accepta communicas. Solutionem Anglicam a NEWTONO esse suspicor: Quoniam vero *Lipsiensia* semel expedita erant, non putavi causam esse cur in gratiam Anglicanæ solutionis adderem aliquid aut mutarem; quando *Angli*, nec nobis consultis, nec termino expectato, ad publica-

* Mr. *Basnage* DE BEAUVAL.

publicationem prorupere, & ſtudium Tuum merito elogio non 1697
mactant; nec a nobis aliquid de ſolutione ſua fieri poſtulant. Fateor tamen me, ſi maturius eam accepiſſem, fuiſſe iis adjecturum quæ *Lipſiam* miſi; ſed nunc, poſt feſtum, ſatis jam fatigatus, ab opera nec neceſſaria, nec deſiderata, non invitus abſtinui. April

Epiſtola BELVALLII ſale aliquo mordaci mihi aſperſa videtur. Veluti cum ait omne genus humanum a Te provocatum, cum brevitatem temporis ab *Anglo* impenſum prædicat, & præmia honoris a Te diſtribuenda dicit. Poteris fortaſſe ironiam reddere ironiæ, & ad Academiæ Gallicæ uſum provocare, quæ præmia iis tantum diſtribuit, qui nomina ſua profitentur; ſimulque docere, ipſum ſolutionis Anglicæ authorem Tibi non omnino ignotum videri, & methodos noſtras rite applicare ſcienti unius diei ſpatium abunde ſufficere, neſcienti nec annos ſatis eſſe. Tuam vero provocationem, nec exemplis apud Geometras frequentatis, nec utilitate in publicum carere, & plurimum prodeſſe, ad eos ex ſomno excitandos, qui *Carteſiana* analyſi, vulgaribusque Methodis indormiunt. Neminem enim ſolutionem hujus Problematis dediſſe, niſi quis novas noſtras Methodos ſibi reddidiſſet antea familiares. Quod ſane ſecure etiam de *Anglo* ſolutore dicere potes. NEWTONUM enim, partim noſtra, partim noſtris Analoga meditatum eſſe intento ſtudio, ſatis conſtat.

Et BELVALLII Epiſtolam, & Juvenis *Hagienſis* ſchedam utramque remitto. Hujus videtur laudanda voluntas, ſed dubitatio de aſcenſu deſcenſui mixto intempeſtiva eſt, ſatiſque oſtendit vim univerſalitatis ab ipſo non ſatis perſpectam, & veram ſolutionem etiam illa complecti debere, quæ ipſi videntur excludenda.

Is qui Problema Tuum facile putat, ſi modo Hypotheſis de motu aut quiete Terræ definiatur, vel parum in his rebus verſatus ſit oportet, vel rem fugitivo admodum oculo inſpexit. RICCIOLUS & *Stephanus* AB ANGELIS, aliique, diſputavere quænam futura eſſet linea gravium libere deſcendentium, ſuppoſito motu Terræ. Hoc ipſi Auctores iſtos nominanti videtur ſuccurriſſe, & impoſuiſſe, non invito, quo facilius declinaret. Nunc intellectis conſpirantibus aliorum ſolutionibus, quibus talis dubitatio in mentem

1697 April. tem non venit, lapsum suum, si candore est præditus, libenter agnoscet; & jam fatebitur, credo, Problema facile non esse, saltem sibi aliisque de sua tribu. Cæterum video Dno. BEAUVAL ignotum non esse Juvenem *Hagiensem*, consiliaque etiam inter ipsos fuisse communicata. Per hunc ergo disces, credo, quis sit Juvenis.

Animadversiones quasdam extemporaneas in partem generaliorem *Principiorum* CARTESII ad Dominum BASNAGIUM miseram, tum ut legeret HUGENIUS, tum ut *Cartesiani* quidam, quibus communicandæ erant, viderent me non sine ratione ab ipso dissentire. Has lectas [si tanti videntur] per occasionem ad Dnum. *Gerhardum* MEJERUM, Theologum *Bremensem* mittere aliquando poteris, additis *Transactionibus Anglicanis* pro me Tibi missis, si quid scilicet aliud illis inest, quam quod mihi descriptum jam communicasti. Ex prioribus meis videbis NEWTONUM suam secundi Tui Problematis solutionem ex eodem mecum fonte derivasse, sed circuitu tamen non necessario usum esse. Vale

Dabam *Guelfebyti* 15°. April. 1697.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

Responsio ad præcedentem. P. S. Scriptis jam litteris, novissimas Tuas accipio. Cur æquationem $h = ac : m$ assumserim causa est, quod ea ratione prodire vellem aliquid simplicius, quam ponendo $b = m$, quod prius consideraveram. Nam si $h = m$ prodit non y sed $\frac{1}{y} = bx^{e} - x^{2e}$. Vides autem valores istos duos ipsius b, ut sit vel $\frac{1}{m}$, vel m, esse simplicissimos. Per quinque æquationes, præter necessitatem quidem, consulto tamen, processi; quia sic melius patet principium inventionis & latitudo solutionis. Linearum ductus sub elegantiori facie, rem ipsam, artemque reddit involutiorem; tantumque abest,

abest, ut Dnus. Newtonus, ex suo compendio rem proponendi, aliquid utile duxerit, ut potius involutus nonnihil, haud satis animadvertit una eademque æquatione locali comprehendi posse solutionem pro omnibus segmentis. Præterea considerandum, lineam, quæ curvam quæsitam in punctis conspirantibus secat, posse esse aliam, quam rectam, in aliis Problematibus; quæ omnia distincte intelliguntur meo procedendi modo, ut ne nunc quidem, viso *Newtoniano*, inde recedere velim. Egregia sunt quæ porro addis, & profecto meretur hæc materia amplius excoli; est enim velut nova quædam linearum curvarum seu locorum Geometria. Interim quia Tua procedendi Methodus, qua ad cogitationem tam pulchram tamque utilem ductus es, etiam alios usus habere potest & ipsi per se Analysi aliquid addit; rogo ut eam distincte conscribas, una cum iis quæ inde duxisti, & mihi communices, perinde ac si altera illa nondum innotuisset. Cæterum videris non observasse quod de Circulo satisfaciente locutus Te ridere jusseram. Et licet fatear non esse magni faciendas tales solutiones, qualis illa per Circulum, aut *Wallisiana*, quam citas, per unitatem; sunt tamen veræ, & ex earum rerum numero, quæ nulla quidem cum laude dicuntur, & tamen interdum non bene omittuntur. Si quis, exempli causa, dixisset, Problema cui Wallisius per unitatem satisfacit, non esse solubile in numeris rationalibus, peccasset, etiamsi nulla alia reperiri posset solutio. Item, si Tu dixisses Problema non esse solubile, nisi in transcendentibus; fuisses refutatus per eum, qui Circulum Tibi objecisset, & solutio perfecta utique, istas quoque, etsi nugatoriæ videri possint, comprehendere debet: per me ergo licet quasi nugatorias appelles, vel semi-ridiculas, modo non plane usu carere fatearis. 1697 April.

Oportet ut in litteris mentem meam non bene explicuerim, cum ita a Te accepta est, quasi ego istam notationem [quod desideratum fieri possit per radices æquationum] in *Epistolis* Cartesii repererim. Reperi enim in meis excerptis, seu notatis, ante multos annos consignatis, cum *Epistolas* Cartesii forte volverem, ubi, re tunc considerata, de modo hæc annotaveram obiter. Cum igitur Problema Tuum inspiciens, meminissem pro-

1697 April missorum FERMATII; & præterea recordarer, me illa olim legentem meas quasdam meditationes habuisse; quæsivi illam schedam, & forte, præ multis aliis conservatam, prompte reperii, ubi hæc quæ dixeram verba mea deprehendi, quæ primo aspectu non intellexi, donec in curru explicatio in mentem veniret,

Dni. *Marchionis* HOSPITALII Librum spero jam in *Acta* relatum esse: nam & ego admonui Dnum. MENCKENIUM ne nimis differatur. . . . .

Considera quæso, ut hoc obiter addam, an Tua constructio, qua facis $PL^2 . PK = a^3$ non simul faciat $PK^2 . PL = a^3$; nam videbis pro hoc eumdem prodire Calculum, seu valorem ipsius a, qui prodit pro illo ex ipsa natura radicum ambiguarum, quod si jam sit $PK^2 . PL = a^3 = PL^2 . PK$, fiet $PK = PL = a$; id est, P erit centrum circuli per K & L transeuntis, radiusque a. Ita incidemus in eam solutionem, quam recusas. Itaque amplius aliquid requiri puto, ut ambiguitati isti obnoxii non simus. Et viam video, dum rumpuntur laquei seu vinculum ambiguitatis, superanturque radices actuali extractione.

Utique non temere fieri oportet, quod via illa quam inisti in omni genere Funiculariæ succedit; sed hoc aliunde fieri necesse est, nam ipsa via per se consecutionem non ostendit. Itaque amplius deliberandum censeo; & ipse quoque, rem attentius meditans, video perinde esse in Tua methodo, ac si quæramus parallelarum seu condescriptarum eam, cujus momentum ex recta horizontali est minimum vel maximum.

Pene annotare oblitus eram non esse necesse, ut peculiarem Calculum pro differentiis quæras, sed ejusdem esse Calculi, facere ut summa potestatum a segmentis, & ut differentia sit constanti æqualis. Nam, si una radix sit negativa, secundus terminus erit differentia duarum radicum, ut si sit $yy - qy - rr = 0$ pro $yy - qy + rr = 0$, priore modo q est differentia, posteriore jam usurpato summa. Quod si esset $yy + qy - rr = 0$, $-q$ esset excessus radicis negativæ super affirmativam, adeoque q maneret differentia.

P. P. S. S.

P. P. S. S. His omnibus scriptis, in manus meas veniunt *l'Histoire des Ouvrages des Sçavans* Domini BASNAGE-BEAUVAL, ubi complectitur menses Decembrem, Januarium, Februarium, ibi p. 284. inserit Problema Tuum, sed verba, ubi de me loqueris aliter interpretatus est, quasi scilicet ego dilationem a Te petierim, solutionem sub exitum termini promittens, unde Lector me solutionem tunc nondum habuisse & tanto tempore indiguisse credet. † Idque etiam videtur fecisse, ut *Angli* illius promptitudinem nobis quodammodo exprobasse videatur. Itaque rogo, ut eum per occasionem moneas, me quoque statim solutione fuisse potitum.

† En Basnagii Verba.
M. BERNOULLI *Professeur en mathématique a* Groningue *proposa l'année derniere au mois de Juin un Problême a tous les habiles gens de l'Europe. Il donna 6 mois pour le résoudre a quiconque voudroit l'entreprendre. Ce terme étant expiré, Mr.* LEIBNITZ, *l'un des plus penétrants Mathématiciens de ce Siecle, lui proposa de prolonger le terme jusqu'a Paques* 1697, lui promettant une Solution dans ce tems. *Mr.* BERNOULLI *y a consenti &c.*

EPISTOLA LI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De solutione Newtoniana *Problematum suorum. De inventione Curvæ segmentorum.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

NEgotia quædam, per aliquot hebdomadas me detinentia, responsionem hanc hucusque retardarunt. Gratias habeo non mediocres pro officio præstito in transmittendis nostris solutionibus, præsertim pro commendatione, quâ meam prosecutum Te ais, sed forsan præter meritum. 1697 Mai

Cum

1697 Mai Cum nuper Dno. MENCKENIO scriberem, misi etiam solutionem Anglicam, ut de illa faceret quod vellet. In *Transactionibus Philosophicis*, a Domino SLOANE mihi missis, quantum ex idiomate *Anglico* intelligo, nihil præterea continetur, quod operæ pretium sit; mittam tamen si desideras. In eumdem fere modum, quo consulis rescripsi BELLAVALLIO: non opus esse longo tempore ad solvendum Problema nostrum illis qui nostra callent, atque adeo me non mirari, Anglum illum [NEWTONUM esse suspicari me dicebam], secundo statim die a receptione Problematis, solutione fuisse positum, cum Methodo aut nostra aut nostræ simillima utatur: sed alium hac destitutum, si prima applicationis die non ad solutionem pervenerit, nec secundo die, sed nèc post annum eo perventurum esse. Interim BELLAVALLIUS, miror, nec respondit, nec Animadversiones Tuas promissas mihi misit. Inspexi locum quem indicasti Febr. *de l'Histoire des Ouvrages des Sçavans*; indigne admodum fero, quod ita pessime egèrit interpretem verborum meorum; quamprimum ipsi scribam, culpare incuriam non obliviscar.

Verum est Dnum. NEWTONUM, suo modo proponendi & solvendi Problema meum secundum, rem ipsam præter necessitatem involutiorem reddidisse, dum pro diversis potestatibus diversas æquationes quærit; meo tamen modo, quo Methodum *Newtonianam* correxi & amplificavi, mihi videor rem satis clare explicasse; dum omnes casus una eademque æquatione comprehendi, adeo ut, hoc in passu, Methodus illa ita correcta Tuæ per 5. æquationes procedendi non cedat; imo brevitate & simplicitate quodantenus illam præferrem, & credo facile etiam applicari posse, quando linea, secans in punctis [ut dicis] constantibus, non est recta, sed curva.

Jam quia petis, aperiam prima mea cogitata circa hanc materiam. Methodus, quâ initio usus sum per sat magnas ambages me eo deducebat; ejus me tamen eo minus pudet, quod nonnullius utilitatis esse posse dicis. Sic itaque procedebam pro invenienda TAB. X. curva, ubi rectangulum segmentorum sit datum. Esto (*Fig.* 55.) DB,

DB, x & BE y; ponatur $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\epsilon}$ &c. (quousque libuerit) per hyp. CD $= \frac{1}{x} = x^{-1}$; Ob simil. triangul. DBE, DCF; CF $= ax^{\alpha-2} + bx^{\beta-2} + cx^{\gamma-2} + ex^{\epsilon-2}$ &c. $=$ (ob analogam relationem punctorum C ad F & B ad E) $ax^{-\alpha} + bx^{-\beta} + cx^{-\gamma} + ex^{-\epsilon}$ &c. Comparentur jam harum duarum Serierum termini, [sed non earumdem litterarum, secus omnes æquationes identificarentur] ut inveniantur potentiæ & coefficientes; in hunc modum $ax^{\alpha-2} = bx^{-\beta}$, $bx^{\beta-2} = ax^{-\alpha}$, & $cx^{\gamma-3} = ex^{-\epsilon}$, $ex^{\epsilon-2} = cx^{-\gamma}$, &c., unde elicitur $b = a$, $\beta = 2 - \alpha$, & $e = c$, $\epsilon = 2 - \gamma$, &c. Ergo substitutis valoribus pro b, β, e, ϵ, &c. reperietur hæc Series infinitas continens solutiones, $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha} + cx^{\gamma} + cx^{2-\gamma}$ &c. quam in *Actis* dedi. Quod si segmenta non ex communi puncto D egrediantur, sed ad axem aliquem parallelæ constituantur, id est, si (*Fig.* 56.) quæritur curva GHF, ut ducta ad positione datam DE, recta GFE in angulo dato GED, rectangulum segmentorum GEF, seu CDB, sit datum, reperietur eadem methodo [positis EF seu DB, x; FB, $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\epsilon}$, &c. hæc Series $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha} + cx^{\gamma} + cx^{-\gamma}$ &c. Per analogiam relationis punctorum hæc duo aliter ita solvuntur. Sit DB, x; DC, z, per hyp. $xz = 1$ ideoque etiam $x^n z^n = 1$, [n est potestas arbitraria, ut solutio tanto generalior evadat] : multiplicetur utrumque per $x^{-n} - z^{-n}$, [quod facio ut x & z utrobique possint habere positionem analogam] erit enim $z^n - x^n = x^{-n} - z^{-n}$, seu $x^n + x^{-n} = z^n + z^{-n}$; hinc si fiat in *fig.* 56. BF $= x^n + x^{-n}$, seu CG $= z^n + z^{-n}$; prodibit curva 1697 Mai.

1697 Mai. quæsita FHG, sed pro *fig.* 57. facienda est $BE = x.(x^n + x^{-n})$,
TAB. XI. seu $CF = z.(z^n + z^{-n})$, tunc satisfiet quæsito.

Ecce jam modum quo tunc-temporis Problema solvere instituеram, quando summa potestatum segmentorum datur, $DB^n + DC^n$
TAB. X. $= 1$, [*fig.* 55.] sed ridebis prolixitatem. Quærebam prius curvam ABCG cujus segmentorum summa esset constans, $DB + DC = 1$: in hunc finem ponatur iterum DB, x; BE, $y = a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. Ex proportione DB [x]; DC [$1 - x$] = BE [$a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ &c.]: CF, invenitur

$$CF = \frac{a}{x} - a + b - bx + cx - cxx + exx - ex^3 + fx^3 - fx^4 + gx^4 \ \&c.$$

ex analogia vero relationis punctorum in curvâ, ponendo in Serie $a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ &c., $1 - x$, loco x, habetur

$$\begin{aligned} CF = &+ a \\ &+ b - bx \\ &+ c - 2cx + cxx \\ &+ e - 3ex + 3exx - ex^3 \\ &+ f - 4fx + 6fxx - 4fx^3 + fx^4 \\ &+ g - 5gx + 10gxx - 10gx^3 + 5gx^4 - gx^5 \\ &\&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad \&c. \end{aligned}$$

Continuatis hoc modo quousque lubuerit, [quo magis vero continuantur, eo solutio erit generalior & fœcundior) comparentur utrinque dimensionum ipsius x æqualium coefficientes, $a = 0$; $-a + b = a + b + c + e + f + g$ &c.; $-b + c = -b - 2c - 3e - 4f - 5g$, &c., $-c + e = c + 3e + 6f + 10g$, &c.; $-e + f = -e - 4f - 10g - 20h$, &c. quibus rite collatis prodit $a = 0$, $f = -2c - 2e$, $g = c + e$, $h = 0$, ita ut $b, c, e,$ maneant arbitrariæ; cæterarum vero substitutis valoribus reperietur æquatio

æquatio talis $y = bx + cxx + ex^3 - (2c - 2e)x^4 + (c+e)$ 1697
x^5; quæ exprimet naturam curvæ ABCG, in qua summa seg- Mai.
mentorum erit constans, DB + DC. Hac autem inventa, altera illa, ubi potestatum summa dari debet, facillime construitur abscindendo tantum (*Fig.* 57.) Dc ex DC, Db ex DB, Dg ex TAB. XI.
DG, Da ex DA, quæ sint ut $\sqrt[n]{DC}$, $\sqrt[n]{DB}$, $\sqrt[n]{DG}$, $\sqrt[n]{DA}$, &c. Habebitur nova curva, *abcg*, ubi segmentorum potestates $Db^n + Dc^n$ seu $Da^n + Dg^n$, facient ubique eamdem summam, prout requirebatur. Vides quam longa via incesserim, sed aliam tunc non quærebam; contentus scilicet attigisse scopum. Biduo enim post, cum talia iterum meditarer, se se ultro offerebat, facilior ille solvendi modus, quem in anterioribus meis Tibi communicavi, cujusque ope statim incidi in curvam transcendentem, cujus segmenti quadratum ductum in alterum segmentum producat solidum datum & quidem sic. Sit [*Fig.* 55.] DB, x, BE, $y =$ TAB. X.
$x^m (1+x)^n$ [loco $(1+x)^n$ possem assumere quamcunque aliam quantitatem ex x & constanti compositam] jam si $CD \times DB q = 1$, erit $CD = \frac{1}{xx}$; ergo propter DB : DC = BE : CF, erit $CF = x^{m-3}(1+x)^n$. Sed ob analogiam relationis punctorum B & C ad E, & F; erit $CF = (\frac{1}{xx})^m (1 + \frac{1}{xx})^n = x^{-2m-2n}(xx+1)^n$ ergo $x^{m-3}(1+x)^n = x^{-2m-2n}(xx+1)^n$. Ergo etiam logarithmi $(m-3)lx + nl(1+x) = (-2m-2n)lx + nl(xx+1)$: Unde $m = ((-2n+3)lx - nl(1+x) + nl(xx+1)) : 3lx$. Si itaque x elevetur ad hanc dimensionem m, & multiplicetur per $(1+x)^n$, habebitur æquatio pro curva quæsita; quæ ope Logarithmicæ construi potest, & per consequens ex earum numero, quas percurrentes appellavi.

Nunquam negavi veritatem solutionis per Circulum, sed aliud est verum esse, aliud satisfacere intentioni proponentis. An credis

1697 Mai. me non prævidisse Circulum? Licet illum non diserte exclusérim, excluditur tamen eo ipso quod nemini non obvius est. Adde quod neque Circulus satisfaciat, quando segmenta non in puncto coeunt, sed quando ad axem sunt parallelæ, ut in fig. 56. Cum itaque proponentis scopus sit acumen Solutoris explorare, neminem putabam fore, qui mihi Circulum, ut solutionem legitimam, qualem ego desiderabam, obtrusurus esset; sed Tuum mihi ingenium satis superque perspectum est, atque ideo non dubitavi, quin joco id fuerit, quod allegaveris Circulum. Ast nescio, an a quopiam minus mihi familiari hunc Circulum tolerassem.

Jubes me considerare, an constructio mea, quæ in præcedentibus meis feci $PL^2.PK = a^3$ non simul faciat $PK^2.PL = a^3$, ideoque $PK = PL = a$; id est annon curva mea KIL sit Circulus, cujus centrum P; & sic annon incidamus in eam curvam, quam recuso, sed, pace Tua, ipse videris rem non satis considerasse. Minime enim sequitur, si $PL^2.PK = a^3$, ideo etiam esse $PK^2.PL = a^3$: neque pro hoc idem calculus prodit. Sed etiam nulla ambiguitas radicum hic adest, quia non promiscue consideravi quadratum alterutrius segmenti, sive majoris, sive minoris, sed sumsi consulto segmenti seu radicis majoris quadratum, quod multiplicavi per segmentum seu radicem minorem. Hinc longe alia curva prodiret, si assumeretur $PK^2.PL = a^3$, quæ tamen nihilominus satisfaceret. Verum quid opus est verbis, si contrarium ejus quod putas, res ipsa probat? Constructio mea erat
TAB. XI. talis; assumta (*Fig.* 58.) curva quacumque AF, cujus applicata DF vocetur r; fiat alia AE, cujus applicata DE seu q sit $= (a^6 + r^6) : a^3 rr$; dico si sumatur PL = radici majori, & PK = radici minori, hujus æquationis $yy - qy + rr = 0$, curvam KIL fore quæsitam. De veritate hujus constructionis non dubitas, quia in præcedentibus vidisti rationem; sed urges KIL esse Circulum, cujus centrum P: quid si autem ostendam PK & PL juxta constructionem meam esse variabiles, numquid sententiam mutabis? Radices dictæ æquationis sunt $y = \frac{1}{2} q -$

$\sqrt{} (\frac{1}{4}$

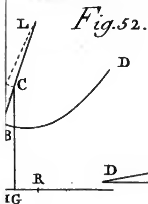


Fig. 52.

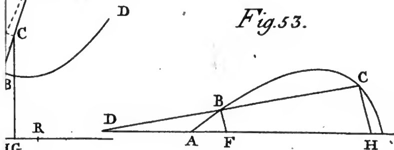


Fig. 53.

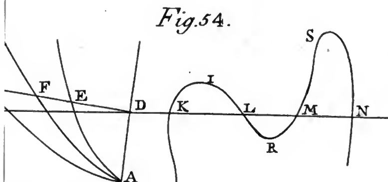


Fig. 54.

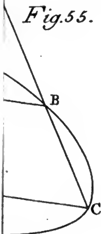


Fig. 55.

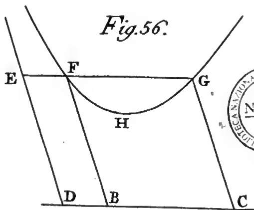


Fig. 56.



$\sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$ & $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$. Substitue valorem assignatum ipsius q, & habebis y, seu $PK = \frac{r^4}{a^3}$, & y seu $PL = \frac{a^3}{rr}$; quarum utraque variabilis est, nisi ponas r constantem, id est AF rectam & parallelam ipsi AD; quo solo casu KIL esset Circulus, cujus P centrum: Vides etiam simul quod $PL^2 . PK$, seu $\frac{a^6}{r^4} . \frac{r^4}{a^3} = a^3$ constanti; non autem $PK^2 . PL$, seu $\frac{r^8}{a^6} . \frac{a^3}{rr} = \frac{r^6}{a^3}$. Sublata tua difficultate jam alia se prodit, videtur enim [cum PK, PL prodeant in quantitatibus rationalibus] puncta L & K non esse in eadem curva, sed in duabus diversæ naturæ; si hoc est, erit methodus *Newtoniana* fallax, & Tua quoque laborabit. . . . . &c. 1697 Mai.

Mai. 1697.

EPISTOLA LII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Curva segmentorum. Observatio Dioptrica. De Machina arithmetica sua. De solutionibus Curvæ Brachystochronæ. De Problemate Isoperimetrico. De Tschirnhausio.

Nobilissime & Celeberrime Vir, Fautor Honoratissime,

. . . .

Gratias ago pro Tua methodo solutionis curvæ per duorum quorumcunque punctorum certo modo inter se relatorum cons- 1697 Mai.

1697 Mai. conſpirationem determinatæ; Et vellem eam produci etiam ad plura puncta, non quia ad hæc Problemata neceſſe eſt [quæ aliter commodius ſolvimus] ſed quia in aliis utilis eſſe poteſt. Cæterum cum de Problemate aliquo ſolvendo agitur, meus ſcopus non ſolet eſſe, quem memoras, explorare acumen Solutoris, ſed vel præſtari aliquid utile aut elegans, vel ſaltem augeri artem meditandi. Et ſolutio, quæ non comprehendit omnes conſtructiones, etiam facillimas, habet aliquid imperfecti. Et jam notavi tales proferentem non laudari, ſed interdum tamen excludentem culpari.

Cum viderim eamdem Tibi prodire q, vel DE, ſive ponamus y eſſe $\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}qq-rr)}$ ſive y eſſe $\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}qq-rr)}$, feſtinatio alia agentis fecit, ut vererer, ne incideres in Circulum; ſed bene mones, quod & ſtatim attendenti patet, id per ſe caveri, & ceſſare hic ambiguitatem mutatis ſignis, adeoque non eſſe neceſſarium in tali caſu ut formulas extrahibiles quæramus. Quod vero occaſione eorum, quæ de formulis extrahibilibus, ſeu in rationales abeuntibus ad ſeparandas inter ſe diverſas radices dixi, vereris ne ſeparatio iſta contingat nobis invitis, & diverſæ radices ſint ad diverſas curvas; id cenſeo non eſſe metuendum: vel enim non fiet extractio; vel ſi ſuccedet, deſtruetur id quo radices diſtingui poſſent; quod ſi hoc non fiat, utique curva proveniens non erit apta ad ſcopum, ſed vitanda. Et vitabitur ſane, ſi extractionem indefinitam non procuremus nova explicatione ipſius x. Itaque ambo fruſtra aliquid mali veriti ſumus; utiles tamen ſunt dubitationes iſtæ, ad res penitius noſcendas. Cæterum ſive per quinque illas æquationes ſimpliciſſimas, & ſemel in univerſum valentes mecum procedas, ſive non, res eadem eſt; poſt inventionem ſupprimi aut larvari poſſunt, interim exhibent progreſſum, & velut gradus mentis in inveniendo.

Dominus *Frater* Tuus in litteris, quibus mihi ſolutionem ſuam ſignificat, proponit mihi obſervationem quamdam ſuam dioptricam, nempe ſi vitrum plano-planum ad axem viſionis valde obliquum ſtatuatur, dextrum per illud incipere apparere ſiniſtrum & viciſſim, ſupero tamen & infero ſitum ſuum ſervante; cauſam ſe ex principiis

piis opticis nondum reperire potuisse. Hanc inquisitionem in responsione declinavi, cum longe aliis sim occupatus, & talia attentionem non vulgarem requirant. Venit postea in mentem, sæpe fieri ut plunæ habeantur, quæ circulares sunt ex centro admodum longinquo, vel alterius figuræ; atque ita quærendum fore, an ex quacunque distantia hoc ipsi apparuerit, & an ex pluribus eodem modo. Si quid hic suppeditare poteris, operæ pretium facies. 1697 Mai.

Quæsivit etiam de Machina mea Arithmetica, cujus & nuper & olim visæ Dn. de Tschirnhaus in novissima Libri sui editione meminit. Respondi nihil eam penitus habere commune, nec cum Logarithmis, nec cum Rhabdologia *Neperiana*, quam alii postea in rotulis, vel aliis formis exhibuere, & magnorum numerorum multiplicationes vel divisiones æque esse in ea faciles ac parvorum, & nullis opus esse additionibus vel substractionibus auxiliaribus in multiplicando, vel dividendo: sed Machinam esse sumtuosam, & multarum rotarum instar horologii; nam interrogaverat an mediocri pretio haberi posset. Duo exempla habeo; sed malo rem eo deducere, ut plura elaborentur antequam publicem. Rudimenta olim *Galli*, *Angli*que viderunt. Magno cum applausu Hugenius, qui inspexerat, aliquoties admonuit ut absolvi curarem; quod non sine magno sumtu tædioque factum est, dum varie mihi cum opificibus fuit confligandum; sed nunc contentus sum inventum ab interitu vindicatum esse. Productus multiplicationis potest in jam elaborato exemplo ascendere ad 12 notas; multiplicandus vero numerus ad notas 8; ne quis rem in exiguis tantum numeris exhibitam putet. Sed hoc occasione litterarum Domini *Fratris* Tui; Vale.

Dabam *Hanoveræ* 26 Mai. 1697.

Deditissimus

Godefridus Guilelmus Leibnitius.

P. S.

1697 Mai. P. S. His jam ſcriptis, mitto quæ in *Actis Maii* de Curva Brachyſtochrona variorum ſolutiones editæ ſunt, uti ad me miſit Dominus MENKENIUS *, cum Litteris 22 Maii datis. Volui ut ſtatim acciperes, quia Dominus *Frater* Tuus Tibi potiſſimum nova Problemata proponit, termino & præmio ſtatuto; quod videtur faciendum ſibi putaſſe, quia Problemata quæ proponit non ſatis elegantiæ per ſe, vel utilitatis habere videntur; niſi quod forte artem inveniendi augebunt. Gaudeo interim, quod verba ejus nihil habent amari vel aculeati, imo commendationem Problematis Tui continent. Judicabis ipſe, an putes per Problemata ejus augeri poſſe artem inveniendi, quo caſu Te digna erunt.

Dum hæc ſcribo, non poſſum mihi temperare quin Problemata conſiderem. Prius de curva, quæ, ex omnibus ſuæ ſpeciei, & baſeos, promtiſſime ad perpendiculum datum accedat, determinatum numerum requirit; qui quantumvis prope verum [ſi rationalis non ſit] haberi poteſt. In altero Problemate [Iſoperimetro-
TAB. XI. rum] invenio aliquid obſcuritatis. Nam ſi (*Fig.* 59.) linea BFN, datæ magnitudinis, baſeoſque BN, talis eſt aſſumenda, ut area NBZN fiat maxima, utique & area NBFN erit maxima [quippe ad maximam in ratione data PZ ad PF, conſtante, ut ponit :] ergo linea BFN erit circularis, BZN elliptica : Cum tamen ipſe neget NBFN aream eſſe maximam. Aliud eſt ſi ratio PZ ad arcum BF ſit data conſtans, ubi mihi quoddam Catenæ genus obvenit, ni fallor. Sic figuram concipio, nam Dominus MENKENIUS non miſit,

Videbis

* G. G. L. *Communicatio ſua pariter, duarumque alienarum ad edendum ſibi tum a D.* Joh. BERNOULLIO, *deinde a D.* March. HOSPITALIO *communicatarum ſolutionum Probl. Celerrimi deſcenſus*, &c. Act. Er. 1697. Mai pag. 201.

Joh. BERNOULLI *Curvatura radii in diaphanis, ſolutioque Problematis a ſe propoſiti de invenienda Linea Brachyſtochrona* &c. Ibid. pag. 206, & Opp. Tom. I. N°. XXXVII. pag. 187.

Jac. BERNOULLI *ſolutio Problematum fraternorum, una cum propoſitione reciproca aliorum.* Act. Er. 1697. Mai. pag. 211. Opp. N°. 75 p. 768.

Dn. Marchion. HOSPITALII *ſolutio Probl. de linea celerrimi deſcenſus.* Acta Erud. 1697. Mai. pag. 217.

Epiſtola ad Praen. MONTAGUE &c. *in qua ſolvuntur duo Problemata mathematica a* Joh. BERNOULLIO *propoſita.* Act. Er. 1697. p. 223. Opuſc. Newt. T. I. Opuſc. VI. pag. 285.

Videbis & Dnum. TSCHIRNHAUSIUM sua adjecisse †. Sed de Cycloïde videtur sibi solutionem non adscribere, etsi ejus mentionem faciat. Suspicatur, quod miror, adhuc alias curvas posse satisfacere. Et putat Problemata talia, quæ proposuimus, esse valde laboriosa, & solere ab iis proponi, qui casu vias faciles repererunt; in quibus omnibus, vides quantum absit ab eo quod res est. Putat etiam HUGENII Librum de Cycloïde mirum quantum nostræ inquisitioni profuisse; cum tamen de eo nemo nostrum, vel per somnium cogitaverit, nisi re aliunde comperta. Ita etiam loquitur, quasi & alterum Tuum Problema solveret, nec tamen, quantum video, solvit. Alia etiam nobis rursus promittit &c. ....

1697 Jun.

† *De methodo universalia Theoremata eruendi, quæ Curvarum naturas simplicissime exprimunt: De Problemate item* Bernoulliano, *&c. per* D. T. Act. Er. 1697. Mai. pag. 220.

EPISTOLA LIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Curva segmentorum. De observatione dioptrica. De machina arithmetica. De Problemate Isoperimetrico, & Curva citissimi appulsus ad datam positione rectam. De TSCHIRNHAUSIO *&* LAHIRIO.

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

. . . .

VIderis approbare solutionem meam pro curva habente $PL^2 . PK = a^3$; substituendo in radicibus $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$ & $y = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}qq - rr)}$ loco q valorem 1697 Jun.

1697 Jun. $(a^6 + r^6) : a^3 r^2$: Interim revera hac fubftitutione radices in rationales abeunt, nec tamen deftruitur id, in quo diftinguuntur; proveniunt enim diverfæ, una $y = r^4 : a^3$, altera $y = a^3 : rr$. Quid ergo hic cenfendum. Unamne an duas diverfas producunt curvas? Sed fuppofito hanc curvam non aptam effe, fed vitandam; quid judicas de altera illa percurrente per Logarithmos inventa?

Quod attinet obfervationem *Fratris* de vitro plano-plano, eam jam olim Eruditis *Parifiis* propofueram; qui autem omnes illud ipfum refponderunt, quod Tu jam fufpicaris, & quod ego ab initio *Fratri* dixeram; fcilicet vitra non perfecte plana effe fed aliquantulum convexa & quidem cylindrice potius-quam fphærice, quia dextra cum finiftris, non vero fupera cum inferis mutantur. Cæterum, quantum memini, obfervationem hanc in unico tantum vitro fecit, quod alicui feneftræ hypocaufti domus fuæ erat infertum, cujus facies magnam aream refpicit, ita ut non-nifi objecta multum diftantia fitum fuum permutaverint, propioribus verum retinentibus; præterea oculus fpectatoris ad minimum fex feptemve paffibus diftare debeat in vitro valde obliquo; in minori diftantia permutatio objectorum nulla fiebat. An vero in majori res fucceffiffet, dicere non poffumus, quia ob anguftiam conclavis major diftantia non dabatur.

De Machina tua arithmetica jam aliquoties rogare volui, quod viderem illius mentionem fieri in *Medicina mentis* TSCHIRNHAUSII; vellem illam videre libenter, vel faltem defcriptionem ejus accuratam. Poteftne etiam ufui quotidiano infervire? nam cum illam adeo fumtuofam, & tot rotarum apparatu fabricatam dicas; vereor ne curiofa magis fit quam utilis. Quæftor nofter SPANHÆMIUS nuper mihi monftrabat hujufmodi machinam arithmeticam fimpliciorem plurimis cylindrulis inftructam, quorum fuperficiebus varii numeri erant adfcripti; ifti cylindruli fuper axiculis circumaguntur pro ratione multiplicationis vel divifionis: plenum tamen ufum probe mihi non poterat explicare, faltem dicebat inventorem ejus effe *Gallum Parifinum*.

Gratias ago pro Communicatione fragmenti *Actorum*: potuiffes hoc labore fuperfedere, nam biduo ante Tuas heri acceptas, id eft ante

ante triduum, accepi litteras Dni. Menkenii, una cum eodem fragmento & figuris. Schediasma *Fratris* quod ibi habetur, facit ut ita prompte Tibi respondeam. . . . . 1697 Jun.

. . . .

Suntne hæc illa longe difficiliora, de quibus Tibi. . . . . . scripserat? hæc, inquam, quæ de figuris Isoperimetris, de maximo descensu Centri gravitatis, de citissimo appulsu ad datum perpendiculum &c. proponit; .... imo hæc, ... partim jam diu inter nos agitata fuere, partim ..... simplicissima tantum sunt Consectaria eorum quæ in hoc ipso mense *Actorum* publicavi.......... Viderit ibidem jam contineri [implicite quidem, sed quæ, vel ab infante, tanquam Corollarium facile deduci possit] solutionem meam sui Problematis, imo ipsius præcise pro cujus solutione mihi promittit honorarium 50 Imperial. & quod plus est, solutionem infinities generaliorem quam Problema postulat; Quærit enim *Frater*, quænam ex infinitis Cycloïdibus (*Fig.* 60.) per A transeuntibus, & super eadem basi AH constitutis, illa sit, per quam descendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendiculum ZB appellat. Pone loco perpendiculi ZB, aliam quamvis rectam positione datam in quovis angulo cum Horizonte, & sic Problema universalissime conceptum solvo facillime hoc modo. Sit (*Fig.* 61.) horizontalis AZ, positione data recta ZB, punctum datum A. Dico Cycloïdem AB descriptam super AZ & occurrentem rectæ ZB ad angulos rectos, fore illam per quam grave a puncto A citissime pervenerit ad datam positione ZB. TAB. XI. TAB. XI.

Hoc utique immediate sequitur ex proprietate curvæ meæ Synchronæ, quam ostendi normalem esse omnibus Cycloïdibus ex A & super AZ descriptis: Hinc tangens synchronæ erit perpendicularis Cycloïdi per punctum contactus transeunti, quod punctum determinat brevissimum descensum ad tangentem per naturam Synchronæ; quia hoc solum punctum tangentis est in ipsa Synchrona, reliqua sunt extra. Si itaque ponatur ZB, tangere aliquam Synchronam, erit punctum B contactus; Ergo &c. Ostendendum vero restat, [ne quid *Frater* desideret] quomodo Cycloïs AB ducenda sit, ut occurrat normaliter rectæ ZB, id quod sic facio. Super ZG diametro

1697 Jun. metro perpendiculari ad AZ & ad lubitum assumta, describatur circulus ZβG secans rectam ZB in β; quo puncto delineatur Cycloïs $\alpha\beta$: Jam si fiat ut arc. βZ ad ZG, ita AZ ad quartam, erit hæc, diameter circuli genitoris quæsitæ AB. Si ducatur AB parallela ipsi $\alpha\beta$ erit B punctum citissimi appulsus.

En itaque Problema plenissime solutum, quod poteris *Fratri* per occasionem indicare, & simul monere, ut promissam summam apud Te deponat; Te enim Judicem nostrum constituam, non dubito quin id sit, consentiente *Fratre*. Sciat enim *Frater* quod si promissis stare non vellet, non me, sed pauperes, quibus hanc summam destinavi, sit defraudaturus: me enim pudet capere emolumentum ex hac solutione, quam sine ullo labore, sine ullo temporis dispendio, sine ullo mearum rerum damno, non intra tres menses, quos mihi pro deliberatione ad suscipiendum concedit, sed intra tria horæ minuta adinveni. Alterum Problema, quod de Isoperimetris proponit, (quod nescio an etiam comprehendatur sub honorario, quidquid sit illud) pari facilitate solvi, & quidem etiam longe universalius, quam a *Fratre* postulatur. Nil in hoc Proble-
TAB. XI. mate obscuritatis inest, uti putas, sed ob defectum figuræ, credo, male intellexisti. Quærit enim ex omnibus Isoperimetris (*Fig.62.*) super communi basi BN, constitutis, illam BFN, quæ non ipsa quidem comprehendat maximum spatium, sed faciat, ut aliud curva BZN comprehensum sit maximum, cujus applicata PZ ponitur esse in ratione quavis multiplicata vel submultiplicata (N B. Non dicit multipla vel submultipla, ut Tu intelligis) rectæ PF, vel arcus BF, hoc est, quæ sit quotacunque proportionalis ad datam A & rectam PF, curvamve BF. Brevius ita proponi potest: Quæritur ex omnibus Isoperimetris BFN illa, ut facta alia curva BZN, cujus applicata PZ sint ut potestas quæcunque ipsius PF, spatium NBZN sit omnium maximum. Hujus solutionem, pro hac vice, sine methodo solvendi, ob brevitatem temporis exhibebo; ut affirmare possis, me, tertio die post visum *Fratris* schediasma, Tibi solutiones Problematum ejus perscripsisse. Sit ergo numerus potestatis n, PF seu BG, x; & BP seu GF, y; recta arbitraria, a;

a; fiat GF, seu $y = \int (x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$: Dico punctum F fore in curva optata BFN. Hinc ſtatim patet, ſi *n* ſit 1, curvam fore circularem; ſi vero *n* ſit 2, id eſt, ſi PZ ſint ut quadrata ipſarum PF, erit curva BFN, illa ipſa quam format linteum a fluido ſtagnante expanſum, quam *Frater* etiam ſuæ Elaſticæ tribuit. Si vero *n* ſit $\frac{1}{2}$, id eſt ſi PZ ſint in ſubduplicata ratione ipſarum PF, erit curva BFN iterum Cycloïs vulgaris, cui proinde hic ſingulare quid accidit, quod $\int dy \sqrt{x}$ ſit omnium maximum, & [poſito arcu BF, *t*] $\int (dt : \sqrt{x})$ omnium minimum, ut ex citiſſimo deſcenſu patet; ſic itaque Cyclois egregia gaudet proprietate. 1697 Jun.

Cæterum generaliter obſervo......... quod, quotieſcunque *n* ſit fractio, cujus numerator ſit unitas, denominator vero numerus par, erit curva quæſita BFN talis, ut ope rectificationis Circuli conſtrui poſſit; ſi vero denominator ſit numerus impar, erit tunc curva quæſita, BFN ſemper algebraïca. Sit exempli gratia $n = \frac{1}{3}$, id eſt ſint PZ in ratione ſubtriplicata ipſarum PF; erit GF ſeu $y = 2a - (2a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}) \sqrt{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})}$. Hinc, ut puto, non mediocris affulget lux pro inſtituendis ſummationibus quantitatum differentialium, quæ reducuntur ad hanc formulam $\int (x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})})$: determino enim caſus ubi fiunt abſolute ſummabiles; item & illos, qui requirunt extenſiones circularium, & denique illos qui neque ſummabiles neque circulares exiſtunt. Quid ſi jam Problema univerſaliſſime proponam & ſolvam, ſi ſcilicet loco quod PZ, ſecundum *Fratrem*, debeat eſſe in ratione certæ poteſtatis ipſius PF, jam ſit quomodocunque compoſita ex PF & datis; id eſt, ſi PZ ſit æqualis ipſi GH applicatæ curvæ datæ BH; quæ loco quod, ſecundum *Fratrem*, eſt ex Parabolarum genere, a me ſupponitur qualiſcunque: annon multo plura præſtitero quam a me exigitur? Si ergo in eadem proportione honorarium promiſſum augere teneretur *Frater*, non puto omnes ipſius opes ſuffecturas. Ecce autem ſolutionem; poſitis quæ

 prius,

1697 Jun. prius, appelletur GH, X [quæ datur ex BG feu x]; ergo datur fpatium BGH, feu $\int X dy$, algebraïce, vel faltem tranfcendenter; ergo datur etiam $\int (X dx : x)$. Sit itaque $\int (X dx : x) = \xi$; dico, facta GF feu $y = \int (\xi dx + \sqrt{(a^2 - \xi^2)})$, fore F, in curva quæfita BFN, quæ fcilicet ex omnibus Ifoperimetris illa eft, cujus applicata FP producta ad Z, ita ut PZ fit = GH, efficiet fpatium NBZN omnium quæ ita fieri poffunt maximum.

Hoc ipfo momento, quo hæc paulo acrius meditor, mirabilem deprehendo curvarum convenientiam, quod enim modo fupra Cycloïdi fingulare credidi, dum in illa $\int dy \sqrt{x}$ eft maximum & $\int (dt : \sqrt{x})$ minimum, jam video hoc omnibus hifce curvis effe commune. Dico enim fi BFN curva talis fit ut $\int x^m dx$, fit maximum, fore etiam femper $\int (dt : x^m)$ minimum.

Ne quid omittam [quamvis non neceffarium......] ex abundanti tamen Te certiorem facio, quod etiam geometrice folverim Problema de invenienda curva, [non tantum ex omnibus Cycloïdibus, ut fupra facile præftiti,] fed ex omnibus alterius ejufdem fpeciei & bafeos quæ promptiffime, non folum ad perpendiculum, fed ad quamvis rectam pofitione datam accedat; unde vides plane non determinatum curvarum numerum requiri, ut opinaris. Definio enim præcife, five per quadraturas, five per rectificationes, illam ipfam quæ ex infinitis fuæ fpeciei quæfito refpondet. Et quidem res perpetuo eo recidit, ut prius determinetur Synchrona curvarum datæ fpeciei: quæ curvæ, fi fint Cycloïdes, Synchrona facile determinatur; eft enim illa quæ omnibus Cycloïdibus eft normalis, ut fupra oftendi : Sed fi curvæ datæ fint alterius fpeciei, exempli gratia, circulares vel parabolicæ [quos cafus non folviffe fed nude aliis propofuiffe contentum fe dicit *Frater*] hoc opus hic labor eft. Tunc enim Synchrona curvis fpeciei datis amplius non perpendicularis eft, fed inclinationem ad illas ubique variat. In hoc profecto præcipue aliquid me præftitiffe puto;............. neque ego facile eo penetraffem, nifi genius quidam, albus an ater fit, nefcio [ut cum Theologo quondam noftro loquar] peculiare mihi

mihi artificium inspirasset, quocum etiam alia Problemata solvo insolubilia antehac mihi visa. Vides ergo quousque intra triduum progressus fuerim, cum prius ne per somnium quidem de hisce cogitaverim. Nil superest, nisi ut Te rogem, ut instiges Dnum. MENKENIUM, ut quamprimum, & si fieri possit hoc mense, publicum moneat, me brevi adeo temporis spatio potitum esse solutionibus Problematum à *Fratre* mihi, præ aliis, propositorum, longeque plura præstitisse quam petierat: solutiones vero ipsas me exhibiturum, quam-primum ille præmium, a se mihi promissum, a me vero pauperibus destinatum, Tibi Judici, harum rerum fere soli intelligenti, remiserit, ut illud mihi, si solutiones meas legitimas deprehenderis, adjudices, sin minus, *Fratri* reddas.

Prout Dnus TSCHIRNHAUSIUS loquitur in suo Schediasmate *, videtur materiam hanc non satis intelligere. Facit quidem mentionem Cycloïdis, minime tamen Problema solvit: unde conjicio, Dnum MENKENIUM ipsi communicasse solutiones nostras, antequam imprimerentur. Si videret demonstrationem meam Syntheticam, quam suppressisti †, non dubito, quin mutaturus esset sententiam, in qua est, quasi plures aliæ curvæ præter Cycloïdem possent satisfacere.

Accepi Litteras à Domino *Marchione* HOSPITALIO & à BELVALLIO; ille significat Dnum. DE LA HIRE prætendisse, se triplici via pervenisse ad solutionem Problematis celerrimi descensus, sed semper deceptum fuisse; quippe qui invenerit Parabolam cubicalem. Dominus BELVALLIUS promittit se revocaturum per occasionem errorem commissum in recensione Problematis mei, ubi de Tua solutione agitur; misit etiam fasciculum Observationum Tuarum in Philosophiam *Cartesianam*, quas perlegere nondum vacavit. Juvenem illum *Hagiensem*, qui Problema meum tentavit, esse Filium Domini DIERCKENS Præsidis in *Curia Brabantiæ*; utrum-

* *De methodo universalia Theoremata eruendi, quæ Curvarum naturas simplicissimas exprimunt: De Problemate item* BERNOULLIANO, *&c. per D T.* Act. Er. 1697. Maj. pag. 220.

† *Hæc habetur in* Act. Erud. 1718. Febr. p. 87. & Mem. de l'Acad. 1718. pag. 137. vel Opp. Tom. II. N°. CIII. p. 268.

utrumque & Filium maxime his studiis delectari, ex litteris *Belvallianis* disco: Vale.

Groningæ 7. Junii 1697.

Amplitud. Tuæ

Deditissimus

J. Bernoulli.

EPISTOLA LIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Curva segmentorum. De machina arithmetica. De Curva citissimi appulsus & Synchrona. De Problemate Isoperimetrico.

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime!

1697 Jun. PRimo Cursore tuas Dno Menkenio misi, jussique ut mature publicari curet, Te Problematum Fraternorum solutiones brevissimo tempore dedisse.

Videris circa tuam curvam [ubi $PL^2, PK = a^3$] frustra aliquid metuere. Extractio succedens in valore ordinatæ hic nihil nocet, nec opus in hoc casu, ut discriminantia evanescant, sed pro illis tantum curvis, ubi radices eodem modo tractantur. Hoc vero discrimen inter $PL^2 . PK$ & $PL . PK^2$ tantum abest tolli oportere, ut potius sit conservandum. Sed talia ex festinatione excidere solent,

Et hanc veniam petimusque damusque vicissim.

Placet quod video suspiciones meas circa observationem dioptricam Domini *Fratris* Tui relatione Tua confirmari.

Putasne me tam male mihi consulere, ut sumtus conferre velim in Machinam, quæ nihil aliud præstet, quam ea quæ Tibi visa est? Si quic-

Fig. 57.

Fig. 58.

Fig. 59.

Fig. 60.

Fig. 61.

Fig. 62.

quicquid non a quovis redimi poteſt, curioſum magis quam utile eſt; nec triremes ſcaphis præſtarent, nec tormenta ſclopetis. Illud quæritur annon ultra proportionem ſumtuum etiam effectus creſcat. Equidem MORLANDUS in *Anglia*, Tubæ ſtentoreæ author, Rhabdologiam ex baculis in cylindrulos tranſtulit, & additiones auxiliares peragit in adjuncta Machina additionum *Paſcaliana*. De qua re & Librum ſcripſit. Tale quid poſt ipſum fecit & GRILLETUS *Gallus*; ſed omnia iſta nihili fere ſunt, nullamque notabilem præſtant utilitatem. Ego jam prædixeram cum Rhabdologia, aut inde deductis, nihil ei inſtrumento commune eſſe, quod ego ſum commentus. Deſcriptionem ejus dare accuratam res non facilis foret *. De effectu ex eo judicaveris, quod ad multiplicandum numerum ſex figurarum [exempli gratia] rotam quamdam tantum ſexies gyrari neceſſe eſt, nulla alia opera mentis, nullis additionibus intervenientibus; quo facto, integrum abſolutumque productum oculis objicietur. Idem eſt de diviſione, ubi nullo in quærendo quotiente opus eſt tentamento, ſubtractionibuſque nullis. Coram Tibi oſtendere machinam, intus & extra, mihi aliquando jucundiſſimum erit. Non eſt facta pro his, qui olera aut piſculos vendunt, ſed pro obſervatoriis aut Cameris computorum, aut aliis, qui ſumtus facile ferunt & multo calculo egent. Video Dnum. DE LA HIRE expertum eſſe, quanto facilius ſit Analyticas noſtras Demonſtrationes ſolutionum noſtrarum vertere in ſyntheticas, quam ſolutiones talium Problematum per ſe invenire. 1697 Jun.

Animadverſiones meæ in Partem generalem *Principiorum Carteſianorum* ſcripta ſunt ad captum Lectorum, qui profundiora non attingunt.

Quod Domini *Fratris* Tui Problema attinet, utique curva, ex pluribus ejuſdem baſeos & ſpeciei, a dato puncto, breviſſimo tempore, ad datam rectam appellentem mihi ope Synchronæ eleganter exhibere videris; nam ita rem praſtas conſtructione lineari. Ego primo aſpectu modum obſervavi parametrum lineæ quæſitæ exhibendi, numero quamtumvis accurato, quoties algebraïce haberi non po-

 teſt,

* *Aliquam vide in* Miſcellaneis Berolinenſibus Tom. I. Part. 3°. N°. 31. p. 317.

1697 Jun. test; quo tunc contentus eram, quia hic de determinata tantum quantitate, nempe parametro, non de linea aliqua, seu indefinito quærendo agitur. Melior quidem est constructio linearis, sed hanc ego tunc non quæsieram; quia id unice respexeram, quod levissima consideratione inter scribendum ad Te in mentem venerat. Interim verba mea nescio quomodo in transversum accepisti. Neque enim in mentem venit dicere determinatum curvarum numerum requiri, ut Epistola tua mihi ascribit; sed determinatum numerum, non curvarum, sed mensuræ rationem parametri ad rectam constantem, seu unitatem, exhibentis. Cæterum post Synchronas semel ad hoc negotium a Te pulchre applicatas, non puto Tibi genio atro, vel albo [ut cum ZUINGLIO vestro per jocum loqueris] opus fuisse, ad rem in aliis quoque præter Cycloïdem curvis præstandam. Etsi enim in cæteris, recta positione data lineæ quæsitæ non sit perpendicularis; est tamen, quantum judico, semper tangens Synchronæ, ac proinde tantum opus est describi Synchronam, TAB. XII. quæ rectam positione datam tangat. Sint (*Fig. 63.*) lineæ specie convenientes, & similiter ad A positæ AFG, A(F)(G) & ipsam rectam ZGB (G) positione datam tangat Synchrona FB(F) tunc utique, ut in Cycloïde facis, merito Tecum concludemus, ipsam AB esse lineam quæsitam brevissimi appulsus. Nam quævis alia ipsi ZB occurreret in G, est autem tempus per AFG longius quam per AF seu per AB. Hinc poteras solutionem tuam adhuc reddere generaliorem, ut præstet quæsitum, non tantum quando positione data, ad quam-citissime pervenire debet, est recta, sed etiam si sit curva, imo si esset, non linea, sed superficies, posses pro synchrona linea adhibere synchronam superficiem, quæ superficiem positione datam tangat, sed hæc Te [si modo animum advertas] latere non possunt. Miratus sum Dominum *Fratrem* Problemata Tibi proponere voluisse, pulchra quidem per se, sed de quibus tamen facile judicare potuisset, viam Tibi ad ea patere, ex ipsa solutione Brachystochronæ; Tota enim clavis hujus methodi inveniendæ formæ maximum præstantis in eo consistit, ut maximum non solum in toto, sed & in parte præstetur, licet indefinite parva. Ita, si descensus sit celerrimus ab uno extremo lineæ

neæ ad aliud, etiam (*Fig.* 64.) in particula ejus BCD erit brevissimus descensus a puncto B ad D. Et quia curva infinite parva BCD sumi potest pro composito ex duabus rectis BC, CD; hinc oportet tantum quærere punctum C tale, ut descensus in duabus rectis istis sit brevissimus; quo facto, habebitur Brachystochrona. Et quia tribus punctis indefinite propinquis, seu curvedine, determinatur osculans circulus, vel contra; hinc revera duæ methodi, mea & tua, quam directam † vocas, in fundo coincidunt. Hac methodo res etiam præstatur pro Catenaria; nam quia catenæ longitudine datæ, datis duobus extremis, situs debet fieri talis, ut Centrum gravitatis maxime descendat; patet etiam in Catenariæ punctis indefinite vicinis hoc fieri, ut, data particulæ curvæ longitudine, seu summa rectarum BC, CD, & extremitatibus B, D, puncti C sit situs talis, ut hujus ex duabus rectis compositi datam longitudinem habentis centrum maxime descendat, unde curvatura & proprietas osculorum, imo & tangentium, determinari potest.

1697 Jun. TAB. XII.

Eadem locum habent suo modo in maximis spatiis Isoperimetrorum, vel ut Isoperimetra relatorum.

Suspicor Dominum *Fratrem* Tuum etiam ope Synchronarum ad brevissimos appulsus venisse; quia video eum connexionem cum radiis & undis *Hugenianis* perspexisse. Unde facile potuit Synchronas animadvertere. Sed miror, quod non Tibi eadem facile patere posse judicavit. Quæ de quadraturis ipsarum $y = \int x^n dx : \sqrt{(a^{2n} - x^{2n})}$ habes; fortasse Dominum *Fratrem* Tuum non latent. Si facias $x^n = z$ fiet $y = \int dz . z^{1:n} : n \sqrt{(a^{2n} - zz)}$ pro qualibus olim me Canones condidisse puto. Volebam monere, ne obliviscereris solvere Problematis partem, ubi curvæ novæ ordinata est in ratione, non ad prioris ordinatam, sed arcum: sed video & hoc in Tua generalissima solutione curvæ utcunque relatæ contineri.

Oo 2 Haud

† *Hanc vide* Act. Erud. 1718. Febr. p. 86. *vel* Mémoires de l'Acad. R. des Sciences de Paris. 1718. pag. 136. *vel* Opp. Tom. II. N°. CIII. p. 267.

1697 Jun. Haud dubie Dominus *Frater* Tuus solutionem omnium quæ proposuit Problematum exiget, tanquam conditionem quæ solutionem honorarii ingrediatur; diserte enim, pag. 215, * requirit *solutiones.* Cæterum aliquem alium arbitrum mihi adjungi e re erit, quem Domino *Fratri* Tuo nominandum relinquemus, siquidem ipsi conditio placet. Vale & fave:

Dabam *Hanoveræ* 15°. Junii 1697.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Reliqua Fragmenta ex *Actorum Lipsiensium* mense nuper transmisso remitti peto; & judicium tuum de meis ad CARTESIUM Animadversionibus expecto.

* *Actor. Erud.* 1697.

EPISTOLA LV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Problematibus Fraternis. De Curva citissimi appulsus. De Problematis Isoperimetrici solutione. De Animadversionibus Leibnitianis *in* Principia CARTESII. *De causa duritiei ex motu conspiranti.*

Vir Amplissime & Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1697 Jun. QUæ narras de Machina Tua arithmetica faciunt ut jam quid majus de ea concipiam: si illam curiosam magis quam utilem suspicabar, nolim tamen Te putare quasi illam contemserim: Curiosum sine utili pluris æstimo, quam utile sine curioso; sed qui utrum-

utrumque miscuit, omne tulit punctum: & hoc nomine Tuam Machinam licet mihi nondum visam, ex Tua tamen relatione maximi-facio: pergratum utique esset, eam aliquando coram videre. 1697 Jun.

Quod arbitratum me inter & ***Fratrem*** acceptaveris, mirifice gaudeo; scripsi nuper Bellvallio Epistolam satis longam, quam forsan imprimet, * ubi judicium meum aperui de solutionibus Problematis mei quæ novissime in ***Actis*** prodierunt, simulque mentionem injeci de reciproca propositione Problematum Fraternorum, & de plenaria mea solutione eorum, apud Te [nostrum Judicem] jam-jam deposita. Non video cur e re sit Tibi alium arbitrum adjungi a ***Fratre*** nominandum, vel qua fronte Te solum recusare audeat, cum nemo sit qui ignoret Te nullo partium studio teneri; præsertim in illis rebus, per quas solas nos ambo Tibi noti sumus: ut adeo hac in parte non sit, cur uni magis faveas quam alteri. Si verba Tua in Tuis præcedentibus, forsan ob confusam nimis scriptionem in transversum accepi, legendo ***determinatum numerum curvarum***, pro ***determinato numero mensuræ rationis parametri ad constantem***, non minus sinistre interpretaris sensum verborum meorum, quasi ego non præviderim Synchronam, a me semel adhibitam in Cycloïdibus, pro determinando celerrimo appulsu ad lineam rectam utcunque positione datam, generaliter posse applicari ad rem in aliis quoque præter Cycloïdem curvis præstandam; cum tamen in litteris meis disertis verbis dixerim ***rem perpetuo eo recidere, ut prius determinetur Synchrona curvarum datæ speciei.*** Scio etiam maxime, quod etiamsi recta positione data non sit perpendicularis, in aliis, præter Cycloïdes, curvis; tamen semper sit tangens Synchronæ: & qui hoc ignorare potuissem, cum Synchronæ natura hoc statim secum ferat, & impossibile sit ut illam contemplari potuissem, quin hoc ipso id viderim; ut verbo dicam, non potui non videre. Sed hic id ipsum quæro, quod Tu pro concesso tanquam postulatum assumis, ac si nihil difficultatis inesset;

* Imo extat, *Histoire des Ouvrages des Sçavans.* Juin 1697. p. 452. Vid. Opp. Tom. I. N°. XXXVIII. pag. 194.

1697 Jun. ineffet; dum dicis, *ac proinde tantum opus est, describi Synchronam, quæ rectam positione datam tangat.* Imo maxime hoc opus est, & opus esse semper agnovi; sed quomodo, quæso, describenda est Synchrona generaliter in curvis datæ alicujus speciei? Habeo ego methodum pro hoc, quæ est illa ipsa, quam a peculiari genio mihi inspiratam [per jocum] dixi; præterea tametsi innotescat [quod quidem palmarium est] modus construendi Synchronam, non tamen inde statim deducitur modus ducendi ejus tangentes; quia, si meministi, non ita pridem Tibi dixi, dari aliquas curvas quarum constructio simplicissima habetur, quæ tamen non facile æquatione differentiali, nedum algebraïca, exprimi possunt; atque adeo cum tangens curvæ duci non possit, nisi cognoscatur relatio inter dx & dy, id est, nisi habeatur æquatio differentialis naturam curvæ exprimens, evidens quoque est modum construendi Synchronas, [qui per se etiam maxime difficilis est] nondum sufficere pro determinatione Problematis, sed requiri insuper relationem inter dx & dy, ut habeatur tangens vel potius, ut data tangente, seu inclinatione rectæ positione datæ, habeatur punctum in Synchrona cui ista inclinatio conveniat. Et sane exemplo nobis sit vel sola Synchrona Cycloïdum, cujus constructionem tam brevem, tamque simplicem trado: quomodo quæso, exinde ejus æquationem differentialem quæreres, vel saltem quomodo duceres ejus tangentes, si non aliunde constaret, nempe ex consideratione undæ luminaris, quod sit perpendicularis Cycloïdibus? Non quidem dubito quin eo pervenias, si tentare digneris, namque & ego eo perveni, & inveni modum reducendi hujusmodi curvas ad suas æquationes: sed repeto quod dixi, singulare scilicet artificium pro hoc requiri. . . . . Mirari itaque satis non possum, quod ita perfunctorie hoc consideraveris. Quam-frigide dixissem, me a genio quodam habuisse, si nihil aliud mysterii subesset quam id quod recta [vel si mavis curva] positione data tangere debeat Synchronam. Optarem ut periculum fecisses in unico illo exemplo [quod *Frater* proponit, de Circulis], quo difficultatem rei ipse expertus fuisses. Oportet utique ut *Frater* ipse illud pro desperato habeat; cum dicat, se aliis relinquere tentamen ejus, sibi sufficere propo-

proponere. Interim prima occasione mittam Tibi non solum hoc, sed generalem meam Methodum determinandi curvam ex infinitis specie datis, per quam grave descendens citissime appellit ad rectam positione datam, idque sine interventu curvæ Synchronæ; quod non facile credideris; quamvis id, mediante Synchrona, etiam præstare possim; quærendo scilicet æquationem differentialem pro natura Synchronæ. Sed hic modus, non tam naturaliter nec tam simpliciter procedit, ac alter ille sine Synchrona. 1697 Jun.

Suspicaris *Fratrem* meum etiam ope Synchronarum ad brevissimos appulsus venisse: ego autem nil minus credo quam hoc; contra potius persuasus sum totus, per ingentes ambages quæsito tandem positum fuisse [& quidem tantum in Cycloïdibus, nam ut jam dixi in aliis curvis id pro desperato habet]. Atque adeo suam viam [qua breviorem dari non putaverit,] mihi oppido imperviam credidisse. Perpende, obsecro, si, vel per somnium, de Synchrona cogitasset, annon pro recta verticali quamvis aliam obliquam positione datam citissime attingendam proposuisset; cum per Synchronam res æque facilis sit, sive recta sit verticalis, sive obliqua: quod vero dicis eum perspexisse connexionem cum radiis & undis *Hugenianis*, pace tua, ego contrarium dixerim: id ipsum enim quod curvaturæ radii [non vero undæ] mentionem faciat, absque tamen ut quicquam dicat de identitate cum Brachystochrona, satis indicio est, hanc connexionem omnino ignorasse, & de unda nequidem cogitasse.

Quod attinet alterum *Fratris* Problema de Isoperimetris; quando credis illud ex hoc fonte posse solvi, considerando maximum non solum in toto, sed in parte præstari, & particulam curvæ indefinite parvam censendam esse compositam ex duabus rectis, quarum situs sit determinandus, ita ut illæ duæ rectæ, quarum summa constans supponitur, præstent maximum vel minimum quæsitum; quo situ invento, dari tria puncta, & per consequens Circulum per ea transeuntem, id est ipsum Circulum osculatorem, unde in fundo hanc methodum cum mea quam directam voco, coincidere concludis; hic iterum prius pronuntiasse quam satis examinasse videris. Scire Te volo, me initio etiam habuisse hanc meditatio-

1697 Jun. TAB. XII. ditationem, qua singulare quid efficere sperabam; concipiebam enim (*Fig.* 65.) BD ut subtendentem particulæ curvæ infinite parvæ, ex cujus extremitatibus B & D, tanquam focis, imaginabar Ellipticulam ECF, per filum BCD æqualem particulæ curvæ quæsitæ descriptam. Jam in hac Ellipsi ECF, [quæ considerari potest ut finitæ & ordinariæ magnitudinis,] quærebam punctum C, ad quod ductæ BC, DC, præstarent aliquod maximum vel minimum desideratum. Sed præterquam quod calculus prolixissimus & tædiosissimus evaderet; videbam etiam statim hoc mihi pro determinatione longitudinis radii circuli osculantis, plane nihil facere: nam prout filum BCD longius breviusve intelligitur [licet excessus ejus super BD debeat esse incomparabiliter minor quam BD vel BCD] necessario alius atque alius Circulus per tria puncta B, C, D, transibit, adde, quod interdum accidat, ut maximum quod in toto præstandum est, in particulis infinite parvis diversimode considerari possit; unde etiam diversæ solutiones prodirent; quod est absurdum. Exempli gratia, in ipsa Catenaria, ubi requiritur ut ejus Centrum gravitatis quam-maxime descendat, & cujus quælibet particula BCD consideratur æqualiter gravata, pondusculum ejus vel secundum totam longitudinem BCD extensum, vel in uno puncto C collectum, intelligi potest. Jam vero si quæras situm puncti C, ita ut commune Centrum gravitatis linearum BC, CD quam-maxime descendat, ad quod operoso Calculo Tibi opus est; item, si quæras situm ejus quando pondusculum collectum, id est ipsum punctum C quammaxime descendit, sine calculo vides esse, quando in eo puncto in quo linea horizontalis Ellipsin tangit; deprehendes duos illos situs esse diversissimos; unde in una hypothesi aliud specie triangulum BCD, & per consequens alius Circulus osculator prodiret, quam in altera; quod non potest subsistere, & sic frustra hac via quæreres naturam Curvæ.

Alia ergo via mihi incedendum erat ad determinandas ex Isoperimetris curvas, quarum summa applicatarum ad certam potentiam elevatarum, vel alio certo modo cum constante permixtarum, faciat maximum. Ut totum Tibi mysterium quo usus sum detegam, en tale est. Quærenda est generaliter curvatura lintei a liquore stagnan-

ſtagnante expanſi, quæ Centro gravitatis liquoris concedat locum 1697
infimum. Si jam concipis liquorem dividi in filamenta parallela Jun.
verticalia; quæ ſint, vel fingantur potius, gravata, in applicatarum ratione vel ſimplici, [ut in ordinaria lintei figura] vel duplicata, vel triplicata, &c.: evidens eſt Centrum gravitatis omnium iſtorum filamentorum, ſeu totius liquoris, diſtare a baſi horizontali [ſuppoſitis applicatis verticalibus x, & horizontalibus y & numero poteſtatis in cujus ratione filamentum liquoris ſupponitur gravatum, $n — 1$: ipſa autem quantitate liquoris L] $\int (x^n\, dy : \mathrm{L})$. Diſtantia vero hæc eſt maxima; ergo etiam $\int x^n dy$ eſt maximum: Ergo curvatura lintei continentis liquorem cujus filamenta verticalia ſunt gravata in ratione poteſtatis $n — 1$ ipſarum applicatarum verticalium, eſt eadem quæ foret curva ex omnibus Iſoperimetris quæſita; cujus applicatarum ad poteſtatem n elevatarum ſumma produceret maximum. Ex hoc fundamento reperi pro naturâ curvæ $y = \int ((b^n + x^n)\, dx : \sqrt{(a^{2n} — (b^n + x^n)^2)})$, vel contractius, ponendo pro b, quod arbitrarium eſt, o, $y = \int (x^n\, dx : \sqrt{(a^{2n} — x^{2n})})$. Quod autem hæc expreſſio ſimplicior reddi poſſit, faciendo $z = x^n$, unde $y = \int z^{\frac{1}{n}} dz : n\sqrt{(a^{2n} — z^2)})$, id mihi jam innotuiſſe ex eo potes colligere, quod in præcedentibus meis determinaverim caſus quando evadit abſolute ſummabilis, quando requirit extenſionem arcuum Circularium, & quando neque ſummabilis neque circulabilis eſt; nempe ſi n eſt fractio, vel, quod eodem redit, ſi $\frac{1}{n}$ eſt numerus integer impar, habebuntur caſus primi; ſi $\frac{1}{n}$ eſt numerus par, habebuntur caſus ſecundi; ſi vero n eſt numerus integer habebuntur caſus tertii; hanc autem reductionem $\int (x^n\, dx : \sqrt{(a^{2n} — x^{2n})})$ ad $\int z^{\frac{1}{n}} dz : n\sqrt{(a^{2n} — z^2)})$ conſulto celabam, ut limitatio horum trium caſuum tanto mirabilior appareret; loco quod per alteram expreſſionem artificium ipſe

1769 Jun. detexiſſem. Quis enim facile crederet, ſi n ſit numerus fractus, quantitatem $x^n dx : \surd(a^{2n} - x^{2n})$ ſummabilem, vel ſaltem circulabilem; ſi vero n ſit numerus integer, neutrum omnino poſſe eſſe; cum prima fronte contrarium potius videatur; in illo namque caſu, ubi n eſt fractio, fit involutio plurium laterum radicalium diverſi nominis; in hoc vero ubi n eſt numerus integer unicum ſemper adeſt latus quadraticum. Non eſt ergo quod metuas, ne hæc expreſſio $y = \int(x^n dx : \surd(a^{2n} - x^{2n}))$ *Fratrem* meum non lateat; gaudebo magis ſi in eadem inciderit; videbit enim eadem opera me legitimam reperiiſſe petite ſolutionem, & ſimul longius quam ipſe progreſſum eſſe, determinando caſus algebraïcarum & tranſcendentium: præterea præſtat adhibere hanc expreſſionem, quia ex hujus conſtitutione ſtatim ipſa prodit curva; conſtitutio vero alterius expreſſionis $y = \int(z^{\frac{1}{n}} dz : n\surd(a^{2n} - zz))$ non ſtatim ipſam quæſitam curvam exhibet, ſed aliam quamdam, cujus ope demum quæſita deſcribitur.

Si miſſa conſtructione, explicanda dumtaxat eſſet curvæ natura per inſignem aliquam proprietatem, & ſi hoc ſufficeret pro ſolutione; dicerem ſimpliciter curvam quæſitam BFN (*Fig.* 62.) eam eſſe in qua [poſito numero poteſtatis ad quam applicatæ elevantur, n] circuli oſcillatoris radius FS, eſt ubique ad perpendicularem curvæ FR, interceptam inter baſin BN & curvam BFN in ratione 1 ad n. Quid quæſo ſimplicius, quid elegantius eſt hac proprietate? Miror quod nihil reſponderis ad mirabilem illam convenientiam, de qua in præcedentibus meis, ubi nimirum deprehendi, ſi [BP, y; PF, x; BF, t] $\int x^n dy$ ſit maximum, fore ſimul etiam in eadem curva $\int(dt : x^n)$ ſeu $\int(x^{-n} dt)$ minimum; & vice verſa, ſi illud ſit minimum [quando nempe n eſt numerus negativus] tunc hoc fore maximum. Incidi in hac convenientiam, conferendo curvas lintei, quibus illud competit, cum Catenariis quibus hoc competit. Sed vellem ut aliquis neceſſitatem hujus convenientiæ ex ipſa contemplatione curvarum erueret, id

TAB. XI.

id est, ut ostenderet ex suppositione $\int x^{n} dy$ maximi, inferendum esse; Ergo $\int x^{-n} dt$ est minimum. 1697 Jun.

Mones ne obliviscar solvere Problematis alteram partem, ubi curvæ novæ applicata est in ratione multiplicata, non ad prioris applicatam, sed arcum. Etiamsi hanc partem non solvissem, non tamen crederem me solvere teneri, sufficeret enim ut alterutri partium satisfecissem, ideo quia *Frater* loquitur disjunctive non copulative, dum dicit *recta* BF VEL *arcus* BF: item *rectam* PF *curvamve* BF, atque ita non utriusque, sed alterutrius tantum solutionem exigere videtur. Urges directe illum requirere pag. 215. ubi dicit *solutiones* in plurali, non *solutionem* in singulari; quasi vero non possent peti & dari diversæ solutiones unius ejusdem Problematis. Videtur insuper mihi honorarium proposuisse, pro solutione dumtaxat ultimi Problematis, de Cycloidibus; alias nescio, quod sibi velint hæc verba, *ne detrectare possit*, annon idem est ac si dixisset; *Adjungimus alterum Problema, & ne detrectare possit, dabo ipsi pro solutione ejus 50 Imperiales.* Omnia tamen quæ proposuit millies generalius solvi; imo & ipsa illius Problematis pars, ut probe animadvertisti, in mea generalissima solutione continetur, imitando namque formulam meam generalem; positis arcu BF, t, GH, utcunque composita ex t, T; $\int (T dx : n)$, θ; reperitur pro æquatione curvæ quæsitæ $y = \int (\theta dx : \sqrt{(aa - \theta\theta)})$ quæ reduci potest ad hanc simplicissimam $ay = \int \theta dt$. Quoniam vero θ involvit indeterminatas T & x, fit ut æquatio $ay = \int \theta dt$, non possit construi per differentias primas; oportet ergo ut recurramus ad differentias secundas, ad separandas indeterminatas; quod sic facio, quia $ay = \int \theta dt$, & $a dy = \theta dt = dt \int (T dx : x)$ erit $a dy : dt = \int (T dx : x)$: ponendo dt constantem, & differentiando utrumque, habetur $addy : dt = T dx : x$ seu $axddy$: $dx = T dt$; substituto valore ipsius ddy qui est $- dx ddx : dt$, erit $- ax ddx : dt = T dt$, vel $- ax ddx = T dt^2$. Et sic T, proinde etiam t, hujusque differentialis dt, seu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ dabitur per x & dx. Sit ergo dt^2 seu $(dx^2 + dy^2) = X dx^2$ erit $dy^2 = X dx^2 - dx^2$, id est $dy = dx \sqrt{(X - 1.}$

1697 Jun. — 1. Hoc modo licet construere curvam; sed sufficit dedisse æquationem $y = \int \theta \, dt$, quæ naturam curvæ determinat.

Cœterum notabilis hujus curvæ proprietas, est quod FS : FR = θ : T. quomodocunque demum T concipiatur composita, sive arcu BF, sive ex applicata PF, sive ex utroque simul, sic itaque Circulum osculatorem hujus curvæ generalissime determinavi.

Non est quod judicium meum petas de *Animadversionibus* Tuis ad CARTESIUM, cum enim maxima pars versetur circa motum, judicium quod ferrem ignorare non poteris: habes enim assensum meum in omnibus quæ circa motum CARTESIO opponis. Correxi in aliquibus locis errores calami, qui sensum turbabant, quod non ægre feres; notavi etiam in margine, ne Lector offendatur, quod recensendo *Regulam* VII^am^ CARTESII sensum omnino contrarium ipsi attribueris, quod tamen nihilominus falsitas hujus Regulæ ex Tuo ratiocinio, mutatis mutandis, demonstrari possit. Placet Tuum criterium pro examinandis Regulis motuum, quod legem continuitatis vocas; est enim per se evidens, & velut a natura nobis inditum, quod evanescente inæqualitate hypothesium, evanescere quoque debeat inæqualitas eventuum. Hinc multoties non satis mirari potui, qui fieri potuerit, ut tam incongruas, tam absonas, & tam manifeste inter se pugnantes Regulas, excepta sola prima, potuerit condere CARTESIUS, Vir alias summi judicii. Mihi videtur vel ab infante falsitatem illarum palpari posse, eo quod ubique saltus ille, naturæ adeo inimicus, manifeste nimis elucet. Modus Tuus explicandi duritiem corporum per motum conspirantem particularum peringeniosus est; effecit ut recordarer speculationum mearum, quas ante aliquot annos, ambulando in horto Regio *Versaliis*, habueram circa jactus & lusus aquarum, quorum aliqui adeo perfecte repræsentabant vasa diversarum figurarum, ut illa ex continuo vitro solido & pellucidissimo conflata dixisses; sed admota manu in mille guttas dispergebantur, qua remota dictum factum pristinam figuram induebant. Sentiebam tamen difficultatem aliquam & quasi resistentiam in disturbanda figura vasis. Hinc cogitare cœpi si qua arte aquæ salienti velocitas reddi-

reddi posset infinita vel saltem incomparabiliter magna quæ omni impulsui resisteret, quod ista vasa tandem obrigescerent, & sic exhiberent solidum perfectum, quod quovis tamen instanti mutaret materiam, servata semper eadem figura. Quod durities a motu conspirante particularum proveniat, etiam inde patet, quod materia fluidissima alias, qualis est aër, quando in vehementem motum agitatur, difficulter corpori duro penetrare volenti locum cedat; ut id videmus in ventis violentis. Et inprimis notabile est, quod observo explosione sclopeti mei pneumatici, quod ope aëris condensati globulum plumbeum trajicit per asserem satis crassum in distantia 50 passuum; observo, inquam, ibi aërem eo usque condensari, & deinde tanto cum impetu & velocitate erumpere, ut sub forma visibili corporis oblongi solidi & opaci, appareat, & dicto citius iterum evanescat; ita ut firmiter credam, si possibile esset ut eo momento quo aër iste condensatus erumpit, globulus aliquis aliunde veniens, & ad aërem erumpentem appellens in directione perpendiculari ad directionem aëris, hunc globulum non solum non per transversum aëris penetraturum, sed ac si in durum Corpus allisisset iterum resulturum fore. Cæterum videris impugnare atomos, quibus tamen Tua opinio circa duritiem favet; quid enim obstat, quominus credamus materiam etiam fluidissimam constare corpusculis minimis, quorum singulorum partes sunt in perpetuo motu conspiranti positæ? Illa ergo corpuscula sunt atomi, mente quidem divisibiles sed actu indivisæ, vale.

1697 Jun.

Groningæ. 26. Junii 1697.

Amplitudini Tuæ

Obsequiosissimus

J. Bernoulli.

EPISTOLA LVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De occupationibus ſuis. De curva citiſſimi appulſus. De Iſoperimetris. De Synchrona. De Trajectoriis orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Animadverſionibus in CARTESIUM. *De* MALEBRANCHIO. *De cauſa duritiei.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1697 Jul. STatim monere volui, quod, pro prudentia Tua, ipſe e re eſſe judicabis, non decere ut arbitrium recipiam, donec Dominus *Frater* Tuus conſenſum teſtetur, aut ſibi hoc gratum fore ſignificet, ne me ſcilicet ingerere videar. Itaque rogo, ne quicquam a Domino BELLAVALLIO dici cures, quod ſignificet me arbitrium recepiſſe; ſed tantum me a Te nominari, & a Te ſperari Dominum *Fratrem* Tuum in me eſſe conſenſurum.

Nuſquam credo dixi ignotam Tibi fuiſſe Synchronarum applicationem ad cæteras curvas, cum Tua ad Cycloïdes applicatio oſtenderit hoc non poſſe non Tibi eſſe facillimum.

Mirari non debes ſi profundiora Tua non niſi perfunctorie attingere nunc poſſum, cui tòt alia ſunt meditanda, legenda, ſcribenda, agenda; in Aula, in officio, cum amicis, cum exteris, coram & per litteras, [quarùm ultra 300 quotannis ſcribo], imo & per diſſertationes, veluti de Juribus Principum, de Hiſtoria *Brunswicenſi*, de aliis Hiſtorico-Politicis, de controverſiis Religionis, in quibus ſæpe etiam ſcriptis exerceor. His adde inſpectionem Bibliothecæ *Guelfebytanæ*, Auguſtæ, & noſtræ Electoralis, volutationem qualemcunque novorum Librorum & Relationum alicujus momenti, ne ſim hoſpes in re Publica & Litteraria; curam publicandi ſcriptores Hiſtoricos ineditos ex veteribus membranis [quales nunc ſub

fub prelo funt], ubi opus recenfione diligenti; profecutionem *Codicis juris Gentium Diplomatici*, cujus volumen jam edidi, tum multa quæ quotidie veniunt in mentem; non in Mathefi tantum fed & Phifica, & Philofophia profundiore & Hiftoria & Jure, aliifque, quæ paucis verbis in fchedis confignare foleo, ne pereant. Adde etiam cogitata de Elementis Juris Naturæ conftituendis longe aliter, qnam vulgo opinantur, de quo fubinde meditor; jam enim promifi publice ante multos annos; fed ita ago, ut rem conferam cum Legibus Romanis & ufu Fori: fed inprimis molior novam Analyfin multo recepta fublimiorem, pro omni ratiocinatione humana; Chimica etiam, Technica, Mechanica, in quæ fubinde operarios alo. Ita judicare potes an liceat mihi fæpe in profundioribus geometricis verfari. Ac proinde non debes, vel indignari, vel verbis durioribus impatientiam animi oftendere, quoties non ftatim omnia videor dicere ad mentem Tuam. Neque ideo vel inconfiderantia, vel negligentia objicienda. Me quidem hic ftylus minus movet, qui fcio nihil inde benevolentiæ Tuæ deceffiffe; alii tamen delicatiores, vel mirarentur, vel ægrius acciperent; præfertim cum decentius abfint: & dici res ipfæ inter amicos poffunt & vere fimul & commode, atque ut galli dicunt *obligeamment*.

1697 Jul.

Interea dum fateor non poffe me femper fatis attentionis adhibere, non ideo tamen profiteor me, fi adhiberem, ftatim rem affecuturum. Non dubito quin aliquid egregii artificii Tibi inciderit, neque id a me memini contemni, etfi mentem Tuam non fatis perceperim. Quod me attinet, quantum nunc tumultuaria confideratione inter fcribendum affequi licet, puto Synchronas femper poffe haberi per quadraturam. Nam cum, dato tempore, determinari queat punctum in curva data, ad quod mobile pervenit; utique fi pro eodem tempore id fiat in qualibet curva ordinatim pofitione datarum, hoc modo habebitur quodvis punctum Synchronæ; quia autem præterea id quæritur, ut Synchrona exhibeatur ea, quæ datam rectam tangat; id quidem ob lineas ejufdem fpeciei, feu fimiles, atque etiam fimiliter pofitas ad punctum fixum, fic fiet: Affumatur aliqua ex Synchronis; & ad eam ducatur tangens data rectæ parallela, quod utique fieri poteft, faltem tranfcenden-

1697 Jul. ter. Inde ex puncto fixo, ad quod similiter sitæ sunt lineæ, ducta recta ad punctum contactus producatur, dum ipsi rectæ datæ occurrat, & habebitur punctum, in quo Synchrona quæsita rectam datam tanget, quod est punctum appulsus; unde, dato uno puncto, describi jam potest Synchrona, quanquam hac jam non sit opus hoc loco. Eo ipso enim quod habebitur punctum appulsus, adeoque punctum lineæ celerrimi appulsus quæsitæ; habebitur linea ipsa, quippe specie jam data. Eadem methodus videtur etiam servire, si celerrimus appulsus quæratur non ad rectam, sed ad curvam positione datam. Cæterum non semper curvas constructione datas commode ad tangentium inversas reduci, vel non semper facile haberi valorem $dy:dx$, per ordinarias, satis superque ipse expertus sum, & alios methodi differentialis defectus plus satis, vetere jam usu, compertos habeo. Hoc & loco tamen eos puto vitari; & nihil est quod impediat haberi tangentem Synchronæ, seu valorem $dy:dx$ per x & a, licet transcendenter sæpe, ex suppositis tamen quadraturis, cumque aliunde habeatur iterum $dy:dx$, eo ipso quod tangens Synchronæ quæritur parallela rectæ datæ; habebitur valor ipsius $dy:dx$ bis, quod determinat ipsam x, adeoque punctum Synchronæ, & semper hoc casu inveniri potest hoc punctum interfectione duarum linearum, ex quibus ad minimum una est transcendens, si non ambæ, quoties nempe valor ipsius $dy:dx$ est transcendens. Agnosco interim nos ad Synchronam ducendam non esse obligatos, & ex ipsis per se lineis adhuc brevius eam lineam posse eligi, quæ est brevissimi appulsus. Nempe, assumta linea ex specie datis communis initii quacunque, semper determinari potest, quam in quovis ejus puncto recta ad quam ibi celerrime appellitur, inclinationem habeat, seu angulum faciat cum horizonte, si placet, vel ad rectam datam si mavis. Eligatur ergo illud punctum curvæ assumtæ, in quo recta, ad quam ibi celerrime appellitur, sit parallela rectæ datæ. Quo facto, recta per hoc punctum, & per punctum communis initii trajecta occurret rectæ datæ in ipso puncto celerrimi ad ipsum appulsus, adeoque habebitur & punctum lineæ celerrimi appulsus quæsitæ; unde ipsa

ipsa linea quæsita determinatur. Sed in Tuis Methodis altius aliquid latere puto. 1697 Jun.

Pro Isoperimetris perelegantem & ingeniosam esse fateor Methodum Tuam, per centrum gravitatis. Interim indirecta est censenda, qualis est qua Dominus *Marchio* Hospitalius Brachystochronam solvit, & nos Catenariam. Sed illa quam propono, est magis Analytica, & hac revera Brachystochronam determinavi; quærendo non ut alias solemus, directionem, sed curvedinem; id est datis duobus rectæ indefinitæ parvæ, in angulum fractæ, extremis, quærendo punctum anguli, sic ut optime præstetur desideratum. Qua ratione non puto metui debere quod metuis, ut prodeant inter se pugnantes solutiones. Nec Ellipticula adhibenda, nisi cum data ponitur longitudo fili, seu curvæ inter extrema interceptæ; ubi, etsi non cogites de Ellipsi ipsa, *Optimi* consideratio determinabit punctum. Nec dubito hoc modo, & Catenariam & similes, cum curva est magnitudinis datæ & formæ quæsitæ, directe & satis, pro re nata, facile posse determinari. Hoc autem posito, nec (*Fig. 64.*) filum BCD longius aut brevius assumi potest. TAB. XII. Si non possit, filum utique vel Ellipsis frustra ibi adhibetur, nec quicquam determinare potest. Sed & alteri objectioni Tuæ facile satisfit. Neque enim in Catenaria, verbi gratia, pondus filo BCD incumbens in punctum C collectum initio supponi debet, sed per totum filum dispergendum æqualiter, vel quod eodem redit, concipiendum est pondus ipsius BC suspendi ex ipsius BC medio, & ipsius CD similiter ex ipsius CD medio. Quo facto, quærendo situm talem, ut, data magnitudine ipsius BC + CD, centrum gravitatis commune maxime descendat, reperietur id verticaliter imminere ipsi C, & alia habebuntur, quæ curvedinem determinabunt. Itaque non miror, quod Methodum secius acceptam habuisti suspectam. Nolim tamen Tibi reddere, quod mihi dicis, prius pronuntiasse quam satis examinasse. Etsi enim id sæpe, credo, in nobis ambobus sit verissimum [cum error non adeo est periculosus, imo fortasse aliquando utilior veritate, si hæc in istis primo statim aggressu nimia attentione esset redimenda] tamen magis ex decoro esse puto his formulis abstineri.

1697 Jul. Quæ Dominus *Frater* Tuus jam viderit, non satis dixerim; miror ipse, quod Problema accuratius proposuerit quam opus erat Interim, cum curvaturæ radii cum Brachystochrona connexionem viderit, verisimile est, modo HUGENII Tractatum *De lumine* cum attentione tunc consuluerit, non latuisse ipsum undas, adeoque & nec Synchronas. De pulchra illa convenientia, quod ubi $\int x^n dy$ maximum ibi $\int x^{-n} ds$ minimum, & contra, non possum aliquid dicere, nisi in ipsas illas curvas attentius inspiciam; quod vides mihi nunc vix licere.

Ego potius proponam Tibi examinandam Methodum, quæ tunc statim in mentem venit, cum, admonitione Tuæ solutionis, relegi convenientiam undarum & Synchronarum ad radios, olim fugiente tantum oculo, atque animo consideratam. Nempe videbar mihi hinc ducere posse Methodum generalem ad curvas ordinatim positione datas ducendi curvam ubique normaliter occurrentem; fingendo scilicet medium esse resistentiæ sic variantis, ut radii exhibeant illas ipsas lineas ordinatim positione datas. Quo facto undæ, seu Synchronæ, erunt curvæ quæsitæ radiis normales. Quid vero si ordinatim positione datæ non habeant initium commune, quomodo tunc radios applicabimus? Respondeo, ne sic quidem deficere Methodum, possunt enim radii ab uno puncto originarie venientes colligi prius in acamptam seu focum linearum sive causticam. Et ita radii rursus emissi ex hoc foco lineari debebunt in medio pergere, per quod curvaturas linearum ordinatim datarum assumant. Fateor hæc facilius proponi, quam præstari; puto tamen consideratu digna Tibi visum iri.

Non est cur disputemus, utrum ex verbis Domini *Fratris* Tui utrumque Problema solvere tenearis, quandoquidem utrumque solvere potes; quemadmodum jam tum notavi; alioqui res litigiosa foret.

Gratum est quod meas in CARTESIUM *Animadversiones* percurristi; gratius quod placuere. Non tamen putem maximam partem circa motum versari, etsi fortasse potissimam; sed alia quoque attingi, quæ itidem a Te expendi desidero, si scilicet vacat. *Lex Continuitatis*, cum usque adeo sit rationi & naturæ consentanea, & usum

usum habeat tam late patentem, mirum tamen est eam a nemine [quantum recorder] antea adhibitam fuisse. Mentionem ejus aliquam feceram olim in *Novellis Reipublicæ Litterariæ*, † occasione collatiunculæ cum R. P. Malebranchio, qui ideo meis considerationibus persuasus, suam de Legibus motus in *Inquisitione veritatis* expositam Doctrinam postea mutavit; quod brevi Libello edito testatus est, in quo ingenue occasionem mutationis exponit. Sed tamen paulo promptior, quam par erat, fuit in novis Legibus constituendis in eodem Libello, antequam mecum communicasset; nec tantum in veritatem, sed etiam in illam ipsam Legem continuitatis, etsi minus aperte, denuo tamen impegit; quod nolui Viro optimo objicere, ne viderer ejus existimationi detrahere velle. 1697 Jul.

Nec minus gratum est quod mea explicatio duritiei, per motum conspirantem, ad mentem tuam fuit. Cum anno 1670 vel 1671 ederem *Hypotheseos Physicæ novæ Specimen*, jam propugnabam duritiem non a quiete sed a motu esse. Et Dominus Wallisius in *Transactionibus Anglicis* meam illam hypothesin tunc recensens notavit *Guill.* Neilium quoque [eum cui primam dimensionem curvæ Algebraïcæ tribuunt] judicasse, firmitatem a motu, non, ut vult Cartesius, a quiete, petendam. Motus autem conspirans non tantum resistit turbanti; sed & se restituit & quæ dura sunt, ea revera sunt elastica admodum prompta. Interim quantacunque vis motus conspirantis ponatur, nunquam tamen revera erit infinita, neque adeo ullæ atomi dabuntur in natura; & motus utique semper vinci, ac debilitari potest, imo debet, ob corporum perpetuum collisum inter se. Itaque nullum ego puto vel perfecte durum vel perfecte fluidum extare; sed in omni corpore esse quemdam gradum firmitatis & fluiditatis. Et multæ sunt aliæ rationes, quæ atomos & vacuum quoque in natura non patiuntur. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 2. Julii 1697.

Deditissimus
G. G. Leibnitius.

† Juillet 1687 p. 744.

 P. S.

P. S. Beneficium in me conferes, si locum, in quo me putas mentem CARTESII finistre [salva licet objectionis vi] accepisse, in melius mutes, schedula inserta.

EPISTOLA LVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad praecedentem.

De Synchronis. De curva ex infinitis Ellipsibus arcus aequales resecante. De Isoperimetris. De Trajectoriis orthogonalibus. De atomis. De legibus motus. MALEBRANCHII *sententia.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1697 Jul. POstremas Tuas accepi recte; schedulam inclusam ad Dominum BELLVALLIUM postridie rite curavi. An Epistolam meam jamdiu ipsi missam impresserit, nescio. Interim, ... miror ingentem numerum negotiorum diversissimorum, quibus quotidie occuparis, sed magis miror humeros Tuos qui illa ferre valeant; habes sane singulare donum singulis eodem die vacandi & attentionem praebendi, quod nihil difficilius mihi videtur: id saltem in me experior; adeo enim non sui juris est mea attentio, ut non sine summa animi molestia illam avocare possim a re cui semel affixa, & alii adhibere. Hinc, si Lectiones, quorum quotidie tres, nonnunquam plures, tam publice quam privatim, in Mathematicis & Philosophicis mihi habendae sunt, non ita in promptu haberem, sed si illa in charta consignare deberem, quod plérique Professorum facere solent, nescio an huic oneri par essem. Sunt tamen & alia mihi peragenda quae pariter non multum otiandi tempus mihi relinquunt, unde vides nec me semper rem meditari satis posse, prout vellem, atque adeo eamdem mereri veniam

niam quam petis. Quod si igitur non statim alteri vacaverit attente considerare quæ ab altero proponuntur, credo nos optime facturos, quando nihil urget, si utrique opportunitati nostræ consulentes otium sponte se prodens exspectaverimus, ut negotiis ordinariis non interruptis, eo attentius & accuratius rem examinare queamus. 1697 Jul.

Interim, cum putem me mature satis perscrutatum fuisse Synchronarum naturam, & diu multumque in hac materia fuisse, jam sine scrupulo pronuntiare audeo, quæ mihi verissima videntur. Facile credam, quod tumultuaria consideratio inter scribendum Tibi suggessit, Synchronas semper posse per quadraturas haberi: primum enim hoc est quod se se offert in contemplatione harum curvarum, quod scilicet, dato tempore, determinari queat punctum in curva data, ad quod mobile pervenit, & quod hoc fieri possit pro eodem tempore in qualibet curva ordinatim positione data, & sic tota Synchrona construi. Sed hujusmodi constructio eo ipso non est æstimanda, quia non per continuam Quadraturam unius ejusdemque indeterminati spatii peragitur, & quia per consequens exinde non haberi potest modus ducendi tangentes ad Synchronam, qui tamen hic summe necessarius est. Rogo itaque ut paulo penitius inspicias negotium; forsan revocabis tua verba, quando dicis, *Assumatur aliqua ex Synchronis, & ad eam ducatur tangens data rectæ parallela, quod utique fieri potest, saltem transcendenter*; nam nondum video quomodo vel transcendenter, vel algebraïce duci possit tangens, ope constructionis illius per quadraturas diversorum spatiorum. Ego quidem in hoc puto latere maximum artificium, ut diversæ istæ quadraturæ reducantur ad quadraturam indeterminatam unius spatii continui, quod ego feliciter præstiti: unde mihi facile fuit tangentes Synchronæ determinare, non solum transcendenter, sed algebraïce prorsus. Ne sine ratione hæc me dixisse putes, dabo exemplum simplicissimum, ubi statim Tibi apparebit quam necessaria sit ista reductio, si modo animum vel tantillum advertere voles; quod rogo ut facias; est enim Tua applicatione dignum, quod forsan ad novas speculationes

1697 Jul. TAB XII. lationes curvarum ansam præbebit. Concipe (*Fig. 66.*) super axe dato AB descriptas Ellipses infinitas ACB, ACB, ACB, &c. Quæritur æquatio differentialis, & proinde modus ducendi tangentes Curvæ CCC, cujus constructio talis est, ut ductis applicatis CD, CD, CD, &c. segmenta Ellipsium CDB, CDB, CDB, &c. omnia inter se sint æqualia. Hoc Problema per reductionem segmentorum CDB, CDB, &c. Ellipsium diversarum ad segmenta Ellipsis ejusdem facillime solvo. At si curva CCC, non segmenta, sed arcus Ellipsium BC, BC, BC, &c. æquales abscinderet, licet priori quodammodo simplicius appareat, hic tamen methodi meæ imbecillitatem agnosco: Jam enim arcus diversarum Ellipsium ad arcus ejusdem reduci nequeunt; neque hactenus perspicere potui ullam viam perveniendi ad tangentes: si aliquam mihi monstrabis, etsi transcendenter, habebo Tibi gratias haud mediocres. Vides ergo in quo methodus mea consistat, scilicet in reductione illa quadraturarum vel rectificationum; hæc autem reductio perpetuo locum habet, quando curvæ sunt similes, & similiter positæ, adeo ut Synchronarum æquatio differentialis, proindeque tangentium determinatio algebraïca, hac methodo, nunquam non reperiri possit. Quoniam vero etiam Problema celerrimi appulsus solvi, citra Synchronæ considerationem, singulari & eleganti quadam constructione; communicabo libens si desideraveris. Cæterum, si loco lineæ rectæ positione datæ, adhibeatur curva; res non æque facilis est, ut credis: tunc enim recta parallela tangenti hujus curvæ in puncto appulsus duci non potest; ipsius enim inclinatio jam non datur, ut antea.

Fateor methodum meam pro Isoperimetris esse indirectam, sed non puto aliam habere *Fratrem*; cum enim olim multus fuerit in curvatura lintei a liquore expansi ...... suspicor hoc idem ipsi ansam dedisse ad considerationem Problematis de Isoperimetris. Interim Tuam methodum [quæ utique magis analytica esset] bene procedere nondum asserere ausim; dicis Te, illius ope, determinasse revera Brachystochronam, memini quidem Tuæ solutionis, quam mihi communicaveras; erat autem similis fraternæ: Optarem itaque ut mihi ostenderes, quomodo per Calculum determinares Circulum

Circulum osculatorem, ex inventione situs trium punctulorum. Fac si placet applicationem in Isoperimetris nostris, ut videam an pervenias ad simplicissimam illam determinationem radii osculantis, quem ostendi semper secari a basi curvæ in ratione data 1 ad *n*. Præterea si hæc methodus rite valeret, deberes etiam posse solvere Brachystochronam inter duo puncta determinatæ longitudinis; id est, si (*Fig.* 67.) data duo puncta A, B, conjungenda sint cum linea curva AMB, ipsi datæ rectæ C æquali; determinare poteris curvaturam AMB, quæ ex omnibus curvis ejusdem longitudinis citissime percurratur. Problema utique possibile est; sed ingenue fateor, meæ methodi hic nihil præstant. * Si Tua eo usque penetrat, agnoscam præstantiam ejus; gratissimum facies si calculum communicaveris.

1697 Jul.

TAB. XII.

Iterum dicis *Fratrem* meum vidisse connexionem inter Brachystochronam & curvaturam radii; sed puto ego non vidisse; nullibi enim mentionem facit hujus connexionis; sed dicit dumtaxat, insistendo iisdem vestigiis etiam inveniri posse curvaturam radii, & sic identitatem illam non animadvertit; alias ridiculum esset dicere, insistendo iisdem vestigiis reperiri posse curvam radii, quæ jam simul reperta est cum Brachystochrona.

Methodus, quam mihi examinandam proponis, quamque desumsisti ex convenientia undarum & Synchronarum; revera peringeniosa est; de illa etiam jam ante annum, cum primum huic speculationi vacarem, cogitabam. Usus vero acamptarum, seu causticarum, quas acute huic negotio accommodas, mihi tunc non venit in mentem. Interim hæc methodus ducendi normalem ad curvas ordinatim positione datas maxima laborat difficultate: quia si in uno exemplo procedit, infinita alia sunt, ubi inutilis est; licet curvæ ordinatim positione datæ commune initium habeant; quod vel exinde intelliges, quod plerumque impossibile sit fingere medium qualiscunque resistentiæ variantis, quod exhibeat omnes illas

* *Dedit tamen solutum id Problema; & universaliter quidem, in* Act. Erud. 1718. Febr. p. 74. *aut* Mem. de l'Ac. Roy. des Sc. 1718. p. 120. *Vide* Opp. Tom. II. N°. CIII. pag. 254.

1697 Jul. illas lineas ordinatim positione datas; quin-imo est purum putum accidens, si id contingat. Verum quidem est omne medium exhibere infinitos radios, seu curvas ordinatim positione datas; sed vicissim una linea jam sufficit ad determinandam resistentiam medii quæsiti, ut omnes reliquæ positione datæ sint superfluæ; & sic sæpissime eveniet, ut quælibet ex curvis ordinatim positione datis peculiare medium requirat; atque adeo methodus evadat impossibilis; unde vides Problema hoc, *Quærere medium resistentiæ variantis, quod exhibeat ordinatim positione datas*, esse ex eorum numero, quæ dicuntur plus quam determinata: id est, quæ habent conditiones superfluas; quæ nunquam [nisi per accidens] simul impleri possunt. E re tamen est notare casum, quando hæc methodus usui esse potest: tunc nempe, ut plurimum, [non ausim dicere semper] quando curvæ ordinatim positione datæ sunt similes, & ex puncto dato similiter positæ; Interim, hoc casu, non opus habeo recurrere ad Methodum indirectam; est enim mihi alia naturalior, ex fundamento supra memoratæ reductionis quadraturarum & rectificationum desumta; mediante qua, directe determino curvam ordinatim datis normaliter occurrentem, quando scilicet ordinatim datæ sint transcendentes; quod olim * Tibi, si meminisse velis, tanquam difficile quid proponebam; nam si algebraicæ sunt, res adeo facilis est, ut proponi non mereatur.

Concedo non dari corpuscula perfecte dura; sed non sequitur non dari atomos: per atomum intelligo corpusculum, mente quidem divisibile, sed quod actu divisum non est, neque divisum fuit: non quod actu dividi non potest; tales enim atomi, ut vere sentis, non darentur, quia requirerent perfectam duritiem; sed per meam definitionem sufficit, ut dentur talia corpuscula, quorum particulæ, a Mundo condito in hunc usque diem, nunquam fuerunt separatæ; quod forsan motum conspirantem habeant satis validum, ad resistendum. Non tueor vacuum, neque atomos a GASSENDO propugnatas; interim meas meo modo conceptas mihi largiri debes, nihil derogant Tuæ hypothesi, sed de his alias.

Libellus

* Epist. XXIX.

Libellus Malebranchii in quo novæ Leges motus conſtituuntur, conſcriptus fuit cum *Pariſiis* eſſem, me præſente & approbante; nihil enim in eo poſuit Author, niſi prius conſultis nobis, Hospitalio & me; quod autem etiamnum in pluribus a veritate alienus ſit, hoc ne mirere; veram enim quantitatem virium tunc nondum admittebamus. Quod autem Tecum non communicaverit, antequam ederet, ratio eſt quod Te hac in parte falſo principio nixum credidit. Audivi Tractatum aliquem Hugenii poſthumum propediem lucem viſurum, de Mundo Saturni; neſcio an id ipſum ſit quod a Bellavallio quæris de *Coſmotheoro*, Vale & ama. 1697 Jul.

Groningæ, *d.* 17. Julii. 1697.

Amplitudinis Tuæ

Cultorem aſſiduum.

J. Bernoulli.

EPISTOLA LVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Synchronis. De trajectoriis orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Iſoperimetris. De Malebranchio. *De Atomis. De Synchrona iterum.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

. . . .
. . . .

Vellem me multis poſſe ſufficere, quemadmodum pro benignitate Tua pronuntias. Ego vero cogor agnoſcere, ſæpe 1697 Jul.

1697 Jul. id parum procedere, quoties ſcilicet occurrunt, quibus profundius immergendus ſit animus, qualia ſunt Analytica illa Tua, in quibus plus ſatis experior Tecum, non poſſe me diſtractum Tibi ſatisfacere, prout vellem: ſed bene habet, quod non indiges ope mea.

Video non tam facile eſſe, quam mihi primo aſpectu viſum erat Synchronæ quadratorie determinatæ tangentem ducere; quod ſi quadratura effici poſſet, vel algebraïce, vel tranſcendenter quidem, ſed tamen exponentialiter, eo caſu ceſſaret difficultas. Exponentialiter autem exhibere licet non tantum quæ ex Hyperbolæ quadratura pendent, ſed & quodammodo, quæ pendent ex quadratura Circuli. Interim nondum hoc præſtare licuit in altioribus, & jam aliquoties dicere memini perfectiſſimam Tranſcendentium expreſſionem eſſe per Exponentiales. Recordor, & mihi olim occurriſſe iſtos tranſitus a quadraturis ad quadraturas, & difficultatem apparuiſſe; ſed nullam tunc apparuiſſe ſuperandi rationem, niſi vel per Series, vel per Exponentiales. Illa imperfecta eſt, niſi cum a Serie rurſus deinde regreſſus ad æquationem differentialem quadratoriam haberi poteſt: hæc eſt limitata hactenus. Itaque Tuum artificium reducendi rem ad unam quadraturam continuam non parvi momenti erit, & licet etiam limitatum ſit, deſideretque ut curvæ ordinatim poſitione datæ ſint ſimiles & ſimiliter poſitæ, fortaſſe tamen aliquando vel a Te ipſo vel ab alio inventum ulterius promovebitur. De his ergo plurimum Tibi debebimus; grata etiam & utilis conſtructio Tua erit, ſine Synchronæ conſideratione. Et cum tale ſit quod Tibi in mentem venit; video utique habuiſſe Te cauſam, cur genio admonenti tribueres, quod ingenio erueras; ſolet ſcilicet nobis momento quodam lux ſubita interdum affulgere.

Sed quod ais Problema eſſe plus quam determinatum, quoties quæritur medium, in quo radii in datas lineas tranſeant; id velim denuo examines; fortaſſe enim rem ſemper poſſibilem deprehendes. Nam in omni ſuperficie, adeoque & plano aſſumi poſſunt non tantum infinita, ut in linea, ſed infinities infinita. Si igitur varies me-
TAB. XII. dium uno tantum modo, ita, verbi gratia, ut (*Fig.* 68.) varietas ſolum aſſumatur ſecundum lineam A B C D E, & ut linea

A A,

A A, tota BB, tota CC, &c. unam ſubeat legem variationis, ſeu ejuſdem ſit denſitatis; tunc fateor, Problema fore plus quam determinatum; [nec refert BB verbi gratia recta ſit an curva;] ſed ſi rurſus alia variatio concurrat ſecundum lineam A L M N ſeu ut variatio ſit duarum dimenſionum, ita ut, quodlibet plani punctum a quolibet denſitate differat; ſeu ut punctum B L non tantum differat a puncto B M, ſed & a puncto C L, tunc poſſibile utique eſt variationem diverſitatis in quovis puncto eam eſſe, ut ibi linea radii tranſeat, prout deſideramus. 1697 Jul.

Nuſpiam memini me dicere rem æque eſſe facilem in appulſu ad rectam & ad curvam.

Cum Tibi methodus mea pro maximis & minimis ſit perſpectiſſima; quæ in eo conſiſtit, ut lex minimi vel maximi & in particula locum habeat, Tibi ipſi facillimum erit, & multo facilius quam mihi, applicationem ad Iſoperimetra conſtituere, & puto hanc Methodum etiam applicari poſſe ad Brachyſtochronam datæ longitudinis, inter duo puncta interceptam, in qua experimentum Methodi fieri vellem. Ecce enim, quæritur (*Fig.* 67.) A M B in TAB. XII. qua grave breviſſimo tempore perveniat ab A ad B, ſed ea lege ut ſit A M B æqualis datæ C. Poſito igitur has leges etiam in particula quavis indefinite parva L M N eſſe veras, ut L M N ſit recta, ſemel fracta, datæ longitudinis breviſſimique deſcenſus; utique manifeſtum eſt Tibi ipſi, rem prius poſſe reduci ad hoc Problema ordinarium. Datis (*Fig.* 69.) focis L & N & fili longitudine TAB. XIII. $LM + MN$, vel $LQ + QN$, deſcriptaque Ellipſi P Q R, invenire in ea punctum M ita ſe habens, ut deſcenſus L M N ſit talium citiſſimus; poſito dari A initiale punctum deſcenſus, adeoque quæ ſit velocitas gravis in L vel M. Hoc autem Problemate ſoluto, exinde jam conſiderando L M, M N eſſe infinite parvas, habebitur proprietas aliqua ſaltem differentio-differentialis curvæ quæſitæ.

Aliud eſt Dominum *Fratrem* Tuum vidiſſe connexionem Brachyſtochronæ & curvaturæ radii, aliud vidiſſe, aut attendiſſe identitatem. Poſſumus connexionem videre imperfecte, ut non ſtatim videamus ejus gradum. Keplerus vidit connexionem, vel

1697 Jul. convenientiam, inter Diaclasticam & Hyperbolam, sed non vidit Hyperbolam esse ipsam Diaclasticam, quod CARTESIUS fortasse ex KEPLERI meditationibus admonitus invenit.

Agnosces ipse, credo, Dnum MALEBRANCHIUM melius facturum fuisse, si me, cujus admonitione correxerat regulas suas, de ipsa correctione consuluisset, antequam eas in publicum denuo præcipitavisset, quantillum enim erat aliquot septimanas expectare? Nec tam facile sibi de me persuadere debebat, falsis me principiis niti, cum res ostenderit ipsum potius talibus fuisse nixum.

Præterea error ab eo commissus est in Regulis novis, non tantum contra principium meum, cui non assentiebatur, sed & contra illam ipsam meam continuitatis Legem, cui assentiebatur: quod ego admoniturus eram, si tempestive me consuluisset, dissimulaturus ea, de quorum principiis pugnabamus.

Ubi meas ad CARTESIUM *Animadversiones* remittere voles; quod rogo ne sine Tuis notis separatim scriptis facias; poteris dirigere ad Dominum *Gerardum* MEJERUM Theologum *Bremensem.*

Circa corpora indivulsa possunt constitui gradus. Et *summus quidem gradus* est, cum partes eumdem semper servant situm inter se, seu cum corpus est perfecte rigidum, atque hoc est, quod omnes hactenus atomi nomina accepere, & quod *Democritici* & *Gassendistæ* & ex *Cartesianis* CORDEMOIUS in rerum natura esse credidere; quibus etiam nuper accessit HARTSOEKERUS; eo tantum discrimine, quod *Democritici* ex solis atomis omnia componunt, eisque vacuum interjiciunt, sed HARTSOEKERUS materiam perfecte fluidam inter atomos perfecte duras diffudit, duo extrema inter se conjungens. Ego vero pro demonstrato habeo, nec perfecte dura, nec perfecte fluida dari. Et gaudeo quod nunc video Te mecum perfecte dura, ac vacuum etiam rejicere. Nam omne corpus etiam quantuluncunque, meo sensu, dividitur in partes actu & quidem non tantum mente assignabiles, sed & diversitate motuum reapse discretas, ut in vorticibus ipsisque jactibus aquarum; ita ut pars quidem in tali corpore a parte recedat, non tamen statim a toto.

Ita

Ita jam venimus ad *secundum indivulsi gradum*, ut licet partes mutent situm inter se, nulla tamen pars unquam recedat a toto, seu ut semper servetur continuitas partium omnium. Huc, si bene Te intelligo, inclinare videris, & fateor me quoque sæpe deliberasse an talia dentur corpora, nec dum impossibilitatem videre, nec tamen hactenus demonstrare posse quod dentur. 1697 Jul.

Tertius gradus indivulsorum est in corporibus, quæ aliquas quidem partes mutant, sed tamen aliquas servant; ubi rursus quæritur, an datur corpus *a*, in quo aliqua pars *b* semper fuerit, semperque futura sit; aliqua, inquam, pars *b*, non quidem ita ut totum *b* semper fuerit unum continuum, [id enim recideret in gradum præcedentem,] sed ita tamen ut, licet ipsum *b* divulsum fuisse ponatur, partes nihilominus omnes ipsius *b* semper manserint, mansuræque sint in *a*, adeoque nunquam nisi intra certos limites a se invicem recedant.

Quartus gradus est, an detur *a* & in eo pars *b* sic, ut non quidem totum *b*, nec etiam aliqua determinata ipsius *b* pars *c* semper maneat in *a*, [eo enim casu recideremus in gradum tertium] sed ut aliqua tantum pars ipsius *b* indefinita *x* maneat in *a*, licet forte semper imminuenda; vel ut distinctius loquamur, quæri potest an dentur in *a* duæ partes *b* & *p*, sic ut semper ipsius *b* aliqua pars *x* & ipsius *p* aliqua pars *y* nunquam nisi intra certos limites, quos per ipsum *a* definimus, a se invicem recedant. Quanquam rursus distingui possit, an limites per *a* definiti sint certæ magnitudinis, si ponamus ipsum *a* eam magnitudinem nunquam excedere; an vero sint potius limites certi officii, ut si *a* [velut animal] etiam ipsum indefinite crescere, vel minui intelligeretur. Et possent multo plura adhuc in considerationem venire non parvi momenti ad penetrandum in rerum interiora; sed hæc Tu, pro acumine Tuo & pro ætate Tua, melius prosequere. Vale.

P. S. Cogitavi annon artificium Tuum puncta Synchronæ una quadratura continua inveniendi aliquid cognatum habeat methodo sequenti. Assumta (*Fig.* 70.) una AC ex curvis positione datis, TAB XIII. & in ea assumto quoque puncto 1C, ad quod tempore certo BT perveniendum est, quæratur id tempus per quadraturam, atque ita

 quadra-

1697 Jul. quadratorie exhibeatur linea temporum AT, seu cujus ordinatæ sint ut tempora ordinatim respondentia punctis C, curvæ assumtæ AC. Jam pro alia curva A (C) simili cum assumta, & similiter posita ad A, quærendum est punctum 1 (C) in curva A (C) ad quod in ea perveniatur a gravi eodem tempore, quo ad 1C in curva priore AC. Eam ob rem redeamus ad curvam AC; & ut se habet curvæ novæ A (C) parameter, ad parametrum curvæ AC, ita [nova hypothesi] eadem proportione in AC ponamus vim gravitatis fuisse fortiorem; sic omnia in curva AC hac nova gravitate fient proportionaliter ad ea quæ in curvæ A (C) priore gravitate. Porro linea temporum nova A (T) pro AC, auctæ gravitatis vi percussa, habebitur nulla nova quadratura, sed ordinatis prioris lineæ temporum in eadem ratione imminutis in qua vis gravitatis fuit aucta. Ita habebimus etiam punctum 2C in ipsa AC, ad quod, aucta vi gravitatis, perveniretur eodem tempore, quo priore gravitate antea ad 1C. Cui puncto 2C similiter positum punctum quæramus in curva secunda A (C); id erit punctum 1 (C) quæsitum, quo grave in ea curva, vi priori seu ordinaria gravitatis, esset perventurum eo tempore, quo, eadem vi gravitatis ordinaria, perveniret grave ad 1C in curva prima AC. Sed hæc nonnisi per transennam nunc intueri possum. Itaque parum omnia assequenti veniam dabis.

Dabam *Hanoveræ* 25. Jul. 1697.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPIS-

Fig. 63.

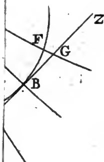


Fig. 64.

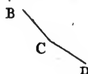


Fig. 66.

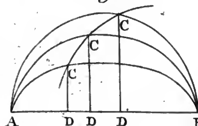


Fig. 65.

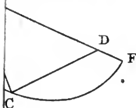
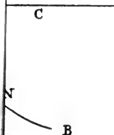




Fig. 68.

	L	M	N	&c			
A							A
B		BL	BM	BN			B
C		CL					C
D		DL					D
E							E
&c							&c

Fig. 67.



EPISTOLA LIX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Differentiationis de curva in curvam Principia.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Litteras meas nuperrimas acceperis. Interea *Moscorum* Monarcham, ejusque Legationem in vicinia videmus, & quidam ex comitatu in se recepit mihi procurare responsiones ad quæsita mea circa res *Moscorum* scripto consignata. Dum huc redeo, more meo in itinere meditatus, desideratam a Te Methodum generalem inveni, per quam Tangentes ducuntur ad curvam, cujus puncta per ordinatim diversarum curvarum figurarum quadraturas determinantur, ut jam necesse amplius non sit, vel curvas esse similes, & similiter positas, vel quadraturas diversarum ordinatim curvarum reduci ad unam, vel recurri ad Series, vel rem revocari ad Exponentiales, quorum nihil generalem methodum præbet. Exemplum exhibebo, quod primum in mentem venit, unde facile ad Ellipses tuas applicabis; & licet exemplum, quod affero, etiam particularibus illis Methodis obedire possit, videbis Methodum, quæ adhibita est, nullis limitibus coerceri. Sint (*Fig.* 71.) Lineæ Logarithmicæ quotcunque VC, V(C) V((C)) &c. quarum axis communis AB, asymptota AS, commune in axe punctum V: ducenda est 1Cθ tangens curvam 1C. 1(C), 1((C)) quæ curva talis sit naturæ, ut arcus logarithmicarum V1C, & V1(C) itemque V1((C)), sint æquales inter se. A1B sit x, parametri harum curvarum sint a, (a), $((a))$ &c. ita ut 1B1C, 1B1F, 1B1G sint respective $a\int dx : x$, vel $(a)\int dx : x$ vel $((a))\int dx : x$ &c. manente x, variataque tantum parametro a; porro patet si habetur ratio ipsius 1C1F ad 1F1(C) habitum iri tangentem curvæ 1C1(C)1((C)), ducta enim 1Bθ quæ sit parallela ipsi 1F1(C), 1697 Auguft.

seu

1697 Auguſt. ſeu tangenti curvæ V1C in 1C, & ad partes 1(C), & quæ ſit ad ipſam 1B1C ut 1F1(C) ad 1F1C, tunc juncta 1Cθ erit tangens quæſita. Porro ex dictis patet 1F1C eſſe $da \int dx : x$; ſupereſt ergo, ut inveniatur apte etiam 1F1(C) atque in hoc conſiſtit negotii cardo. Jam 1F1(C) eſt differentia inter duos arcus V1C & V1F, & ſumma ex differentiis partium eſt differentia totorum. Ergo ſi ducantur parallelæ innumeræ, indefinite ſibi vicinæ, nempe 1B1C, 2B2C, 3B3C, &c. & his interceptarum reſpondentiumque ſibi portionum ex curvis V1C & V1F, quærantur differentiæ, nempe 1C2C — 1F2F, & 2C3C — 2F3F &c. & harum differentiarum quæratur ſumma, ea exhibebit ipſam differentiam totarum linearum, V1C, & V1F nempe ipſam 1F1(C). Jam ut reſpondentium, veluti 1C2C & 1F2F quæramus differentiam; conſiderandum eſt ipſam 1C2C & 1F2F communi expreſſione fore $\sqrt{(dxdx + dydy)}$, ſeu quia hic $dy = adx : x$ [poſita tamen a variabili, non quidem in eadem curva, ſed tamen pro tranſitu a curva ad curvam] ideo 1C2C vel 1F2F fore $dx\sqrt{(aa+xx)} : x$. Unde ad habendum differentiam inter 1C2C & 1F2F patet tantum $\sqrt{(aa + xx)}$ differentiari debere ſecundum a, manente x more meo dudum expoſito; & differentiam multiplicandam per $dx : x$, unde reperietur 1C2C — 1F2F fore $adadx : x\sqrt{(aa+xx)}$. Jam contra in ſummandis rurſum omnibus talis differentiis, eleganter evenit, ſemperque evenire debet, ut a vel da rurſus ſint conſtantes; Ergo ſumma omnium 1C2C — 1F2F & 2C3C — 2F3F &c. ſeu 1F1(C) erit $ada \int dx : x\sqrt{(aa+xx)}$, qualis quantitas ſemper habetur per quadraturas: Ergo jam habetur tangens quæſita. Nam tantum oportet facere 1Bθ ad 1B1C ut $a \int dx : x\sqrt{(aa+xx)}$ ad $\int dx : x$ ſeu ut 1F1(C) ad 1F1C, ubi communis utrique rationis terminus inaſſignabilis da neceſſario & ſemper evaneſcit. De ipſis iſtis quadraturis amplius reducendis, quemadmodum ſane hic fieri poteſt, nunc equidem non laboro.

Si 1B1C, vel 1B1F etiam habitæ fuiſſent per quamdam quadraturam, ubi a fuiſſet ingreſſa vinculum quadratorium, eodem modo fuiſſet procedendum ut proceſſimus in exhibenda differentia inter V1C & V1F, nempe differentianda fuiſſet quantitas ſub vinculo

culo quadratorio contenta, sed secundum *a*, & proveniens rursus summandum, sed secundum *x*. Nec video quid hunc processum impedire unquam possit; usque adeo ut adhiberi etiam suo modo queat, cum quantitates ne quadratorie quidem, sed tantum differentialiter, vel quacunque alia expressione ex summis differentiisque cujuscunque gradus complicata dantur; etsi tunc etiam determinatio tangentis quæsitæ non semper constructione quadratoria, sed tamen aliqua differentiali explicatione utcunque possit haberi. Hanc novam nostrarum methodorum applicationem, qua defectus aliquis Calculi differentialis tollitur Tibi non displicituram puto, Tuoque ingenio præclare illustrari atque augeri posse confido. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 3°. Augusti 1697.

Deditissimus
G. G. Leibnitius.

EPISTOLA LX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De methodo differentiandi de curva in curvam.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Binas meas acceperis. Priores Tuis respondebant: sequentes novam Methodum differentiationis a Te desideratam continebant. Has nunc scribo, ut aliquid addam, quod nuperrimas scribenti effluxit. Sententia nimirum mea est, recte nos facturos si nonnihil adhuc novam hanc Methodum dissimulemus, donec ipsi satis usi simus; nam multa ibi latent majoris momenti, quam quis prima fronte suspicetur. Itaque optimum puto, ut neque proponamus aliis quærendam hanc differentiandi vel tangentes ducendi rationem, neque a nobis inventam dicamus, multo minus expo- 1697 August.

1697 Augult. namus in quo confiftat artificium, donec nobis ipfis licuerit profequi pro dignitate. Nam ex nova differentiandi Methodo neceffe eft viciffim novas etiam fummandi rationes oriri, ad quas aliter fortaffe aditus vix pateret. Exempli caufa, in figura & cafu Epiftolæ meæ noviffimæ, patet Arcum VC dare fummam omnium $adafdx : \sqrt{(aa+xx)}$ atque ita cum binæ funt variationes inter fe diverfæ, inftitui poteft fummatio; quod fæpe requiri jam olim deprehendi. Quin amplius cum a poffit variam accipere fignificationem, confequens eft tum pro quadraturis, tum pro reductione æquationum differentialium, hac ratione obtineri poffe, quæ antea Methodis noftris obftinate fe fe opponebant, ut res ipfa Te mox docebit.

Et ea multorum Problematum natura eft, ut nonnifi per quadraturas iftas disgregatas, ut ita dicam, feu ordinatim diverfas conftrui poffint; quas utique evitare non licet, quoties illæ quadraturæ ordinatim diverfæ ad unam reduci non poffunt. Sed cogor nunc abrumpere, quoniam *Brunfvigam* difcedendum eft, paulo ante nundinas, ita jubente Sereniffimo *Brunfwicenfium* Duce, quod in ipfis nundinis exterorum multitudo otium ei mecum fatis colloquendi neget. Dominus BEAUVAL BASNAGE mihi ad nuperam fchedam a Te curatam refpondit. Mea in CARTESIUM, cum Tuo judicio Tuifque animadverfionibus demum fuo tempore expecto, Vale,

Dabam *Hanoveræ* 9°. Augufti. 1697.

Deditiffimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPIS-

EPISTOLA LXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad Epiſtolam LVIII.

De Synchronis. De Curva citiſſimi appulſus. De Trajectoriis Orthogonalibus ex principio dioptrico determinandis. De Iſoperimetris. De Atomis. De Hartzoekero & La Montræo. *Methodus differentiandi de Curva in Curvam promovetur. De Trajectoriis.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

Gratum eſt quod tandem agnoſcis non tam facile eſſe Synchronæ quadratorie determinatæ tangentem ducere. Dolebam ſane, cum viderem a Te verbis meis parvam adeo fidem haberi, ut nolueris tantiſper cedere in iis, quæ tumultuarie tantum conſideraſti, ego vero improbo meditandi labore penitus enucleavi & plus ſatis examinavi. 1697 Auguſt.

Methodum puncta Synchronæ una quadratura continua inveniendi, cujus adumbrationem in fine litterarum adjeciſti, velim ut accuratius perficias; videtur pulchri quid habere: nondum recte video, quo tendat, aut quid faciat ad determinationem tangentis Synchronæ; neque ſatis capio mentem Tuam, quod ſcilicet intelligas per *vim gravitatis fortiorem factam*, & per hæc verba; *ſic omnia in curva* AC *hac nova gravitate fient proportionaliter ad ea, quæ in curva* AC *priore gravitate*; mihi quidem videtur, prout ego rem concipio, jam per ſe, gravitate non mutata, omnia eſſe proportionalia in utraque curva, ſiquidem ſimiles ſupponantur. Ecce jam ſolutionem & meam conſtructionem pro breviſſimo appulſu, quia illam gratam fore dicis. Videbis ipſe optime an aliquid cum idea Tua cognati habeat; peragitur quidem ſine Synchronæ conſi-

1697 August. Tab. XIII. consideratione; interim & hujus tangentes facillime per illam ducuntur. Problema ita se habet. *Datis (Fig. 72.) ordinatim positione curvis similibus ex eodem puncto* A *similiter descriptis* AIF, AHD, AGB, *&c.* [NB. non necesse est ut habeant commune initium] *& data positione recta* CD; *quaritur ex omnibus istis curvis illa, per quam grave, a puncto* A *descendens, tempore brevissimo appellat ad rectam* CD. SOLUTIO. Assumatur ex curvis similibus una quædam constans, ut AGB; sintque duæ variabiles AIF, AHD, situm proximum habentes. Jam si AHD, vel AIFE, illa sit per quam grave celerrime descendit ad datam CE, oportet ut tAIFE sit $= t$ AHD(per tAIFE, tAHD, intelligo tempus per AIFE & per AHD,] utrumque enim tempus minimum, & hinc inde crescere supponitur. Ductis per D & E, rectis ADB, AEN, secantibus curvas in F, D, & N: Intelligatur ducta NP parallela ipsi CD, quæ secet AB, productam in P; ita fient Triang. similia FED; & BNP, in quorum laterum FE, FD, vel BN, BP, ratione invenienda consistit caput rei, ut videbis; jam facile demonstratur tempora per arcus similes esse in subduplicata ratione eorum subtensarum, aliarumve linearum homologarum: Ergo tAHD, [tAIFE]: tAIF $= \sqrt{AD} : \sqrt{AF} = \sqrt{AP} : \sqrt{AB}$. Est autem iterum, ob similitudinem curvarum tAIFE : tAIF $=$ tAGBN : tAGB ideo tAGBN : tAGB $= \sqrt{AP} : \sqrt{AB}$ & dividendo tBN : tAGB $= \sqrt{AP} - \sqrt{AB} : \sqrt{AB} =$ [ob BP infinite parvum] BP : 2AB. Exprimitur autem tBN per BN : $\sqrt{NL}$ adeoque tAGBN per $\int(BN : \sqrt{NL})$ unde $\frac{BN}{\sqrt{NL}} : \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$ $= (BN : \sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}) = BP : 2AB$, permutando BN : $BP = \frac{1}{2}\sqrt{NL}\int\frac{BN}{\sqrt{NL}} : AB$. Producto itaque latere NB ad R, id est ducta ad curvam AGB, tangente BA, illaque sumta æquali $\frac{1}{2}\sqrt{NL}\int(BN : \sqrt{NL})$, jungatur AR: erit triangulum BAR simile parvo triangulo NBP, vel EFD, & proinde AR parallela positione datæ CD. Ex inventa hac proprietate, seu ratione laterum

laterum trianguli BNP Problema facillime conftruitur fic: In omnibus punctis curvæ affumtæ conftantis AGB, ducantur tangentes; & fiant fingulæ æquales huic refpective quantitates $-\frac{1}{2}\sqrt{NL}\int(BN:\sqrt{NL})$ [quod utique femper per unam continuam quadraturam peragitur] tunc habebitur nova curva AOR; per A ducatur ipfi pofitione datæ CD parallela AR, fecans Curvam AOR in puncto R, a quo fi ducatur tangens RB ad datam curvam AGB, determinabitur punctum B, quod quæfito eft analogum; ducta enim recta AB. & fi opus producta, fecabit pofitione datam CD in puncto breviffimi appulfus D; per quod fi defcribatur AHD fimilis ipfi AGB, erit hæc AHD illa ipfa quæ quæritur. *Q. E. F.* Vides quam brevem & fimplicem conftructionem repererim hujus difficillimi alias Problematis; vix puto aliam fimpliciorem vel concinniorem adinveniri poffe. 1697 Auguft.

Id hic notabile exiftimo, quod licet Synchronam non confideraverim, hujus tamen tangens eadem opera inventa eft, fed conftructione omnino inverfa; quia quæ antea data funt, jam funt quæfita, & viciffim; datur enim punctum D, & quæritur recta DC tangens Synchronæ tranfeuntis per D; quod fic retrogrado ordine efficio. Duco per D rectam ADB fecantem curvam affumtam AGB, in puncto B; ex quo ducta tangens BR occurret curvæ AOR in puncto R, quod fi jungatur cum A, recta RA huic ducenda eft parallela DC, quæ erit tangens Synchronæ quæfita.

Jam fpero Te mihi affenfurum, quod fummo jure dixerim, illum qui folverit Problema breviffimi appulfus in Cycloïdibus, non ideo etiam ftatim id folviffe in aliis curvis fimilibus; quia in Cycloïdibus folutio facile habetur, fed indirecte, ex fundamento optico, nempe ex normalitate undæ cum radiis, feu Synchronæ cum Brachyftochronis; id quod in aliis non obtinet. In Circulis, ex conftructione mea univerfali res adeo facilis eft, ut quadratura continua reducatur ad rectificationem curvæ alicujus. Scis enim, quod fi radius fit a, & NL, x; erit $BN:\sqrt{NL} = adx:\sqrt{(aax-x^3)}$, cujus fummatio dependet a rectificatione curvæ Lemnifcatæ, per quam conftruximus olim Tuam Ifochronam paracentricam. Et fic,

 quod

1696 Auguſt. quod notabile eſt, duo hæc Problemata Iſochronæ paracentricæ & breviſſimi appulſus in Circulis, licet utrumque tranſcendens, inter ſe tamen habent connexionem algebraïcam; id eſt uno conſtructo, alterum algebraïce conſtruitur.

Cæterum artificium meum reducendi diverſas quadraturas ad unam continuam, agnoſco hic limitatum eſſe, & deſiderare ut curvæ ordinatim poſitione datæ ſint ſimiles & ſimiliter poſitæ; in aliis autem occaſionibus quamplurimis eo commode utor, licet curvæ ordinatim datæ non ſint ſimiles; ut in exemplo Ellipſium ſuper eodem axe deſcriptarum, cujus in præcedentibus meis mentionem injeci, ſed, quod miror, in reſponſione non attingis. Imo, ope hujus artificii, ſolvo infinita alia hujuſmodi Problemata, ubi nunquam curvæ ſimiles requiruntur; horum aliquot curioſe perſcripſi nuper Domino VARIGNONIO, quæ proponat ſuis Geometris. * Unde colligere poteris hoc artificium latius patere, nec adeo limitatum eſſe, quam ſtatim Tibi viſum eſt.

Et ego ſemper cenſui perfectiſſimam tranſcendentium expreſſionem eſſe per exponentiales: ſed mihi videtur fruſtra illam quæri in iis quæ non dependent a quadratura Hyperbolæ; unde imaginari non poſſum quomodo etiam exponentialiter exhiberi poſſe velis, quæ ſupponunt quadraturam Circuli. Optarem unicum exemplum. Certiſſimum puto omnem quantitatem exponentialem; quam voco percurrentem, per Logarithmicam conſtrui poſſe; ſed forte aliud genus exponentialium habes, cujus participem me reddas, rogo.

Cedo manus; Problema radii non eſt plus-quam determinatum, prout intelligis medium variari juxta duas dimenſiones: ſed, ſi placet, attende quod longe difficilius ſit determinare leges harum variationum, ut radii in datas lineas tranſeant, quam earumdem linearum invenire curvas normaliter ſecantes; unde gratis hoc ex illo quæreres. Præterea obſervo quod ſuperficies, verbi gratia verticalis, repræſentans medium varians ſecundum ambas dimenſiones, id eſt ſecundum rectam verticalem & horizontalem, conſiderari tamen

* Videatur *Journal des Sçavans* 1697. 33. Journal du 26. Aouſt vel Opp. Tom. I. N°. XXXIX. pag. 204.

men possit tanquam varians secundum unicam tantum dimensionem 1697
si vis, verticalem. Si enim (*Fig.* 73.) varies medium quocun- Aug.
que modo secundum A B C D E F; ita etiam, quovis alio modo, TAB. XIII.
secundum A L M N O P A; manifestum jam est, etiamsi omnia puncta in horizontali F F sint diversæ densitatis; dari tamen aliquod punctum G, in proxima linea E E, quod sit ejusdem densitatis cum F & aliud H in proxima D D, item I in C C; K in B B, P in A A, &c. omnia æque densa ac F; quocunque enim modo medium super superficiem A F F A, variari concipiatur, hæc tamen successio punctorum æque densorum perpetuo locum habet; quod, ni fallor, clarum est ex ipsissima Tua continuitatis Lege: datur ergo integra linea F G H I K P, secundum quam medium æqualiter est densum: Jam si eodem modo concipias reliquas lineas E O; D N, C M, B L &c. transire per puncta ejusdem respective densitatis gradus; habebis medium, cujus variatio, quæ licet duarum sit dimensionum, jam unius tantum dimensionis est. Hinc concludo a Te non sat bene dictum esse, *si varies medium uno tantum modo, tunc fateor Problema fore plus-quam determinatum (nec refert*, B B *verbi gratia, recta sit, an curva)* refert enim maxime recta sit curva. Vidisti enim, si curva admittenda esset, omne medium quocunque modo varietur, uno tantum modo variari intelligendum esse; quod itaque palmarium est in determinatione medii, ut radios transmitat per lineas ordinatim positione datas; perspexi rem eo recidere, ut determinentur lineæ F G H I K P, E O, N N, &c. quod autem, ut supra monui, longe difficilius est quam inventio curvarum ad datas normalium. Sed hæc, pro perspicacitate Tua, me multo melius penetrabis; velim per otium cogites, offert se se mihi difficultas insuperabilis, in eo quod infinitæ lineæ curvæ sunt determinandæ, forsan omnes diversæ naturæ.

Nuspiam quidem diserte dixisti rem æque esse facilem in appulsu ad rectam & ad curvam; id tamen ex verbis Tuis sequi credebam, cum dicis, *Eadem methodus videtur etiam servire, si celerrimus appulsus quæratur, non ad rectam, sed ad curvam positione datam.* Si duo diversa per eamdem methodum solvantur, illa duo mihi sunt æque facilia.

Video

1697. Aug. Video verissimum esse, legem minimi vel maximi & in particula curvæ minima locum habere; sed sane non possum applicationem ad Isoperimetra constituere: neque etiam ad Brachystochronam datæ longitudinis. Verum non minus est rem posse (*Fig. 69.*) considerari in Ellipsi ordinaria & finita P Q R [hoc enim jamdiu & ego concipiebam] & determinari in ea punctum M, ut ex focis ductæ L M, M N, percurrantur citissime ex data altitudine. Demus porro hæc deinde posse applicari ad infinite parva, ita ut ratio L M ad M N dari possit: Nondum tamen video, nec videbo, donec mihi ostenderis, quomodo postea iterum regressus detur a cognitione speciei trianguli infinite parvi L M N, ad cognitionem ordinarii, curvæ scilicet quæsitæ, vel saltem ad æquationem differentio-differentialem. Quomodo, quæso, eo pervenire posses, cum in æquatione litera reperiri necesse sit, quæ determinet longitudinem curvæ, [alias indifferens esset pro omnibus Brachystochronis] illa littera vero, vel quidquid sit quod determinet longitudinem curvæ, nequidem ingrediatur in considerationem, quærendo speciem trianguli L M N. Dixi perpetuo inveniri posse speciem trianguli L M N, ita ut descensus per L M N sit citissimus; sed fateor me id nondum quæsivisse; quia a me impetrare non possum, ut absolvam calculum prolixissimum qui requiritur. Interim ut obstacula omnia removeam, ponamus calculum nobis ostendisse in Ellipsi ordinaria & finita punctum M ita se habere, ut triangulum L M N habeat unum latus, L M duplum alterius M N, atque adeo idem etiam obtinere in Ellipticula infinite parva. Quo pacto mihi jam quæres curvam datæ longitudinis, ex eo quod ejus particulæ minimæ L M N faciant ubique triangulum cujus unum latus, L M, duplum sit alterius M N? Si triangulum L M N posuissem isosceles, prævideo quod mihi responsurus esses curvam quæsitam esse circulum, quamvis id nullo calculo invenire posses: ideoque ut superfluam disputationem evitem, pono unum latus duplum alterius; vel si mavis triplum, quadruplumve, modo non sit isosceles.

TAB. XIII.

P. Malebranchius utique non egit ut decet, quod Te inconsulto libellum suum in lucem protruserit; dissuasissem id ego ipsi,

ipsi, si tum temporis cogitassem quod jam cogito, aut saltem si 1697
de privato inter vos commercio, quod Malebranchius apud Aug.
me ex parte dissimulaverat, constitisset magis. Quid in isto Libello contra continuitatis Legem contineatur, jam non memini, ex quo enim *Galliam* deserui, Libellum amplius haud vidi.

Corporum indivulsorum gradus Tuos admittam; mihi tamen videtur partes eumdem servare posse situm inter se, absque ut statuatur corpus perfecte rigidum [loquor de corpusculis exiguis, ex quibus majora componuntur]: sufficit utique motum conspirantem partium alicujus corpusculi tantum esse, ut ab ambientibus disturbari non possit; quo casu primus indivulsi gradus habetur, sine perfecta rigiditate, seu duritie. Video clarissime perfecte dura non dari posse, eaque proin absolute rejicio, sed vacuola interspersa Democriti & Gassendi eatenus tantum rejicio, quod jam videam iis non opus esse ad explicandos naturæ effectus; contra quam olim credebam, motum scilicet nullum fore in Universo, si omnia essent plena, vulgari opinione nixus, duritiem dependere ab immediato contactu & pressione materiæ ambientis: quod autem actu ista vacuola non dentur, credo non tam facile demonstrari posse, ab illis præsertim qui corporis essentiam non in nuda extensione statuunt. Et sane multis ex locis haud obscure colligo etiam Hugenium vacui fautorem fuisse. Cæterum *Democriticorum* & *Gassendistarum* atomos perfecte duras statuentium, illisque vacuum interjicientium opinio non tam absona mihi videtur, quam Hartsoekeri, duo extrema inter se conjungentis, nempe perfecte durum & perfecte fluidum; quo absurdius nihil excogitari potuit; nihil enim magis continuitatis Legi adversatur, quam saltus ille ab uno extremo ad alterum.

Parum soliditatis Hartsoekerus ostendit in scriptis suis, multoque minus alter ille Professor Matheseos Parisinus La Montre.......... Quid obsecro boni ab homine expectandum, qui in notiones communes peccat, ut factum fuit ab isto La Montre, qui 47*am* propositionem Euclidis demonstrare volens per Axiomata, * crassum adeo & palpabilem commisit paralogismum

* Journal des Savans 1691. 24. Journal du 2. Juillet.

1697 Aug. mum ut Mathematicorum nemo eum refutare dignaretur; sed oportebat, ... ut quædam de sequiori sexu eum castigaret; id quod revera fecit Domini *Marchionis* HOSPITALII Uxor, ut forte vidisti in *Diario Parisiensi.* * Hiccine Professor est, qui alios Mathesin docere debet? .... Quid id ad nos; dices, ignosce; verum est, ejus errores nobis parum imponent; interim quia incidenter de isto homine cogito, non possum non stomachari, quod tam male consultum sit illis qui scientiam ab eo haurire volunt. Vale.

Groningæ die 14. Aug. 1697.

Amplitudini Tuæ

Devotissimus.

J. BERNOULLI.

Responsio ad Epistolam. LIX. P. S. Præterito die Lunæ hasce Litteras jam scriptas habui postridie dimissurus, cum eodem die acciperem novissimas Tuas 3. Aug. datas, quæ fecerunt ut dimissionem in hunc diem distulerim; quo interea tuas diligenter perlegere, & quod forte notaturus essem huc adjicere possem. Ut dicam quod res est, incredibili gaudio perfusus sum cum viderem eumdem genium Tibi totum mysterium pandisse; sed indignor quod Te altius admiserit quam me. Utique rem probe penetrasti, annotando totius negotii cardinem in TAB. XIII. eo consistere, ut inveniatur ratio laterum trianguli characteristici 1C1F1 (C) in Tua figura (*Fig.* 71.); colligere poteris ex solutione mea supra allata Problematis celerrimi appulsus, ubi pariter rationem assigno laterum trianguli, PBN vel DFE, methodum meam eodem artificio niti. Sed fateor mihi unicum defuisse, quin perfecerim mehodum; quod scilicet mihi non venit in mentem differentiatio parametrorum, seu quantitatum in eadem curva invariabilium. De hujusmodi differentiatione, licet jam olim etiam inter nos actum fuerit; nunc tamen, ingenue fateor, non cogitavi

* Ibid. 1691. 27. Journal du 23. Juillet.

vi; quam vero ingeniose, quam acute illum huic negotio accommodaveris satis mirari nequeo: profecto nihil elegantius est, neque excogitari potest, quam modus differentiandi curvam per summam differentiuncularum numero infinitarum. Quin crebrius conscendis currum, si tunc Tibi vena Mathematica aperitur. Imo vero defectus haud mediocris Calculi differentialis, sublatus est. Hinc quid censes? An non possent depromi Problemata, qualia jam dedi in Ellipsibus, quibus....... exercere possemus Geometras, in interiori Geometria licet maxime versatos. Viderent sane omnes suos conatus irritos, quamdiu in nostrum artificium non penetrarent, suamque infirmitatem tanto magis mirarentur, quod hujusmodi Problemata videantur facilia & ex directa tantum methodo tangentium desumta. Haud dubie quadraturæ illæ $a\int(dx : x\sqrt{(aa+xx)})$ & $\int(dx : x)$ quas in Logarithmicis pro ratione linearum $B\theta$, BC invenisti, amplius possunt reduci. Ambæ enim dependent a quadratura Hyperbolæ, & per consequens per ipsissimas Logarithmicas construi possunt. Potuisses explicare methodum brevius & universalius, per figuram abstractam, id est non ad certum exemplum Logarithmicorum adaptatam. Spero non ingratum fore, si hic methodum generalissimam exposuero. Sint ergo [vide Fig. tuam 71.] curvæ ordinatim positione datæ, quacunque lege cognita progenitæ VC, V(C) V((C)) quarum axis communis VB, & parametri variabiles a; (a), $((a))$. Sint jam portiones curvarum VC, V (C), V((C)), quas Tu æquales posuisti, data lege crescentes vel decrescentes, id est, sit $VC = \alpha$, $V(C) = (\alpha)$, $V((C)) = ((\alpha))$ per α, (α), $((\alpha))$ &c. intelligo quantitates datas per a, (a), $((a))$, &c. Quæritur jam tangens curvæ C, (C) ((C)) transeuntis per extremitates illarum portionum; quod sic facio. Quoniam VC, seu α, datur per a, ejus differentialis dabitur per da. Sit itaque $VC - V(C)$ seu $d\alpha = \alpha' da$ (per α', α'', α''', &c. intelligo quantitates diversimode datas per a.) Sit jam $VB = x$: ergo particula curvæ 1 C 2 C dabitur per dx, affecta quantitate composita ex x & a [hujusmodi quantitates datas per x & a, quæcunque hic occurrere possunt, vocabo, a', a'', a''', &c.] Sit itaque $1\,C\,2\,C = a dx$:

 jam

1697 Aug.

1697. Aug. jam ſi differentietur $1C2C$, ſecundum a, manente x: habebitur $1C2C - 1F2F$ ſeu $d(adx) = a'dxda$, hoc ſi iterum ſummetur, ſed ſecundum x, manente a, erit $VC - VF = da\int a'dx =$ [quia $\int a'dx$ datur per a & x] $a''da$; quoniam vero ſupra inventum eſt $\alpha'da = VC - V(C) = VC - VF - 1F(C) = a''da - 1F(C)$ habebitur $F(C) = a''da - \alpha'da$: Tandem, quia BC datur per x & a, ſi ſecundum a differentietur, manente x, proveniet FC data per da; Eſto ergo $FC = a'''da$. Unde ſi ducatur $\beta\theta$ parallela ipſi $F(C)$, id eſt tangenti curvæ datæ VF & ſi fiat $C\beta : \beta\theta = FC : F(C) = a''da - \alpha'da : a'''da = a'' - \alpha' : a'''$, tanget ducta $C\theta$ curvam $C(C)((C))$ in puncto C. Si nunc regula generalis inventa ad certum exemplum eſſet applicanda, diſpiciendum tantum eſſet, quid ſit a'', α' & a''': primum enim & ultimum ſemper dabuntur per a & x promiſcue, medium vero per a tantum dari per a & x, vel per a, comprehendo etiam, quando tranſcendenter, vel ut Tu vocas, quadratorie dantur; hoc enim proceſſum Regulæ generalis non impedit.

Quod ſi hanc methodum ad Problema breviſſimi appulſus applicare velimus, reperiemus quidem facile tangentes Synchronarum, licet ordinatim poſitione datæ curvæ non ſint ſimiles, ut in ſuperiore mea ſolutione ſuppoſui: ſed fateberis, rem nondum confectam eſſe. Etenim per hanc methodum quæritur tantum poſitio tangentis ex dato puncto contactus in data Synchrona; interim in celerrimo appulſu res ſecus ſe habet, quia ex data poſitione tangente, quæritur punctum contactus. Supereſt itaque, quo exerceas ingenium, ut tam nobile inventum omnibus numeris completum reddas. Mihi videtur id præſtari poſſe per ſectionem duarum aliarum curvarum, quæ ſemper conſtrui poſſunt.

Sed hiſce jam miſſis, pervenio ad aliud egregium inventum pariter generaliſſimum, in quod harum occaſione incidi, & quod defectum tollit maximum methodi Tangentium inverſæ, ſicuti Tuo ſublatus eſt aliquis methodi Tangentium directæ. Conſiſtit illud in ſolutione hujus Problematis: *Conſtruere curvam datas ordinatim poſitione curvas, ſive ſimiles, ſive non ſimiles in dato angulo ſive*

in

invariabili sive data lege variabili secantem. Supposita similitudine curvarum ordinatim positione datarum, Problema jamdudum solutum habui: nunc vero quomodo in dissimilibus, & generaliter, id solverim paucis explicare haud ingratum Tibi fore puto: Sint (*Fig.* 74.) curvæ ordinatim positione datæ AP, AE, AC, &c. secandæ a curva quæsita PEC, in angulo dato, quem hic exempli loco ponamus ubique rectum, ut videas quam facile solutu sit, quod operose ex Opticis deducere volebas. Ad AH axem communem intelligatur applicari HG parameter curvæ AE, cujus intersectio cum GH producta, determinet punctum E in curva quæsita. Si hac ratione ubique parametri applicari concipiantur, fiet curva AG, quam si determinaverimus, eadem opera etiam PEC erit determinata. Esto itaque AH, x; HG, parameter variabilis a, HE vel HB [data per x & a] e; quæ si differentietur secundum a, manente x, habebitur BE; sit itaque BE $= e'da$: differentiando vero BH seu e, secundum x, manente a, proveniet CI, seu BD, sit itaque BD $= e''dx$, & proinde DE $= e'da - e''dx$; est autem DC $= dx$: Ergo, quia ex conditione problematis angulus BCE est rectus, erit DCq = Rect. BDE, id est $dx^2 = e'e''dadx - e''^2dx^2$, seu $dx^2 + e''^2dx^2 = e'e''dadx$. Hæc igitur æquatio differentialis determinat curvam AG, qua constructa construitur etiam quæsita FEC. Nam data GH parametro, dabitur curva AE, cujus illa est parameter; adeoque producta GH, occurret curvæ AE in puncto E quod erit ad curvam quæsitam FEC: Hujusmodi constructio per parametrorum variabilium applicationem, non inelegans mihi videtur, non dubito quin alibi etiam posset inservire, Tuo, præsertim accedente ingenio. Vale.

1697 Aug.

TAB. XIII.

Notare hic convenit, quod si curvæ ordinatim positione datæ sint Algebraïcæ; erit curva parametrorum AG transcendens primi generis. Si illæ sint transcendentes primi generis, erit hæc transcendens secundi, & ita consequenter. Patitur quidem hoc exceptionem in nonnullis exemplis particularibus, quando, scilicet, quantitas e' evadit Algebraïca; id quod per accidens fieri potest, etiamsi AP, AE, AC sint transcendentes. Iterum vale.

EPISTOLA LXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Trajectoriis. De curva citiſſimi appulſus. De virium æſtimatione, & legibus Motus.

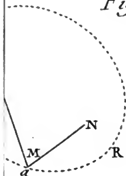
Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

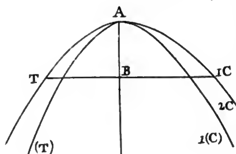
1697 Nov. CUm multa mihi eſſent dicenda, litteris Tuis pro merito reſpondere volenti; & tempore excluſus, ob negotia de die in diem, proferrem ſcribendi officium; tandem malui neceſſariis defungi, quam prorſus ſilere; ſperans interim Tuum ſilentium diuturnum ex cauſa ingrata non oriri.

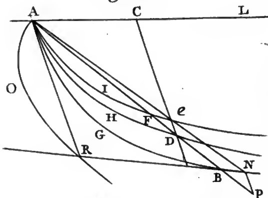
℟. Gaudeo Tibi tantopere methodum meam novam, quo pomeria calculi noſtri proferuntur, placuiſſe, ſane hac ratione non tantum ad æquationem differentialem primi gradus reducitur inventio curvæ ordinatim poſitione datas perpendiculariter ſecantis, aut eis angulo vel conſtanter, vel ordinatim dato occurentis; ſed etiamſi angulus non ſit ordinatim datus, modo quæ ipſum determinant, cum aliis functionibus conſtituant aliquid ordinatim datum, idem obtineri poteſt, multaque adhuc ampliora inſunt.

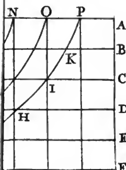
Solutio Problematis breviſſimi appulſus non eſt quod Te jam amplius moretur, licet curvæ ordinatim poſitione datæ non ſint ſimiles & ſimiliter poſitæ. Quæritur nimirum per quam ex his grave breviſſime appellat ad rectam poſitione datam. Ad quamvis Synchronarum ducatur recta ipſam tangens, ſed datæ rectæ parallela. Habebitur curva quæ tranſibit per omnia puncta contactuum, cujus cum recta data interſectio dabit quæſitum appulſus punctum, unde cætera pendent.

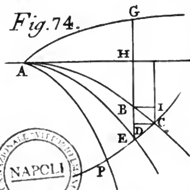
Dominus *Marchio* HOSPITALIUS mihi ſolutionem Tuorum quorumdam Problematum in *Diario Gallico* propoſitorum miſit, demto


Fig. 69.
N
M
R
a


Fig. 70.
A
B
T
1C
2C
(T)
1(C)


Fig. 72.
A
C
L
3C
2C
O
I
e
1F
1C
H
F
1(C)
G
D
R
N
B
P


Fig. 73.
N
O
P
A
B
K
C
I
D
H
E
F


Fig. 74.
G
H
A
B
I
C
D
E
P



demto primo nescio quo, ut eas in *Actis Lipsiensibus* edi curem, quod & fiet *, tunc cum Tua edetur solutio. Tibi ipsi se se de ea re scripturum esse indicavit, nec dubito factum. Mihi hæc Problemata Tua non innotuerant. Solutiones *Hospitaliana* ad casus nova Calculi promotione solvendos non pertingunt. Vidi quæ *Historiæ operum Eruditorum* † inseri curasti, ubi æmulos eleganter defricas. 1697 Novem.

Durat adhuc, etsi per longa intervalla subinde dilata, disputatio inter Dnum. PAPINUM & me. Valde innititur ei, quod duo corpora reciprocis ad corporum rationem celeritatibus concurrentia se mutuo sistunt. Hinc putat vim eorum esse æqualem; non considerans æqualia ab ipsis absolute non posse effici, etsi se mutuo possunt impedire.

Inter alia objecerat: Si fingamus corpora A & B esse perfecte dura & inflexibilia, A, massa 1, celeritate 4, & B, massa 4, celeritate 1, & concurrendo elastrum tendere, atque ita eo tenso simul ad quietem redigi; tum D, massa 8, fingi substitutum in locum B, idque ipsum D recipere totam vim quam dederat elastro corpus B, seu quam corpus B ab eo reciperet, & tamen celeritatem, quam recipit D, esse celeritati ejus quam recipit A reciproce proportionalem: hinc infert, nunc plus, nunc minus virium in mundo esse, diverso tempore, contra sententiam meam. Respondi verum esse A & D hic recipere ab Elastro se restituente velocitates molibus reciproce proportionales; sed verum non esse, quod D tantum recipiat virium, quantum recepisset B; itaque dixi rem perinde fore ac si A1, & D8, concurrissent velocitatibus A, ut $\frac{4}{3}\sqrt{10}$, & D ut $\frac{1}{6}\sqrt{10}$; ita enim eisdem velocitatibus ab Elastro reflexam iri & conservatum iri, tum reciprocam celeritatem ad corpora rationem, tum etiam virium summam.

Nunc novum casum objicit, nempe ut concurrant A, massa 10, velocitate 4; B, massa 1, velocitate 10, & ubi B in concursu

* Factum est A°. 1698. Januar. pag. 51.

† 1697. Juin. p. 452. & Opp. Tom. I. N°. XXXVIII. p. 194.

1697 Novem. cursu ad quietem redactum est, substituit ei D duplum, seu cujus massa 2. Et putat nunc perinde omnia eventura esse, ac si concurrissent A, ut prius massa 10, velocitate 4, sed D, massa 2, velocitate 5. Quo facto, facile colligit eventum proditurum, quo minorem in corporum a se invicem discessu virium summam habituri essemus, quam ante. Supponit autem, ut ante corpora A, B, D esse perfecte rigida; elastrum autem non in ipsis esse, sed in corpore intercepto, quod fingendum est, statim iterum tolli, ubi libertatem recuperavit, ne forte corporis progressui obstet. Etsi constet has fictiones revera locum non habere.

Respondi, negando D, massa 2, velocitate 5, absolute idem efficere quod B, massa 1, velocitate 5, aut unum pro alio substitui posse; cum casus ipsius B sit duplo fortior casu ipsius D, seu duplo altius pondus ad eamdem altitudinem elevare possit. Interim operæ pretium esset definire paulo distinctius, quantum celeritatis retineat A, quando B reductum est ad quietem, & quantum tunc virium sit translatum in elastrum; ut scilicet, melius determinari queat quid futurum sit, si eo momento, quo B reducitur ad quietem, substitui fingatur ejus duplum D. Hoc igitur per otium a Te considerari non inutile erit; res certe in potestate est.

HUETIUS, aliique amici in Gallia, desiderant meas *ad* CARTESIUM *Animadversiunculas*. Erunt mox mittendi occasiones, itaque rogo, ut ad Dnum. MEJERUM *Bremam* cures. Interim Vale.

Dabam *Hanoveræ* 2. Novembris 1697.

Deditissimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPIS-

EPISTOLA LXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De methodo differentiandi de curva in curvam. De ſolutione Hoſpitaliana *Problematum ſuorum. De viribus æſtimandis.*

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

Silentium tuum diuturnum me anxium reddebat de valetudine tua; ſed bene eſt quod valeas, & gaudeo: ſubverebar initio ne forte poſtremæ meæ intercidiſſent. . . . . Etiam ego lætor Tibi probari modum meum, ex Methodo Tua nova differentiandi curvas deductum, quo curvam invenio curvas ordinatim poſitione datas ſecantem, vel perpendiculariter, vel in angulo conſtanti, vel denique in angulo utcunque variante ſecundum datam legem; nec per hæc aliud intellexi, quam ut angulus, vel per ſe ſit determinatus, vel per certas quaſdam, uti vocas, functiones quæ conſtituant aliquid ordinatim datum. Non nego alia plura ineſſe, quæ Te nemo melius rimari poterit; optarem præprimis, ut, quemadmodum in præcedentibus Tuis ante abitum ad Nundinas *Brunſwicenſes* ſcriptis innuis, inde eliceres novam ſummandi rationem; raro occurrunt hujuſmodi ſummationes, qualis, exempli gratia, eſt hæc $\int(da\int(xdx : \sqrt{2ax - x^2}))$ quæ per quadraturam ſegmenti circularis conſtruitur: ſed id alicujus momenti eſſet, ſi exinde pateret modus ſeparandi indeterminatas in æquatione differentiali; hoc enim unicum eſt, quod ſe methodis noſtris adhuc obſtinate opponit: Aſſeris quidem hujuſmodi æquationem conſtrui poſſe, ſi non per quadraturam continuam, ſaltem per iſtas diſgregatas, ſeu ordinatim diverſas; fateor autem me id nondum potuiſſe aſſequi, licet id tentaverim in leviſſimo hoc exemplo $xxdx + yydx = aady$, cujus conſtructionem vellem ut mihi dares, ſive

1697 Nov.

1697 Nov. five id fiat per quadraturam continuam, five per disgregatas; nec profecto majorem capies fructum ex novo Tuo invento; præsertim si hanc separandi difficultatem hactenus insuperabilem non solum in hac, sed generaliter in omni alia æquatione tollere posses.

Solutionem generalem Problematis brevissimi appulsus non absimili modo conceperam; restat tamen aliquid quod desideratur; scilicet, quod ad Synchronam tangens duci posse assumatur positione datæ parallela; id quod haud adeo facile judico. Sed habeo etiam alias solutiones, quæ id non supponunt. Proposueram Problemata, de quibus Dominus Hospitalius ad Te scripsit, ante novam Calculi promotionem; alias non proposuissem: non ideo tamen statim alii in artificium nostrum penetrabunt.

Verum dicis, solutiones Hospitalii ad casus curvarum dissimilium non pertingunt; quod idem tum objecissem; me scilicet per *curvas ejusdem speciei* non tantum intelligere *curvas similes*, sed quascunque alias ordinatim datas; exempli gratia, omnes Ellipses super eodem axe descriptas, atque adeo ipsum Problemati nondum plenarie satisfecisse. Respondit nuper se agnoscere aliquid amplius requiri pro curvis dissimilibus, *Je vous avoue*, inquit, *que lorsque les courbes ne seront pas semblables, il faut quelque chose de plus; en tout cas je ne prétens avoir resolu vos derniers Problémes, que dans ce sens, & j'attends de l'apprendre de vous, lorsque les courbes seront dissemblables.* Si urget Dominus Hospitalius ut edas solutiones suas, poteris edere meis non exspectatis; operæ vero pretium non esset solutiones imperfectas publicare, tantum scilicet pro curvis similibus; cum enim perfectæ solutiones pro omnibus curvis ordinatim datis, ipso Tuo judicio, adhuc dissimulandæ sint, ne aliis illico artificium detegamus, præstat omnino silere & nihil dare, quam pauca dare. Quandoquidem nondum videris illa Problemata, mitto hic foliolum ex *Diario Gallico* *. Tua forte applicatione dignum censebis primum, ubi quæro modum ducendæ in superficie convexa lineæ brevissimæ

a

* 1697. 33e. Journal du 26. Aoust. vel Opp. Tom. I. N°. XXXIX. pag. 204.

ā puncto ad punctum. Hospitalius de eo desperavit; Ego vero illud reduxi ad æquationem differentialem, quæ, si separentur indeterminatæ, construi poterit. 1697. Nov.

Quæ Dominus Papinus de novo movet contra æstimationem virium, speciosa quidem sunt; sed si penitius inspiciantur, fundamentum nullum habent. Aptissime ipsi respondisti, quod quando duo corpora velocitatibus reciprocis ad massarum rationem concurrentia se se sistunt, non ideo sequatur eorum vim esse æqualem; nam vis vim non destruit, seu vis vi non est contraria; eodem modo quo quadratum lineæ affirmativæ, & quadratum lineæ negativæ, non dicuntur contrarium efficere, utpote utrumque affirmativum. Dicendum itaque duo illa Corpora se se sistere, quia habent æqualem quantitatem directionis sibi mutuo contrariam; quæ, si respective consideretur, nulla est: est enim directio respectiva progressio communis Centri gravitatis corporum, quod, cum non progrediatur ante concursum, pariter non progredi poterit, post concursum. Secus sequeretur, aliquid quod quiescit a se ipso moveri posse; quod est absurdum. Hinc, ut Centrum gravitatis quiescat post concursum, ut ante concursum, oportet ut, vel & ipsa corpora in conflictu sistantur, tenso elastro interposito manente; vel, si elastrum se se restituat, ut pristina celeritate repellantur. Hi enim duo soli casus possibiles sunt, quibus Centrum gravitatis in quiete conservatur. Hanc puto genuinam causam esse ejus quod Papinus æqualitati virium adscribit, sicque paralogismum committit, non causæ pro causa. Ex hoc errore etiam reliqui ejus errores pullulant; ut in priori exemplo. Si A massa 1, velocitate 4, & B massa 4, celeritate 1 concurrant, & elastro tenso, ipsis ad quietem redactis, substitui intelligatur D, massa 8, in locum B. Quis non statim videret Papinum gratis hic supponere, Corpus D tantumdem virium ab elastro recipere, quantum ipsi dederat Corpus B, seu quantum jam B ab elastro iterum reciperet, si maneret? Ut autem inveniatur, quantum præcise celeritatis Corpus D recipiat ab elastro, & quantum item celeritate repellatur corpus A; considerandum est, quod tota vis quam habebant ante concursum corpus A & corpus B sit, in concursu, translata in elastrum interjectum;

1697 Nov. hoc proinde elastrum ita tensum, quod ope vinculi in tensione ista manere concipio, si e medio duorum illorum Corporum A & B eximi, & inter duo alia corpora quiescentia C & D interponi intelligatur; evidens utique est, quod jam subito, soluto vinculo, totam suam vim transferat in Corpora C & D, quarum periconsequens aggregatum idem præcise debet esse, quam aggregatum virium corporum A & B; res itaque eo recidit, ut distribuatur hoc aggregatum virium Corporum A & B in duas partes, quarum una, quæ C communicabitur se se habeat ad alterum ipsi D communicandum, reciproce ut D ad C; atque istæ vires dividantur per moles C & D, & demum ex quotientibus extrahantur radices quadratæ, quæ dabunt velocitates, quas Corpora C & D ab elastro recipient. Hinc in casu particulari PAPINI, ubi corpora A & C sunt æqualia, vel potius eadem, utrumque Massæ 1, B massæ 4, D massæ 8, & A celeritate 4, B celeritate 1; reperietur reflexum iri A & D velocitatibus, ut $\frac{4}{3}\sqrt{10}$, & $\frac{1}{6}\sqrt{10}$; prorsus ut Tu invenisti.

In altera objectione quando concurrunt A, massæ 10, velocitate 4; B, massæ 1, velocitate 10, ubi in concursu, reducto B ad quietem, ei substituit D duplum, seu cujus massæ 2, putans tunc perinde omnia eventura esse, ac si concurrissent A, ut prius, massa 10, velocitate 4, sed D, massa 2, velocitate 5; petit principium, supponitque quod probare nititur; scilicet D, massa 2, velocitate 5. idem efficere, seu tantumdem habere actionis, quantum B, massa 1, velocitate 10: id quod absolute falsum est, & nil nisi vetus error. Interim cum a me desideres, ut per otium me applicem ad definiendum quantum celeritatis retineat A, quando B reductum est ad quietem, & quantum tunc virium sit translatum in elastrum; ut scilicet melius determinari queat, quid futurum sit, si eo momento quo B reducitur ad quietem, substitui fingatur ejus duplum D: fateor id esse in potestate; requirit tamen plus meditationis quam præcedens, quæ quia jucunda admodum mihi visa fuere, & digna quæ penitius inspicerem, tanto fortius me compulere ad desiderio Tuo satisfaciendum, & quidem post brevem meditab-

ditationem generaliter omnia determinavi, positis tum corporibus, tum velocitatibus, in quacunque ratione. Dico itaque, in hoc PAPINI casu, corpus A, eo momento quo B reducitur ad quietem, retinere celeritatem 3, vel in elastrum translatam esse integram vim ipsius B, & præterea septem decimas sextas partes vis ipsius A; quæ quidem facile patent; sed, quod caput rei est, dico porro, quod si, eo momento quo B reducitur ad quietem, substituitur D, amittet A gradatim de sua velocitate residua 3, D vero gradatim acquiret, & quidem decrementa illius & incrementa hujus erunt reciproce ut moles; ita ut tandem, quod contingit eo ipso instanti quo elastrum est in maxima sua tensione, A & D habitura sint æqualem, seu communem, velocitatem; quæ proinde erit $\frac{5}{2}$: tunc autem elastri vis, seu tensio maxima, erit æqualis vi integræ ipsius A, & simul quartæ parti vis ipsius B, earum scilicet, quas ante concursum habebant. Inventa itaque vi elastri, invenietur, per modum supra exhibitum, quantum celeritatis elastrum, a tensione sua se se restituendo, corporibus A & D imprimet; nimirum ipsi A dabit celeritatem $\sqrt{(37:12)}$ ipsi D vero $5\sqrt{(37:12)}$ in plagas contrarias. Hinc si illa a celeritate communi auferatur, hæc vero ad eamdem addatur, habebitur quæsitum. Dico itaque quod, post substitutionem illam factam, A feretur velocitate $5:2-\sqrt{(37:12)}$ D autem $5:2+5\sqrt{(37:12)}$ in plagam eamdem. Hoc ratiocinium egregie confirmatur, si analytice quæratur, supponendo quantitatem tum virium tum directionis post concursum, & substitutionem debere manere eamdem quæ ante concursum. Sic, si ponatur velocitas futura ipsius A, x; velocitas futura ipsius D, y: erit quantitas virium $10xx+2yy=260=$ quantitati virium ante concursum; & quantitas directionis $10x+2y=30=$ quantitati directionis ante concursum; ex his enim duabus æquationibus reperietur $x=5:2-\sqrt{(37:12)}$, & $y=5:2+5\sqrt{(37:12)}$ ut ante. 1697 Dec.

Cum hactenus nulla occasio se se obtulerit mittendi *Bremam* Tuas in CARTESIUM observationes, misi illas tandem per Cursorem ordinarium. Rogo ut Domino MENCKENIO transmittas has lit-

 teras

1697 Nov. teras . . . . adjunctas, una cum schediasmate *Actis* inserendo, * quod apertum reliqui, ut statim legere possis, quid ad nupera TSCHIRNHAUSIANA respondeam. DE LA HIRE...... paralogizantem paulo acrius castigo, sed qui nostra ita contemnit, meliora non meretur: Discat inposterum abstinere ab iis quæ non intelligit. . . . . Vale.

Amplitud. Tuæ

Devotissimus

J. BERNOULLI.

* *De Arcuum Parabolicorum comparatione Vide* Epist. sequentes LXVIII. & LXIX.

EPISTOLA LXIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De integrationibus ad quadraturas revocandis. De Synchrona. De Problemate Isoperimetrico. De virium æstimatione. De TSCHIRNHAUSII *errore circa arcuum Parabolicorum comparationem. De linea brevissima in superficie curva.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1697 Decemb. JUsto rigorosius mecum ages, si nihil mihi Tuorum perscribes, nisi cujus meæ Tibi occasionem suppeditent; quæ vereor ne inposterum cogantur esse steriliores quam vellem. Inanes non fuissent Tuæ, si eorum participem me fecisses, quæ interim a Te acta video. Idque, ut inposterum facias, rogo.

Pro differentialibus ad quadraturas revocandis habui sane meditationes,

tiones, quarum executio nunc novo differentiali genere egregie juvatur. Sed mihi non licet quæ meditor mature exequi. Itaque cogor comperendinare. 1697 Decemb.

In tangente Synchronæ ducenda quæ sit datæ rectæ parallela, difficultatem esse non puto. Idem est si pro recta data sit curva, tunc ordinatim similes ducendæ.

Putem sufficere .... ut Domino *Fratri* Tuo in *Actis Eruditorum*, satisfacias ut in *Diario Gallico* * jam fecisti, nec opus esse ut omnia des, quæ interim es assecutus. Misi in hanc rem Tua *Lipsiam*, † sed nescio an ipsi ex *Gallico* versuri sint Tua; fortasse fecisti ipse, & ut exhiberi debeant perscripsisti in Tuis ad Dominum MENCKENIUM litteris.

Ut Domino PAPINO melius satisfacerem, ipse calculandi laborem, post litteras Tibi scriptas, in me sumseram, & quantum judico, eadem qua Tu methodo sum usus. Certe & mihi provenit: eamdem manere quantitatem progressus, seu vim directivam, præter vim absolutam totalem. Mitto Tibi meæ ad ipsum Epistolæ duplicis præformationem; rogoque ut remittas, quo integrum habeam meum cum ipso de hoc argumento commercium.

Vim directivam hic manere potuissem assumere, nam id hoc quoque casu demonstrari potest. Sed malui rem aliunde derivare, ex ipsa scilicet distincta consideratione conflictus, quod a Te quoque recte factum video. Spero & numeros consensuros.

Miror Dominum TSCHIRNHAUSIUM, Virum alioquin ingeniosissimum, in rebus non difficilibus & in potestate existentibus tam sæpe labi. Id distractionibus tribuo, & festinationi non satis considerata proferendi. LA HIRIUM usque adeo παραλογίζειν in re clara magis adhuc miror.

Problema minimæ lineæ in superficie curva a puncto dato ad datum ducendæ olim consideraveram, sed mihi non satisfeceram; cum vero proponeres mihi Brachystochronam, meditationem absolvi; sunt enim hæc Problemata sic satis cognata. Sed ad praxin Methodi non accessi.

. . . .

Domi-

* 1697. 39e. Journal du 2e. Decemb. *Vide* Opp. Tom I. N°. XL. p. 206.
† *Vide* Act. Erud. 1693. Janu. pag 52.

Dominus *Ezechiel* SPANHEMIUS mihi *Berolino* ſcripſit, ſe ſe juſſu Electoris ſui ad Regem Galliæ proficiſci, & *Hanovera* tranſiturum. Ea occaſione *Animadverſiunculas ad* CARTESIUM HUETIO tranſmittam deſideranti. Itaque gratias ago quod eas Domino MEJERO *Bremam* miſiſti. Vale & mihi ſubinde quid agas ſignifica, & ſi videtur etiam communica.

Dabam *Hanoveræ* 17°. Decembris 1697.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA LXV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad penultimam.

De Virium æſtimatione. De legibus motus. Philoſophiam experimentalem docendi munus ſibi impoſitum monet.

Vir Ampliſſime atque Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1698 Januar. GRatias ago quod mea curaveris *Lipſiam*. . . . .
. . . .

Remitto ecce ſcripta Tua, ubi quid Domino PAPINO reſponderis, abunde perſpexi. Gaudeo nos concurriſſe, non ſolum in determinatione velocitatum, quibus A & D ſeparantur, ſed in eadem prorſus methodo, qua uterque uſi fuimus.

Calculi Tui examine facto, video etiam numeros conſentire, nam in figura Tua, ubi velocitas A ante concurſum, ſeu AP eſt 44', velocitas B ſeu BP $=$ 110, facis P(G) $= 27\frac{1}{2}$ & retro

tro-sumis $(G)(A) = \frac{1}{6}\sqrt{13431}$; a puncto A versus anteriora accipis $(A)(D)\sqrt{13431}$; erit per consequens $P(A)$ seu velocitas post-futura $A = 27\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{13431}$, & $P(D)$ seu velocitas D erit $27\frac{1}{2} + \sqrt{13431}$. Ego vero positis AP, 4, & BP, 10 dixi esse $P(G) = 5:2 - \sqrt{(37:12)}$ & $P(D) = 5:2 + 5\sqrt{(37:12)}$ sunt autem $44.4::110.10::27\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{13431}.\frac{5}{2} - \sqrt{(37:12)} = 27\frac{1}{2} + \sqrt{13431} : \frac{5}{2} + 5\sqrt{(37:12)}$, omnia proportionalia; Ergo consentimus. Quid ad responsionem Tuam reposuerit PAPINUS, libenter viderem; dic ipsi quod nos uterque eadem reperimus, alter alterius nesciens cogitata; forsan agnoscet tandem e nostris esse partibus veritatem, nisi nos ambos præ se vidente coecutire arbitretur. Cum nuper, LA HIRII errore deprehenso, etiam reliqua *Tractatus mechanici* * ejus pervolverem, inveni Regulas pro communicatione motus, quas nostris consentire reperio; absque tamen, ut Author veram æstimationem virium, vel statuat, vel præsupponat: deducit illas ex natura elaterii, seu, ut vocas, lege vis mortuæ, quæ celeritates imprimit in simplici reciproca ratione molium. Unde hoc lumen hauserit LA HIRIUS nescio; a se habere non puto. Videtur ex ipsis illis Regulis tanquam jam suppositis, LA HIRIUM aliosque qui cum eo faciunt [etiam PAPINUM, si LA HIRII ratiocinium admitteret] convinci posse de vera quantitate actionis; quippe facile ex illis demonstrabitur, eamdem perpetuo conservari summam producti quadrati velocitatis in molem, non vero simplicis velocitatis in molem, ut haud dubie ipse LA HIRIUS putat, qui proinde proprio se jugulat gladio. Domino *Marchioni* HOSPITALIO, Tua, ut dixit, venia, communicavi Tuam methodum, pro solvendo secundo meo Problemate Programmatis ante annum impressi, quæ NEWTONII similis est. Hic abrumpere cogor,

1698 Januar.

 deficiente

* *Traité de Méchanique*, &c. Paris 1695. 8°. pag. 384. & seq.

deficiente ſcribendi copia, & Ego vereor ne meæ inpoſterum futuræ ſint interdum ſteriliores, quam vellem. Ordines noſtri novam mihi impoſuerunt docendi Provinciam, atque in eum finem certam decreverunt ſummam ad emenda inſtrumenta experimentalia, ut, exemplo VOLDERI *Lugdunenſis*, Studioſos noſtros etiam exemplis Mathematico-phyſicis exerceam. Hiſce vale, & cum novi anni auſpiciis nova fruere valetudine.

Amplitudinis Tuæ

Groningæ 8. Januar. 1698.

Obſequentiſſimus

J. BERNOULLI.

EPISTOLA LXVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De LA HIRIO *&* OZANAMMO. *De Philoſophia experimentali. De viribus corporum.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

1698 Januar. LA HIRII Mechanica aliquando ut legere poſſim, operam dabo. Quæ de concurſibus corporum habere ais, recta ea ſuſpicor ex MARIOTTI ſcriptis habuiſſe, cujus ſchedæ in manus ejus venere. Ego autem cum MARIOTTO de his contuli jam *Pariſiis*, & licet ipſi ſententiam meam de vera virium æſtimatione non ſatis

fatis expofuiffem, alia tamen ratione, per vim fcilicet mortuam ab elaftro exercitam, rem explicabam. 1698 Januar.

Interim ex folo principio vis mortuæ vix poterit definiri gradus tenfionis Elaftri a corporum concurfu factus, aliaque multa.

Non laudo, quod Viri docti interdum non nominant eos a quibus profecere. Sic Dominus Ozanam aufus eft meam Quadraturam arithmeticam in fua *Geometria Practica*, Authore diffimulato, proferre, & demonftrationem pene verbotenus meam fibi afcribere. * Et Dominus La Hirius ipfe, quod non fatis mirari poffum, Epicycloïdum ufum ad figuras dentium fibi tribuere videtur in peculiari de iis differtatione, † cum tamen certum fit inventum effe Roemeri *Dani*; nam eram *Parifiis*, eo tempore quo is invenit, remque non tantum ab ipfo Roemero, fed & Hugenio intellexi; quo tempore nondum La Hirius in Academiam Scientiarum Regiam erat receptus, nec in hoc genere quicquam præftitiffe dicebatur.

Roemerum, qui in *Dania* agit Regi æftimatus, miror fibi fua non vindicare.

Gaudeo præclarum confilium cœpiffe Ordines veftros, fuppeditandi fumtus in experimenta, tantumque abeft ut ea re putem litteras tuas futuras fteriliores, ut contra tantum expectem abundantiores, nifi me fcilicet folis abftractis delectari putas.

Interea a Tua benevolentia id mihi fpondeo, ut tum de Tuis meditatis, tum & de aliis, quæ Tecum communicantur nova, aliquam notitiam mihi non invideas; neque enim dubito a Domino *Marchione* Hospitalio vel Domino Varignonio, & aliis fubinde aliqua fcitu digna ad Te perfcribi, & magis etiam a Te ad illos. Gratum eft quod Domino *Marchioni* communicafti Methodum meam, pro locis datæ ad plura puncta proprietatis. Etfi enim *Newtoniana* non fit abfimilis; tamen ex his quæ dicit Newtonus non æque ac ex meis origo inventi apparet.

Dominus Papinus, quod miratus fum, non fatis ad rem

Xx 2 refpon-

* *Vid.* Epift. VIII. & IX. & feq.

† *Traité des Epicycloïdes & de leurs usages dans les Méchaniques.* Paris.

1698 Januar. respondit; persuasus distinguendum esse inter hæc quæ fiunt apud nos, ob insensibilis materiæ actiones, & ea quæ fierent in concursu corporum libero; similibus præjudiciis & MALEBRANCHIUS laborat. Hortatus sum ut dicat, quas Regulas liberis corporibus tribuat; significabo ipsi consensum nostrarum determinationum. Dum litteras meas a Te remissas inspicio; nolo verum esse ut dixi, quod celeritates in corporum concursu amissæ sunt reciprocæ molibus; idem tamen non verum esse de celeritatibus recuperatis, cum corpora se restituunt, & rursus a se incipiunt recedere; At verum esse quodammodo de recuperandis. Vale vigeque, & in hunc annum & in alios multos.

Dabam *Hanoveræ* 18. *Januar.* 1698.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA LXVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De LAHIRIO, & ROEMERO. *De* OZANAMMO & *Marchione* HOSPITALIO. *De* VARIGNONIO. *De viribus corporum.*

Vir Amplissime ac Celeberrime, Fautor Honoratissime!

. . . .

1698 Febr. GRatum est scire quod LA HIRIUS, quæ de Corporum concursibus habet, ex MARIOTTI scriptis hauserit; non modo Authorem dissimulat, sed eum bis vel ter citat, tanquam contrarium sentientem............... quis....... suspicari ausit LA-HI-

HIRIUM a MARIOTTO didicisse, quem in ea re ab ipso dissensisse dicit? Vitium sane .... in LA HIRIO non semel animadverti, virorum Doctorum nomina contemtim nimis .... subticet; infra suam dignitatem censens quicquid ab aliis provenit, quandò interim, vel maxime illorum inventa sibi arrogare affectat. 1698. Febr.

Dissertationem *De Epicycloïdibus* nondum vidi, sed aliquid de ipsorum usu ad figuras dentium, etiam in ipso *Tractatu mechanico* * habet; inter alia constructionem alicujus rotæ hoc modo dentatæ, omni notabili frictione carentis, quam se ipsum executioni dedisse ait prope *Lutetiam*; cujus tamen primam inventionem Domino DES-ARGUES tribuit. Unde vero figuram dentium ad procurandum motum æquabilem didicerit, altum est silentium. Credebam equidem primo non nisi conjecturando voluisse divinare figuram debere esse Cycloidalem, quia forsan hæc ipsi præ alia aptior visa fuerit: etenim, ut modo dixi, Dissertationem *de Epicycloïdibus* non vidi, neque in *Tractatu mechanico* demonstrationem addit: postea vero, ut rei certior fierem, figuram debitam ex me ipso quæsivi, atque ex calculo comperi, Cycloïdem communem satisfacere, sed illam non solam, namque [quod LA HIRIUS non habet] & protracta, & contracta, idem præstant. Mirabar itaque quis genius hunc hominem, Calculi nostri aliusve novæ methodi omnino rudem & osorem, in cognitionem harum figurarum deduxisset: sed postquam ROEMERI inventum esse ex Te cognovi, cesso mirari, & tecum jam potius miror, qui ille vivo etiamnum & legitimo Parenti prolem subducere & pro sua publice obtrudere audeat............. Non dubito ROEMERUM sua sibi vindicaturum, si hæc ad cognitionem sui pervenerint: sed ut audio ex *Fratre* meo juniori, qui illum *Hafniæ* sæpius adiit, in rebus Aulicis jam totus est, quibus haud dubie tempus utilius teret quam plagiario respondendo.

Cum olim *Genevæ* agerem, Domini OZANAM *Geometria practica* forte in manus incidit; quam volvendo, cum reperissem Quadraturam arithmeticam, memini me dixisse ad Dominum FATIUM

* *Traité de Méchanique* Paris 1695. pag. 368.

1698 Febr. DE DUILLIER, qui præsens erat, me antea hanc progressionem quanquam sine demonstratione, vidisse in *Actis*, quæ Te auctorem agnosceret: mirari me cur OZANAM aliena sibi adscribere ausus fuisset; me enim non dubitare illum demonstrationem suam à Te ipso edoctum fuisse........ Ego etiam tale quid expertus sum in ipso *Marchione* HOSPITALIO [inter nos dictum]......... quando nuperum suum Opusculum vulgavit. Licet in Præfatione mihi multum debere profiteatur; vaga nimis est hæc confessio, nec eo melior quod Author *Diarii Parisini* recensendo hoc Opusculum, eam a nescio qua generosa modestia profectam deprædicet, si vere modestus fuisset imitari debuisset *Erasmium* BARTHOLINUM, qui candide edixit se, quæ conscripsisset tantum, *Principia mathe-seos universalis* a SCHOTENIO accepisse: non majori jure HOSPITALIUS dicendus est Author sui Opusculi; totum enim quantum est, paucis paginis exceptis, [Tibi in aures dico, & nemini alii] a me partim scriptum, partim in calamum dictatum accepit, partim etiam, postquam *Parisios* deseruissem, per litteras communicatum accepit: in cujus documentum omnium copiæ a me asservantur, & quandocunque libuerit produci possunt; quas etiam ante vulgatum Opusculum nonnulli amici viderunt, & bonam partem descripserunt; & quid multum! habeo litteras HOSPITALII ad me scriptas, quæ testantur quantum mihi arrogare liceat. Præcipuum quod ibi præstitit, illud est quod in ordinem digessit, & gallico idiomate nitide conscripsit, quæ ipsi confuse, modo latine, modo gallice exhibueram;..........

Pecunia, quam Ordines nostri erogaturi sunt in experimenta, tanta non est, quantam forsan tibi imaginaris, destinata est summa 1000 vel 1200 florenorum ad summum, ad emendum tantum instrumenta communia & ordinaria, quibus non magni quid, vel extraordinarii, præstiturum polliceor; neque adeo dignum quod Tibi communicetur. Delectamentum forsan ipsi capient Ordines, si primis vicibus, ut spero, interesse dignentur & spectatores agere; id quod facile majori liberalitati ansam præbere posset.

Diu est quod nihil neque a Domino *Marchione*, neque a Domino VARIGNONIO litterarum acceperim, cum tamen uterque mihi

hi debeat. VARIGNONIUS discendi cupidus est, & docilis; proficit in nostris insigniter, & unde profecerit agnoscet ingenue. Laudo hunc Virum, propter mirum candorem, & raram modestiam; .... nostra contra invidos strenue defendit. 1698 Febr.

PAPINUS utique distinctione sua subterfugium quærit: abstrahimus ab insensibilis materiæ actione; alium enim non consideramus concursum corporum quam liberum; sufficit ergo nobis, si pro hoc nostras regulas concedat. Non satis capio, cur in corporum concursu celeritates recuperandas molibus reciprocas esse dicas, recuperatas non item: mihi saltem videtur Elementa celeritatum, & amissarum, & recuperatarum seu recuperandarum [nullam differentiam hic capio] molibus esse reciproce proportionalia; quod utique sequitur ex natura vis mortuæ. Vale.

Amplitudinis Tuæ

Obsequentissimus

J. BERNOULLI.

EPISTOLA LXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Problemate Isoperimetrico. De LA HIRIO. *De* Tschirnhausiana *arcuum parabolicorum comparatione, Varia.*

Vir Celeberrime, Fautor & Amice Honoratissime!

MItto ecce quæ Dominus *Frater* Tuus *Diario Eruditorum Gallico* * inseri curavit, tametsi suspicer ea Tibi jam esse visa. Vides 1698 Mart.

* 1698. 7. Journal du 17. Fevr. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLI. p. 214.

1698 Mart. Vides quam habuerim gravem causam declinandi receptionem arbitrii, antequam constaret ab utraque parte ad me deferri. Vides enim Dominum *Fratrem* Tuum aliam rei definiendæ rationem proponere. . . .

Domini LA HIRII Librum *de Epicycloïdibus* habeo, sed attente legendi otium non est. Inspiciens obiter observavi passim inter demonstrandum ad infinite parva delabi, atque ita a rigore Veterum deflectere; non male quidem, nisi aliud professus videretur. Hoc enim semel admisso, non erat opus tanto apparatu. Est tamen, fateor, Doctrina ejus mathematica non vulgaris; nam Conicas meditationes universales DESARGUESII & PASCALII egregie persecutus est. In Astronomia Observator diligens & in aliis quoque rebus excutiendis accuratus habetur; & cum delineationibus valeat, perutilem Academiæ Scientiarum Regiæ operam navat. Contra Dominum TSCHIRNHAUSIUM quædam recte monuit; vellem tamen usus fuisset majore moderatione. Quemadmodum & ipsum Dominum TSCHIRNHAUSIUM optarem apertius agere, ne dum præclariora premit, cogatur inferioribus applicare nomina, quorum mensuram non implere subinde deprehenduntur. Ille tamen in Litteris ad me suis, ac publicis etiam scriptis, testatur gloriam a se non curari, nihilque eo affectu esse nocentius, quoad scientiarum incrementa; idque nuper quoque repetiit ea occasione quam nunc dicam.

Nempe Dominus MENCKENIUS, qui non libenter aliquid *Actis Eruditorum* inserit quod Domino TSCHIRNHAUSIO displicere possit, rem eo deduxit, ut is Litteras ad me dederit humanissimas, iisque inseruerit responsionem ad nuperum schediasma tuum * *de Comparatione arcuum parabolicorum*, rogans ut Tibi eam communicare velim. Cur autem hanc Tibi respondendi elegerit rationem, duas attingit rationes; unam, quod si qui gloria ducuntur, qualem Te esse appareat, in publicis concertationibus facillime offendunt, offenduntur que, tum etiam quod apertissime Tibi ostendere possit, erroneam esse Tuam regulam, atque ita Tua interesse eam

* De quo in Epist. LXIII.

eam non prodire. Nam si cum Tua regula conjungatur id quod 1698 Mat.
jam constat, areas Hyperbolicas, secundum progressionem geometricam linearum assumtas, esse æquales, oriri absolutam quadraturam Hyperbolicæ areæ. Addit Te non debuisse spernere eam rationem secandi areas, qua ipse sit usus, licet magis remotam, quoniam per ipsam præstetur aliquid aliud magni momenti, nempe ipsius areæ quadratura, quoties est possibilis. Hoc si verum est, fatebor ego maxima elogia hanc Domini Tschirnhausii methodum mereri. Jam deberem Tibi ipsam responsionem Domini Tschirnhausii communicare, sed cum excerptum tantum ex Epistola sua Tibi mitti jusserit, nec alius commode exscribere recte possit, mihi vero non vacet, differenda in proximas erit hæc communicatio.

Miror jamdudum nihil amplius a Domino *Marchione* Hospitalio ad nos perscribi, spero nec a valetudine adversa, nec ab aliqua erga nos animi mutatione silentium hoc oriri. Videtur autem in amicitia ejus inesse aliquid inæquabilitatis, ut nunc incalescere, nunc refrigerari videatur, nulla manifesta causa.

Vellem esset Tibi amicus *Parisiensis*, per quem discere liceret, quæ illic, præsertim apud Academicos Regios Scientiarum aliosque, non in his geometricis tantum, sed & in aliis, geruntur. Nam Dominus Hospitalius, a quo talia subinde perscribi, vel amicum, qui faciat, parari mihi petii, ab eo commercii genere videtur alienior. Ego vero non arcana peto, sed quæ *Parisiis* nota in vulgus. Nescio an per Dominum Varignonium tale aliquid efficere possis, sed ita ut a me non quæsitum videatur, & ut ipse non nimis ostendas cupiditatis. .... Fortasse tamen & alius extra Academiam satisfaceret liberius.

Si distinctionem inter celeritates recuperatas & recuperandas, qualem feci, attentius consideraris, non inanem reperies. Quod superest vale & Fave: Dabam.

Hanoveræ, 25. Martii 1698.

Deditissimus
G. G. Leibnitius.

EPISTOLA LXIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad Praecedentem.

De controversia Fraterna. *De* TSCHIRNHAUSIO, HOSPITALIO & VARIGNONIO.

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1698 Mart. ACcepi Tuas postremas recte, cum *Fratris* mei admonitione *Diario Gallico* inserta, * quæ jam antea bis mihi fuerat missa, a Domino VARIGNONIO primum, & deinde a Domino *Marchione* HOSPITALIO; gratias tamen ago pro cura Tua. Video maxime *Fratrem* nolle se se arbitrio subjicere; sed aliam rei definiendæ rationem, imo in longum producendæ rationem, quærere & subterfugia; quod forsan causæ suæ timeat, sed non est cur diutius tergiversetur: respondi † enim me non accepturum, quidquid inposterum replicaturus sit, nisi ipse prius oblatum a me Judicem acceperit, aliumve mihi nominaverit: me namque idem de ipsius solutione posse dicere quod ipse de mea; utri tunc publicum plus fidei haberi debeat: ipsine, an mihi? Hanc ergo litem dirimendam esse a tertio. Me sustinere etiamnum Problema in ea extensione sumtum, in qua *Frater* proposuit, a me in *Diario* legitime fuisse solutum: Me tamen non negare, ex festinatione irrepsisse leviusculum aliquem errorem, qui autem ortum suum habeat, non ex falsitate methodi, sed unice ex applicatione non rite instituta; præterquam quod ille lapsus non tangat Problema, prout illud autem a *Fratre* specialiter propositum sit, [hoc enim ut jam

* 1698. 5. Journal du 17. Fevr. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLI pag. 214.
† *Journal des Savans.* 15. Journal du 21. Avril. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLII. pag. 215.

jam monui, plenarie solutum esse] sed tantum quatenus ego ipse universaliter conceptum illud exhibuerim. Quicquid sit, hunc lapsum paucis verbis emendari posse, & revera emendationem in responsione adjeci .... Unde colligi posse methodum ipsam bonam esse, licet in applicatione ad omnes circumstantias non satis adtenderim, & quidem directam invenerim [quod Tibi, ut puto, nondum significavi] quæ mihi eamdem solutionem, quam altera illa indirecta, qua ab initio usus fueram, suppeditaverit: mirumque consensum non solum in hisce, sed etiam in aliis speculationibus detexerit: Me præterea in antecessum posse divinare, quid *Fratri* occasionem dederit credendi se divinaturum Analysim meam; scilicet quod in solutione mentionem fecerim de curvatura lintei a fluido expansi, unde illum conjecturasse me in Analysi usum fuisse consideratione maximi descensus Centri gravitatis in fluidis stagnantibus: sed ipsum falli; me enim, præter hanc viam, quæ dextre adhibita etiam eo porrigatur, possidere etiam directam, quam ille nunquam divinaturus sit: me itaque, ut *Fratrem* decet, *Fratris* commodo consulentem, ipsi suadere ut decertationem oblatam revocet. Sed hæc amplius videbis in ipsa responsione impressa. 1698 Mart.

De Domino La Hirio nihil est quod dicam: valeat ejus Doctrina mathematica non vulgaris, per me licet; modo aliorum quoque apud ipsum valeret, nec tantopere sperneret, quæ ab aliis proveniunt, si displicent; nec statim sibi arrogaret, quæ placent.....

Quod Dominum Tschirnhausium attinet, miror quod Dominus Menckenius schediasma meum de comparatione arcuum Parabolicorum *Actis* inserere noluerit; cum tamen ibi usus fuerim verbis humanissimis & modestissimis, quibus vix efficaciora invenire potuissem ad persuadendum, quanto apud me sit in pretio. Si talia displicent; nihil est quod inposterum placebit, nihilque amplius imprimetur. Non sane verborum meorum acerbitas, [nulla enim fuit] bonum Tschirnhausium urit, sed res ipsa quæ ipsius errores detegit, ipsi est invisa...................... Dicit porro se posse apertissime mihi ostendere, meam regulam esse erroneam, atque ita mea interesse eam non prodire: Terriculamenta sunt, quibus pueros deterreat: mihi vero permittat ut edam,

1698 Mart. aut ipſo invito prodibit......... Aſt facile ſuſpicor, cur ſchediaſma meum ſupprimendum ſuadeat, ne ſcilicet ſua regula pro comparandis arcubus Parabolicis, * quam ipſe pro falſa agnoſcit, tanquam inutili, rejecta, jam ab alio meliorem editam approbare cogatur; imitando vulpem in fabula quæ, neſcio quo infortunio, amiſſa cauda, ſociis perſuadere conabatur, ut pariter caudas amputarent, tanquam impedimentum inutile & indecorum. En hic alterum *ſchediaſma*, † quo fundamentum meæ regulæ explico: rogo ut paulo attentius legas; judicabis deinde, quo jure Dominus TSCHIRNHAUSIUS meam regulam falſitatis accuſet, aut quam aperte, ut jactat, oſtendere mihi poſſit, eam eſſe erroneam. Lectum, Domino MENCKENIO, ſi placet, tranſmitte, cum litteris adjectis; non dubito quin illud jam ſine ſcrupulo ſit *Actis* inſerturus, & vel ideo, quia nulla ibi ſit mentio Domini TSCHIRNHAUSII. Quantum ad ejus rationem ſecandi areas; ſprevi eam, quia remota eſt & magno conatu parum præſtat. Judicare utique debui ex iis quæ vidi. Si præterea aliquid aliud in ſe habet, ſcilicet, ut jactat, modum determinandi areæ quadraturam, quoties eſt poſſibilis; id ego non ſomniavi: oſtendat ergo; tum demum laudabo ejus methodum..................................

Dominus *Marchio* HOSPITALIUS nuper quidem ad me ſcripſit tribus quatuorve lineis, ſed tantum ut mihi mitteret *Fratris* ſchedulam; nihil plane de rebus mathematicis attingens, ut olim facere ſolebat........ Spero quam-optime deſiderio Tuo ſatisfieri poſſe per Dominum VARIGGONIUM, qui mihi multis nominibus obſtrictus eſt, & ſe etiam obſtrictum agnoſcit: nec obſtat quod ipſe ſit membrum Academiæ; tanto enim commodius, quod petis efficere poterit. Vir eſt officioſus & aperti cordis, faciet, ſi poteſt; ſi non poteſt, rationem dicet: prima occaſione hac ſuper re ipſi ſcribam. Vale. Amplitud. Tuæ

Devotiſſimus

J. BERNOULLI.

EPIS-

* *Inſerta Schediaſmati cui Titulus*, Nova & ſingularis Geometriæ promotio circa dimenſiones quantitatum curvarum, *Act. Er.* 1695. Nov. pag. 489. Vel *Joh.* BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XXVIII pag. 149.

† *Inveſtigatio Algebraica arcuum parabolicorum aſſignatam interſe rationem habentium* &c. Act. Erud. 1698. Jun. p. 261. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLIX. p. 242.

EPISTOLA LXX.

LEIBNITIUM AD BERNOULLII.

Responsio ad præcedentem.

De Arcuum Parabolicorum comparatione, & TSCHIRNHAUSII objectionibus. De LA HIRIO. De BIGNONIO & HOSPITALIO.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Litteras Tuas, & perelegans *Schediasma* pro secando arcu Parabolæ, ad Dominum MENCKENIUM misi, & hortatus sum, ut tuo meoque periculo edat, quando nihil in eo est quod Dnum TSCHIRNHAUSIUM nostrum tangat. Quantum mediocri attentione judicare licuit, & recte & pulchre procedis. 1698 Mai.

Hujus autem objectionem jam Tibi mitto, ex litteris ad me excerptam. Misissem citius, nisi oblitus fuissem litteras ejus mecum deferre *Guelfebytum*, ubi ferias & unam alteramve septimanam animi gratia exegi. Nunc reversus officio satisfacio. Examinandi nec otium nec voluntas fuit; præsertim cum alias a Tuis notas assumens, duplicaverit laborem comparationem instituere volenti, quam ipsum absolvere maluissem; ut facile suspicer aliquid ipsum fugisse, sive in calculo, sive in calculi applicatione, cum id ipsi sæpe evenire, ob distractiones, jam sim expertus, & fieri potest ut quas ille diversas habet æquationes, quarum ope arcum incognitum rectificari debere judicat, coincidant in extremo & in identicum aliquid desinant, ut incognita arcum designans postremo, præter opinionem, evanescat; quod in talibus etiam sæpe sum expertus, cum singulares methodos excogitatas in rem contulissem, quibus quadraturæ particulares Hyperbolæ, vel partium Circuli haberi posse videbatur......................

Cæterum de Domini LA HIRII modo agendi secum coram parum

+ *De quo in Epist. præcedente.*

1698 Mas. parum humano, parumque etiam urbano etiam Dominus TSCHIRNHAUSIUS olim apud me querebatur. Ego Dominum LA HIRIUM de facie non novi, sed, quod postea didici, inscius ei obstaculum dedi, nam cum diu id fuisset actum ab ejus amicis, ut in Academiam Scientiarum Regiam reciperetur, me demum a Duce *Brunswicensi* Serenissimo JOHANNE FRIDERICO in *Germaniam* evocato, res confici potuit, quod antea de me retinendo ageretur, eo autem tunc res ob bellum loco essent, ut ipsum pariter & me vocare COLBERTO non placeret. Ego vero libens fateor, Virum, qualis ipse est, industrium in observando atque etiam in delineando utiliorem fuisse ad solitos Academiæ Regiæ labores, quam me qui in varia diffundor, & aptior sum ad consulendum, quam ad laborandum, quem vereor ne ipsi dicturi fuissent, hominem *ignava opera, philosopha sententia*: Ita fata utrique nostrum recte prospexere; præsertim cum ego, non minus quam HUGENIUS, mutationem postea secutam, sublato Nannetensi Edicto interdictaque Religionis libertate, haud dubie fuissem discessu præventurus.

Cæterum nescio quomodo litteræ in *Gallia* declinant, nec mortuis Viris egregiis alii pares succedunt. Sed meliora jam spero studio *Abbatis* BIGNONII, qui PONTCHARTRAINIO est ex sorore nepos, & res Academiæ Scientiarum Regiæ curat. Eum enim puto esse simul bene animatum & intelligentem. In Domino *Marchione* HOSPITALIO aliquid inæqualitatis observo, quod valetudini ejus, an genio adscribendum sit nescio. Vides opinor, quam recte consilio meo usus suppresseris apud ipsum illam nuperam meam tangentium calculi promotionem, cujus quam late pateat usus ipse observasti. Et danda opera est, ut ne suspicetur quidem tale aliquid nobis esse; sed nescio quas alias potius artes indirectas a nobis ad similia conficienda adhiberi arbitretur; ita enim non tam facile ipsi in mentem veniet methodus nostra; quanquam ipsa per se satis sit abstrusa.

Cum credibile sit relationem inter areas ejusdem curvæ, in Conicis cœptam, longius progredi certa serie in altioribus curvis; optandum esset lucem aliquam nobis in hoc genere accendi. Id si posset

possset Dominus TSCHIRNHAUSEN, faceret operæ pretium; 1698
nunc quæ promittit de sectionibus; quæ ubi non succedant, impossibilis sit quadratura; vereor ut sit præstiturus; neque enim satis ea in re video connexionis. Mai.

Singulari nos beneficio obstringet VARIGNONIUS, si quæ in *Gallia* per varias Matheseos partes geruntur significare subinde Tibi velit, ut per Te ad me porro eorum notitia perveniat. Grata mihi erit via Tua directa, pariter & indirecta, omnisque adeo Analysis pro Problematibus Fraternis. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 15. Maii 1698.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

EXCERPTUM.

EX LITTERIS TSCHIRNHAUSIANIS.

8. Martii 1698. Latine versum.

De arcuum parabolicorum comparatione.

P*Rateritis Anni novi nundinis Lipsiensibus*, *Vidi* modum *quo D.* BERNOULLIUS *arcus Parabolicos comparat. Potuissem* ex tempore *respondere*, *quamvis* mediis aulæ occupationibus & diverticulis *distinerer. Sed ne quid* præcipitanter *facerem*, *expectandum decrevi tempus quo* ordinario otio *fruor*, *quod & studiis destinare soleo. Quoniam vero*, *etiamnum mihi eadem mens est*, *ejus* inventum *ad* arcus Parabolicos *inter se* comparandos absolute falsum *esse*, & *praterea ille mihi multa* affingit, *qua nunquam in mentem mihi venerunt*, *primum tam clare demonstrabo*, *ut valeat illud in dubium revocare nemo eorum qui* aliqualem cognitionem in his studiis

TAB.XIV. diis *habent*. Sit (*Fig.* 75.) CFILN Hyperbola æquilatera, cujus asymptoton AM angulum CAO bifariam dividens, dupla AC tanquam latere recto describatur Parabola ARSTV. Notum est vel ab HEURATII tempore, *rectangulum* ex recta CA in curvam AS æquari semper spatio hyperbolico CAQ. Secundo, *notum est pariter*, si duo spatia sint hyperbolica FDGI & LKMN hac ratione in se posita, ut AD sit ad AG, sic AK ad quartam proportionalem AM; spatia hæc fore æqualia, *quod facillime potest* per methodum indivisibilium CAVALERII demonstrari. *Ponatur nunc* arcus parabolicus RS esse æqualis x, & arcus TV, sit, exempli gratia duplus prioris, sit $AB = a = BC$. $AD = b$. $AG = c$. $AK = f$. $AM = g$. Area $=$ K. *

Quandoquidem spatium ex AC in RS, & TV æqualia *sint* spatiis hyperbolicis PFIQ, & NLNO, & ex his spatiis *facile deduci possunt* spatia FDGI, & LKMN, ponamus hæc jam æqualia, & obtinebitur æquatio talis: $f^4 = (bbccff + a^4ff) : cc + akbbccffx : (c^4 - bbcc) - a^4bb : cc$, *in qua* ad determinandam f nihil obstat, quam quantitas x, seu arcus Parabolici mensura. *Sed huic facile remedium est*, nam quia ad determinandas AN & AO, a Domino BERNOULLI æquatio inventa, ubi arcus parabolicus non comprehenditur; ope duarum harum æquationum non solum determinabitur Arcus duplus, sed etiam absoluta mensura arcus Parabolici dati [quia duæ æquationes *Johannis* BERNOULLI, & hæc mea, & duæ hic incognitæ sunt arcus $RS = x$ & $AK = f$] adeoque certo hinc sequitur, vel spatii Hyperbolici mensura hactenus desiderata; vel quod Methodus, quam nobis exhibuit falsa sit, & quia ipse prius negat [quadraturam nimirum Hyperbolæ hinc impetrari] suspicor Calculi lapsum Auctori inanimadversum alicubi hærere, prout expertissimo circa similia facile accidere potest.

Et Methodus a me huc usque adhibita per generalem calculum *facillime* verificari *potest*; nam multiplicando datum arcum *prout libuerit*, *nunquam* intentum geometrice, *obtineri potest*, *absque* quadratura

* Hic manu Celeb. LEIBNITII margini adscripta leguntur hæc verba: *Non potui* valorem K in *Epistola Dn.* TSCHIRNHAUSII, *recte legere*.

dratura hyperbolæ, *nisi quando* arcus æquales desiderantur. *Sed tunc orietur* arcus ab altera Parabolæ parte existens, *quod non* novum inventum *vocari potest* eo respectu *quasi huc-usque incognitum* fuerit. *Attamen novum est* ea ratione, quod *demonstrari possit hoc absque* quadratura Hyperbolæ *haberi non posse ut nunc factum est. Quamvis aliam plane methodum norim* solam naturam curvæ parabolicæ considerando, *nullo ad* Hyperbolam *respectu*, *qua idem* conclusum *obtinetur*, *&* ea ratione credo, me minus intempestive id aliquid novi vocasse: † *Quia mea* Methodus universalis non ejusdem saltem curvæ sed qua quarumvis diversarum curvarum inter se comparandos *arcus*, non absolute *subsistere potest*, *prout mihi affingitur*, *sed nihil aliud indicat*, *nisi quousque res est possibilis aut impossibilis*, *quemadmodum D.* Bernoulli *similiter tentavit in Parabola*, *licet* infelici successu.

Praeterea nullibi unquam dixi quod, secare curvam rectificationis ignotæ & secare spatium curvilineum quadraturæ ignotæ, ejusdem difficultatis res sit: *Non igitur video quam ob causam talia mihi affingantur. Denique non parum miratus sum*, *Dnum.* Bernoullium *sequentia mihi objicere. Nam quamvis ante* Cavallerii *tempora notum sit*, *id quod hanc in rem dicit*, *nempe* Ellipsin per infinitas Ellipses, *& omnia pariter* spatia curva, per curvas ejusdem generis in data ratione *dividi posse*: *Quamvis etiam alicui*, *oculos conjicienti in* Titulum *hujus mei* inventi, *idem in mentem venire posset*, *non tamen arbitror quod*, *si ipse rem omnem ulterius deducat videret has* curvas *inde produci*, *& ut speciatim affertur D.* Gregorii Scoti 62. Propositio, *ejus* Geometriæ universalis, *Dico tamen neminem posse hanc mihi objicere*, *quoniam hac methodo non* curvæ ejusdem gradus *inveniuntur*, *sed* diversæ naturæ, *licet similes*, *nam in* Hyperbola *&* Circulo, curvæ *dari possunt*, *in quibus* indeterminatarum dimensio saltem ad 3 dimensiones ascendit.

Respondet quidem Dnus. Bernoulli, se non videre, quid me permoverit ad indagandum per aliena & remota, quod in ipso statim vestibulo nulli non obvium; *Cum enim in mea Metho-*

† Hic rursus manu Celeb. Leibnitii margini adscripta leguntur sequentia, *Non sat recte intelligo.*

do spatia in data ratione secandi *semper etiam & simul* quadratura spatii, *si possibilis sit habetur, quod notum est per praecedentem methodum obtineri non posse; facile cernitur, quid me ad hoc indagandum permoverit, & id* non cuilibet obvium *esse, sed potius* eruditi Orbis conspectum mereri.

De Circulo *etiam nusquam dixi, illum per* lineas rectas in data ratione secari *posse. Unde sequitur ultima verba non posse me respicere, quod tamen omnes judicabunt* Lectores. *Siquidem ex mea* methodo *clare sequitur, infimam* Curvam Geometricam, *per quam hoc praestari possit*, ad tertium gradum *assurgere; itaque hoc impossibile esse; quod non exiguum* est specimen quanti momenti hæc Methodus *sit, tantoque magis, quod* cuivis curvæ *applicari possit. Hoc erat, quod dixeram me in* Actis *insertarum, quodque Tibi, ut examines communicabo, & ex Tuo responso discam, quid hanc in rem faciendum sit.*

Quoad Cycloïdem, *Tibi mihique jam dudum est cognita ratio qua* singularis proprietas HUGENII *facile demonstrari possit, sicut etiam* PARDIES *publice demonstravit, & in* Actis Anglicanis, *jam dudum, publici juris facta est.*

EPISTOLA LXXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

Responsio ad Objectiones TSCHIRNHAUSII. *De* HOSPITALIO. *De Parabolarum rectificationibus & transformationibus.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1698 Mai. QUamvis non opus sit defendere modum meum secandi arcus parabolicos contra objectionem *Tschirnhausianam*, quippe quem vidisti & approbasti; percurram tamen breviter principaliora hujus objectionis capita, inibique sequentia notabo. . . . .

Calcu-

Calculum quem init, ut Tibi, ita nec mihi, animus fuit ob prolixitatem examinare; præſertim cum etiam Tecum divinare nequeam, qualem valorem per litteram *k* intelligat: examinavi tantum modum procedendi; ubi oppido paralogiſmum detexi evidentem adeo, ut mirer tanto Viro, & vel leviter attendenti, nedum ſerio meditanti, excidere potuiſſe. Supponit enim ad quærendum arcum TV, duplum ipſius RS, debere neceſſario ſpatium hyperbolicum LKMN, correſpondens arcui TV, æquari ſpatio alteri hyperbolico FDGI, correſpondenti arcui RS: At vero unde hæc neceſſitas? Quid, quæſo, me cogit ad ſupponendum potius LKMN æquale ſimplici FDGI, quam cuivis alii multiplici ejuſdem. Adeoque hoc unicum omnibus fidiculis deducere poterit Dominus Tschirnhausius ex ſua objectione, quod nempe ſine quadratura Hyperbolæ, vel rectificatione Parabolæ, inveniri non poſſit arcus TV, qui ſit duplus ipſius RS, & ſimul ut ſpat. Hyperbol. LKMN ſit æquale ſpat. Hyperb. FDGI. Exinde vero quod, ſecundum hanc ultimam conditionem, comparatio arcuum ſit impoſſibilis, male concludit, illam eſſe abſolute impoſſibilem. Peccavit ergo [ut Logici dicunt] argumentando a dicto ſecundum quid, ad dictum ſimpliciter; & quidem, meo judicio, non minus abſurde, ac ſi quis ex eo quod Dominus Tschirnhausius jam non *Romæ* exiſtit, inferre vellet illum plane non exiſtere. Ex dictis ſequitur fruſtra ſperari rectificationem parabolæ ex bonitate methodi meæ; quia illam conditionem LKMN = FDGI, præter neceſſitatem, a Domino Tschirnhausio adjectam non ſupponit; ſed contra potius ſupponit LKMN eſſe duplum FDGI, & generaliter LKMN eſſe totuplum ipſius FDGI, quotuplus arcus TV eſſe debet ipſius RS. Et ſimul mea ex methodo patet, cur hæc ſola ſuppoſitio apta ſit ad præſtandum quæſitum; hæc enim ſola facit, ut *x*, quam Dominus Tschirnhausius pro arcu RS aſſumit, in æquatione finali evaneſcat; atque adeo valor ipſius *f*. Seu quæſita AK proveniat in meris lineis rectis, loco quod in omni alia ſuppoſitione, *x* in æquatione maneat; atque adeo ſine rectificatione hujus arcus *x* valor *f* obtineri non poterit vel poſſit.

1698 Mai.

Non abs re fore puto ſi Dominus Tschirnhausius hanc

1698 Mai. meam ad ipsius paralogismum responsionem communicaveris; ut videat quanto magis e re ipsius fuerit, quam e mea, errorem suum non in lucem prodiisse, & quanto majori jure ego ipsi consulere potuissem suppressionem ejus, quam ille mihi consuluerit, ne methodum meam publicari paterer; atque ut discat post hac modestius judicare de propriis, & æquius de alienis, nec statim manifestæ falsitatis arguere quæ verissima sunt. Sed pergo ad reliqua objectionis illius respondere: Misere itaque hallucinatur, quando ait, „*quod* multiplicando datum arcum *prout libuerit*, *nunquam* intentum geometrice obtineri poterit [ostendi enim semper obtineri posse] sed porro, inquit, *nisi*, *quando* arcus æquales *desiderantur*, *tum enim orietur* arcus ab altera Parabolæ parte existens, *quod non* novum inventum *vocari potest*, eo respectu, *quasi* hucusque *ignotum fuerit*, *sed forsan* novum ea ratione, quod demonstrari *potest*, *id absque* quadratura Hyperbolæ *haberi non posse*, *quemadmodum factum est* “. O elegans inventum, quo scimus duos arcus in Parabola sibi mutuo e regione oppositos esse inter se æquales; sed elegantius longe, quod demonstraverit arcus in ratione inæqualitatis absque quadratura hyperbolæ obtineri non posse! En duo inventa, me hercle! cedro digna. Immediate subjungit; „ *Quamvis aliam plane methodum norim*, solam naturam „ curvæ parabolicæ considerando, *nullo ad* Hyperbolam *respectu*, „ *idem* conclusum obtinendi “. Qualisnam sit hæc altera via equidem scire non cupio, sufficit dixisse, idem per illud conclusum emergere, ut quanti sit æstimanda tuto concludere possimus. Verba quæ sequuntur, cum nulla constructione inter se cohæreant, ut Tu, ita nec ego, probe intelligere possum, videtur tamen Dominum TSCHIRNHAUSIUM innuere velle, se possidere universalem methodum, non hujus, vel alterius saltem curvæ, sed omnium curvarum portiones inter se comparandi, quotiescunque possibile sit; sed vereor ne universalis hæc methodus cum superiori speciali pari passu ambulet. Ridiculum hic est, quod queritur sibi a me affictum esse, quasi dixissem se habere methodum curvæ cujusque portiones absolute comparandi, cum tamen ipse, idem & ibidem, persuadere conetur, se se per suam methodum determinare

nare posse quousque illa comparatio sit possibilis nec-ne; „*sed ni-* 1698
„*hil aliud indicat, nisi quousque res possibilis sit, aut impossibilis.*" Maj.
Quid? Dicere habere methodum rem præstandi quotiescunque possibilis est, & si impossibilis, impossibilitatem demonstrandi, quid hoc aliud est, quam dicere, se habere methodum absolutam & perfectam? Quis enim unquam aliquid impossibile exigit? Rideo quæ modo citatis subjungit, „*quemadmodum Dn.* BERNOUL-„LIUS *tentavit in* Parabola *licet* infelici successu"; festucam in oculo meo quærens, trabem in proprio non animadvertit. Porro dicit, „*Praterea nullibi unquam dixi, quod* secare curvam rectifi-„cationis ignotæ, & secare spatium curvilineum quadraturæ igno-„tæ, ejusdem difficultatis res sit. *Non igitur video quam ob causam* „*talia mihi affingantur*" Miror profecto quod dicat me hoc sibi affinxisse, an-non multa in discursu quæ incidenter obveniunt memoramus, non tamen statim alteri, cum quo nobis res est, affricamus; fateor quidem me dixisse, illa duo non esse ejusdem difficultatis res, sed nego quod dixerim Dominum TSCHIRNHAUSIUM contrarium affirmasse. Quod autem D. TSCHIRNHAUSIUM male habeat, quod vilipenderim ipsius methodum secandi spatia curvilinea, dum ostendi nihil omnino novi, sed rem esse perfacilem, & Lippis & Tonsoribus notam, eamque infinitis modis absolvi posse; sibi imputet, si non pro merito de illa judicavi; ostendat enim quomodo per illam simul quadraturam, si possibilis eruere, vel si impossibilis impossibilitatem ejus exhibere possit; tum pluris æstimabo; sin minus, meliori jure de ea dicere possum *eruditi Orbis conspectum non mereri*, quam quod ipse eisdem verbis de curva mea rectangula, vel potestates inter segmenta rectarum e puncto communi eductarum, faciente æqualia, contemtum suum manifestaverit; quod tamen inventum & Tibi, & aliis, non parvi momenti videbatur.

Tandem ait, „de circulo, *talia nunquam dixi, illum* per lineas „rectas in data ratione *secari posse*": neque ego dixi illum dixisse, sed hoc ipsi proposui, tanquam quod foret alicujus ponderis, si per suam methodum solvere posset; alias nihil novi facturus, si non per rectas, saltem per curvas circuli segmentum secaret.

1698 Mai. Claudunt objectionem hæc verba; „*Quoad* Cycloïdem, *eſt tibi* „*mihique jam dudum cognita ratio* qua ſingularis proprietas HUGENII *facile demonſtrari poſſit*, *ſicut etiam* PARDIES publice „*demonſtravit*, & in *Actis Anglicanis jam dudum publici juris* „*facta eſt*". Sed ſcire velim Dominum TSCHIRNHAUSIUM me meam demonſtrationem non voluiſſe venditare tanquam quid ſingulare vel difficile, ſed contra potius ut, cum facillima ſit, oſtenderem LA HIRII lapſum in re facili tanto turpiorem eſſe. Interim, ſi volet meam demonſtrationem comparare cum illa quam PARDIES publicavit, peſſime agit: nullam enim vidi obſcuriorem, prolixiorem, ſimul & tædioſiorem demonſtrationem, quam *Pardieſianam*; loco quod mea tribus quaſi verbis abſolvitur. Quid in *Actis Anglicanis* hac de re prodierit, nunquam vidi.

Dominus *Marchio* HOSPITALIUS ſuſpicatur utique novam nos poſſidere Calculi promotionem; idque ſuſpicandi anſam habuit, ex eo quod ipſi dixerim nos Problemata illa, quæ pronuper in *Diario Gallico* propoſui, etiam pro curvis diſſimilibus, & quidem generaliter ſolvere poſſe. Ex litteris ejus ſatis colligo, quod hæc ipſi ſalivam moverint, non tamen petere audet; ego vero diſſimulo, quaſi non perciperem quo collimaret.

Cum non ſuppetat tempus excerpendi, en ipſas Litteras VARIGNONII, cum adjunctis ſchedulis. Litteras remittes, reliquis non indigeo. . . . . An relatio inter areas ejuſdem curvæ in Conicis cepta longius progrediatur, nondum mihi videre contigit. Interim modus meus comparandi arcus parabolicos etiam ad alias curvas extenditur; exempli gratia, ad Parabolam cubico-biquadraticam, $ax^3 = y^4$. Notavi præterea curioſam proprietatem circa hanc Parabolam $ax^3 = y^4$, & Parabolam communem $ax = yy$: nempe neutra quidem exiſtente rectificabili, poſſunt tamen ſimul ſumptæ rectificari. † Optarem ut aliquis modum generalem traderet ad datam curvam algebraïcam, irrectificabilem inveniendi aliam curvam algebraïcam, quæ ſimul rectificari poſſent; habeo quidem talem modum, qui in plurimis ſuccedit; quemque ſi Dominus TSCHIRN-

† *Vid.* Act. Er. 1698. Oct. pag. 462. *vel* Opp. Tom. I. N°. LI. pag. 249. item Tom. IV. N°. CLXIV. pag. 95.

CHIRNHAUSIUS haberet pro universali deprædicaret; Ego vero nonnisi specialem agnosco. Denique habeo modum omnes Parabolas & Hyperbolas, cujuscunque gradus, ut & innumeras alias curvas algebraïcas, transformandi in alias alterius generis curvas ejusdem cum ipsis longitudinis, † nec non reducendi quamplurimas quadraturas ad extensionem curvarum algebraïcarum; Sed pro his aliisve similibus desiderarem methodum universalem. Vale. 1698 Mai.

Amplitudini Tuæ

Groningæ 31. Maii 1698.

Addictissimus

J. BERNOULLI

† Opp. Tom. IV. N°. CLXIV. pag. 92.

EPISTOLA LXXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De TSCHIRNHAUSIO. *De Oinometro quodam. De Barometro portatili. De Astronomiæ & Geographiæ progressu apud Gallos. De Tautochronismo Cycloïdis. De artium descriptione, & libello* MARIOTTI *huc pertinente. De infinito & variis infinitorum ordinibus.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Mirum est Dominum TSCHIRNHAUSIUM in talem paralogismum incidere potuisse, qualem indicas. Multi spernunt vulgarem Logicam, & tamen plerumque paralogismi committuntur peccando in præcepta Logicorum. Faxo ut de responsione tua certior fiat, tametsi ex schediasmate tuo novissimo, [siquidem id 1698 Jun.

Dominus

1698 Jun. Dominus MENCKENIUS, ut ſpero, edet] ipſe ſatis ſit errorem ſuum percepturus. Vellem etiam agnoſceret candide, nec dum de eo deſpero.

Gratias ago pro communicatione VARIGNONIANÆ Epiſtolæ, quam remitto; Deſiderem deſcribi nonnihil diſtinctius, ſaltem verbis [ſi figura commode non poteſt] fundamentum machinulæ, qua artifex quidem æſtimare ſe poſſe putat, quantum ex dolio ſit emiſſum. Mihi hæc ſcribenti modus aliquis in mentem venit, ſed oportet ut inſtrumentum in dolium immittatur initio, cum liquorem ſuum accepit, & ab eo tempore ibi hæreat. Nempe pondere liquoris inſtrumentum, aut in eo contentus aër comprimetur; liquoris autem parte detracta, laxabit ſe rurſus inſtrumentum. Quod ſi artificio tali conſtructum ſit, ut tam progreſſus, quam regreſſus diſtinctim animadverti poſſit, ope forte dentium ſingulariter; non turbabitur æſtimatio, etiam reimmiſſione, dicique poterit, quantum ablatum, quantum redditum ponderis. Gravitas tamen ſpecifica liquoris hinc agnoſci nequit, ſed mutatio tantum ponderis columnarum. Hactenus ergo præſtari deſideratum poteſt, ſed neſcio an magno fructu; cum etiam in vaſis amplioribus non ſit notabilis variatio altitudinis, multo licet liquore exhauſto. Alium uſum habere poſſet talis machinula, fortaſſe pro Barometro portatili, quale olim animo concepi; nam integra noſtra athmoſphæra dolii inſtar ſe habet. Volebam autem adhiberi folliculum clauſum, qui & comprimeretur & dilataret ſe ſe, pro pondere aeris aucto, vel diminuto. Nomen etiam horologiarii illius *Galli* † diſcere non ingratum erit.

Interroga, quæſo, Dominum VARIGNONIUM de progreſſu Aſtronomiæ apud ipſos, & præſertim quouſque producta ſit methodus calculandi Eclipſes, & an Dnus LA HIRIUS ſuas Tabulas abſolverit, & quid ſentiatur de lineis quas Dnus. CASSINUS voluit ſubſtituere Eclipſibus *Keplerianis*, quarum tamen novarum linea-

† *Hujus ſcilicet, qui* Oinometrum *invenit, quod* VARIGNONIUS *cum* BERNOULLIO *communicavit. Hujus nomen* LANGLOIS Vid. Epiſt. LXXVI, LXXVIII., & LXXX.

linearum caufas Phyfico-mathematicas dare difficile erit, quas nobis utique facilius præbent Ellipfes. 1698 Jun.

Memini & HUGENIUM olim demonftrationem Tautochronifmi Cycloïdis *Pardiefianam* non magni facere. Ea, quæ in *Tranfactionibus Anglicanis* olim a me vifa potius eft quam examinata, Vice-Comitis BROUNKERI erat, de qua judicat HUGENIUS, ob nimiam brevitatem fupponi quædam, nec fatis abfolvi demonftrationem, etfi infint argumenta unde abfolvi ipfa poffit. Tua ratio demonftrandi mihi videtur perelegans & commendanda imprimis.

Quæri etiam ex Domino VARIGNONIO utile erit, quo fit loco emendatio Geographiæ, & annon aliquis refponderit, aut refponfurus fit VALLEMONTIO [Auctori libri *de virgula divinatoria*] qui nuper in *Elementis Hiftoriæ* agens de Geographia, *Ifaaci*que VOSSII fecutus fententias, impugnat novam Geographiam, & præfertim correctiones, quas dedit Academia Scientiarum Regia; male quidem, cum illo, improbans ufum obfervationis Eclipfium Lunæ aut Satellitum Jovis pro conftituendis locorum longitudinibus, alia tamen fortaffe monens notatu digna. Nam VOSSIUS, quem fequitur, erat in Geographia valde verfatus, habueratque in manu itineraria focietatis Indicæ Batavæ, & varia etiam Hodoeporica aut Diaria Itinerum Anglicana nondum edita, quemadmodum mihi BOYLIUS olim confirmavit. Accepi etiam SAMSONIUM, doctum apud *Gallos* Geographum, Tabulis ex Academiæ Regiæ fententia concinnatis contradicere. Ego non dubito præferre judicium Academiæ in rebus primariis; puto tamen inventorum VOSSII & SAMSONII aliquam fortaffe rationem alicubi habendam. CASSINUS alicubi dixit, Regem mififfe Aftronomos *Alexandriam*, ut Obfervationes illic inftituant comparandas cum obfervationibus PTOLEMÆI. Scire oportet operæ pretium effet, quid illi attulerint.

Dominus *Abbas* BIGNONIUS collegium quoddam inftitui curavit, cujus membra occupantur defcriptionibus variorum opificiorum; quod ego inftitutum perutile effe judico, & noffe velim quem habuerit progreffum. Vel fola defcriptio manuficiorum ad rem veftiariam pertinentium rem mathematicam plurimum augeret.

1698 Jun. Conſcripſerat olim Dominus MARIOTTUS libellum mechanicum in uſum Ingeniariorum, in quo proponebat experimenta ad praxim utilia; verbi gratia, quantum pondus ſuſtineant tigna, ſcalæ, ſaxa, aliaque id genus. Libellus iſte nunquam fuit editus, quod Auctor morte præventus eſſet; non dubito tamen quin in nonnullorum verſetur manibus. Si poſſet impetrari, ego libenter ſumptus perſolverem.

Optime facis, & ex condigno, quod novam differentiandi rationem per ſummas differentiuncularum premis, quod ſi forte urgeat Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS, poteris eum remittere ad me. Miror eum tam inæquali ratione cum amicis agere, ut nunc magni eos facere, nunc eorum oblviviſci videatur. Dominum *Fratrem* Tuum præſtat ad alia potius quærenda adhuc flecti; nam ſi detegeret, fortaſſe ſtatim in lucem protruderet, ut fecit in Methodo directa pro lineis maximum præſtantibus, quam alias fortaſſe nondum noſſet Dnus. HOSPITALIUS.

In Dno. VARIGNONIO laudandum eſt, quod agnoſcere videtur quantum Tibi debeat, officiiſque id teſtari pergit.......
.... Agnoſco ex ejus reſponſione, Te quædam ad ipſum ſcripſiſſe profunda & ingenioſa de corporibus varie infinitis. Videor mihi intelligere mentem Tuam, ſæpeque de iſtis deliberavi, ſed nondum tamen adhuc pronuntiare audeo. Fortaſſe infinita, quæ concipimus, & infinite parva imaginaria ſunt; ſed apta ad determinanda realia, ut radices quoque imaginariæ facere ſolent. Sunt iſta in rationibus idealibus, quibus velut legibus res reguntur, etſi in materiæ partibus non ſint. Quod ſi ſtatuimus lineas reales infinite parvas, conſequitur etiam ſtatuendas eſſe rectas utrimque terminatas, quæ tamen ſint ad noſtras ordinarias, ut infinitum ad finitum; quo poſito, ſequitur eſſe punctum in ſpatio, ad quod hinc nullo unquam tempore aſſignabili per motum æquabilem perveniri poſſit; oportebitque ſimiliter concipere tempus utrimque terminatum, quod tamen ſit infinitum, atque adeo dari quoddam genus æternitatis, ut ſic dicam, terminatæ; ſive poſſe aliquem vivere ita ut nullo unquam aſſignabili annorum numero moriatur, & tamen aliquando moriatur; quæ omnia ego, niſi indubitatis demonſtrationibus coactus

coactus, admittere non ausim. Reale infinitum fortasse est ipsum absolutum, quod non ex partibus conflatur, sed partes habentia, eminenti ratione, & velut gradu perfectionis comprehendit. Si daretur aliquid perfecte rigidum, & perfecte æquabile, haberentur sane, quæ nos concipimus in nostra Geometria; sed vereor ut natura hæc patiatur. 1698 Jul.

Interim laudo ingenii Tui vim ad abstrusissima eruenda promtam. Si quando colloqui dabitur, fortasse multa adhuc mira circa rerum summam & principia a me audies, quæ habeo pro demonstratis. Nunc Vale & Fave. Dabam Hanoveræ.

7. Junii 1698.

Deditissimus.

G. G. Leibnitius.

EPISTOLA LXXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Vinometro duplici ratione conficiendo. De Thermometris calorem præteritum indicantibus. De Geographia. De Tschirnhausio *&* Menckenio. *Solutionum suarum Problematis Isoperimetrici communicatio. De infinitorum ordinibus. De ejusdem corporis resurrectione controversia. De itinere suo in Bataviam. De* Voldeco. *De Logogripho* Hugeniano, *ejusque Cosinotheoro.*

Vir Amplissime & Celeberrime! Fautor Honoratissime!

POstremas Tuas accepi, cum nuper in *Batavis* essem, ad quos animi gratiâ trajeceram, ut ibi partem feriarum transigerem. Placet modus, quem excogitasti, parandi Vinometrum per elasticitatem aëris; sed nescio an in praxi tam utile esset, quam in theoria ingeniosum; quomodo enim dentes adaptares instrumento, ut

1698 Jul. laxationes & conſtitutiones aëris oſtenderet? præterquam quod, ut ipſe animadvertis, multo liquore detracto, columnarum altitudo notabiliter non minuitur. Hoc cum legerem, ſtatim mentem ſubiit, an non melius intentum obtinere liceret, ope phialarum liquore ſemi-plenarum, quibus BOYLÆUS, ni fallor, primus oſtendere ſolebat preſſionem columnarum. Ita ergo phialæ exempli gratia, (*Fig.* 76.) quatuor A, B, C, D, parari poſſent, ut, dolio exiſtente pleno, omnes demerſæ hærerent in fundo, detracto vero liquore, exempli gratia uſque ad $\alpha\alpha$, tunc phiala prima A [aëre in illa, ob diminutum pondus columnæ, ſe ſe expandente & liquorem per orificium apertum expellente] jam levior facta, furſum peteret, reliquis B, C, D, ob gravitatem adhucdum præpollentem in fundo manentibus; ſin autem porro liquor ex dolio emitteretur ad $\beta\beta$, tunc B aſcenderet; ſic ſubſidente ad $\gamma\gamma$, emergeret C, & tandem ubi ad $\delta\delta$ perventum eſſet, emitteretur D. Redimpleto dolio phialæ in ſuperioribus natabunt, nec fundum repetent, niſi vi eo detrudantur. Pronunciaturus itaque quantum liquoris ante redimpletionem fuerit exemtum, reſpicerem tantum ad numerum phialarum in ſummo natantium; Exempli gratia, A, B, C, unde concluderem tantum ad minimum fuiſſe exhauſtum, quantum continetur in ſpatio $\gamma S \gamma$. Interim quo minores eſſent differentiæ columnarum cum quibus phialæ ſunt æquilibratæ, & quo plures eſſent talium phialarum, eo accuratius detracti quantitatem explorare poſſemus. Poſtea alii modi idem præſtandi, ſine elaſticitate aëris, mihi inciderunt, e quibus duos hic apponam, qui effectu faciles mihi videntur.

TAB. XIV. (beside "gratia, (Fig. 76.)")

TAB. XIV. Concipe (*Fig.* 77.) tubum recurvum A, ab utraque parte apertum, & liquore plenum, ita immitti in dolium plenum, ut orificium cruris brevioris pertingat, exempli gratia, ad ſuperficiem imaginariam $\alpha\alpha$: jam finge detrahi aliquid liquoris ex dolio; patet utique, quod quamdiu orificium cruris brevioris intra liquorem latet, tamdiu totus tubus plenus manebit, ſed ſtatim ac liquoris ſuperficies intra orificium ſeu intra ſuperficiem imaginariam $\alpha\alpha$, ſubſiderit; tunc omnis liquor, qui in eminenti parte tubi exiſtit, per crus longius deſcendet, aëre in ejus locum per crus brevius ſuccedente;

te; qui aër, licet dolium postea omnem suum liquorem ad summitatem usque resumat, cum neutrorsum evadere possit, in tubo manere cogitur: hinc si plures tales tubos recurvos A, B, C, D, quorum orificia crurum breviorum gradatim ascendant, in dolium immiseris; poteris iterum judicare, ex numero tuborum aërem continentium, quousque dolium depletum fuerit; vel si malueris loco tot tuborum assumere unicum tubum rectum FE instructum pluribus ramulis inflexis *a*, *b*, *c*, *d* per minima intervallula a se distantibus, eundem usum obtinebis. Illi enim ramuli, qui semel a liquore evacuati sunt, post redimpletionem dolii, retinebunt in flexuris suis ampullas aëreas. Infimus ergo ramulus, tali ampulla conspicuus, indicabit quousque dolium fuerit exhaustum. *1698 Jul.*

Ecce jam alterum instrumentum, quod mihi in mentem venit. AB, (*Fig.* 78.) tubus est utrinque apertus, multos habens varices, seu tumores excavatos, æmulantes venarum valvulas, quem liquore plenum, [poterit autem facile impleri si invertatur & obturato A per B. infundatur], immitto in dolium liquore pariter plenum. Jam, si tantum liquoris ex dolio effluxerit, ut ejus superficies subsiderit ad *αα*, adeoque etiam omnis liquor, qui in parte tubi eminente A *b c* extitit, descenderit, illamque totam cavitatem aër succedens impleverit; manifestum utique est, ob affusum novum liquorem, quo dolium redimpletur, totum quidem tubum AB etiam redimpletum iri, relictis tamen aëre plenis omnibus illis varicibus, qui supra *αα* existunt; cum enim varicum convexitates sursum spectant, aër qui semel in illos se recepit a liquore amplius expelli nequit. Ergo & hoc modo infimi varices *b*, *c*, aërem continentes, monstrabunt quousque dolium fuerit evacuatum. TAB. XIV.

Hujusmodi Tubus varicosus etiam alibi usum obtinere potest, exempli gratia, ad Thermometra conficienda, quæ non solum præsentem aëris temperiem, sed etiam præteritam ostenderent, & simul limites caloris & frigoris. Ut si observator medio Aprilis [quo tempore, ceu notum, aëris temperies maxime variabilis] certo quodam die explorare vellet maximum & minimum gradum caloris aëris, seu quantum aër mutari potuerit intrà 24 horas; certe continua observatio 24 horas durans, tædiosissima esset; imo etiam

 inuti-

1698 Jul. inutilis, quia experientia docet præsentia hominum, eorum scilicet halitu & continua transpiratione insensibili, aërem ambientem alterari, ideoque liquorem in Thermometro plus justo descendere. Huic igitur duplici incommodo remederi licet, si duo nobis comparemus thermometra, ordinariis similia, excepto quod habeant tubos varicosos, unius varicibus sursum (*Fig.* 79.) & alterius varicibus deorsum (*Fig.* 80.) spectantibus. Illud enim (*Fig.* 79.) observatori, licet per totum diem absenti, & sub finem tantum diei observatum redeunti, ostendet maximum descensum liquoris, id est maximum gradum caloris, quem aër illo die habuit; id quod arguere poterit ex infimis varicibus *a*, *b*, aërem includentibus: alterum vero (*Fig.* 80,) determinabit maximum ascensum liquoris, seu maximum gradum frigoris varicibus nempe summis *c*, *d*; pauxillum liquoris retinentibus. Dum hæc scribo video non opus esse duobus thermometris, unum enim utrumque præstare poterit, si nempe constet tubo contrarios habente varices, ut heic delineatum vide (*Fig.* 81.) Cæterum, hoc modo explorare possemus limites intensissimi frigoris & ferventissimi æstus totius anni; sed talis eligendus esset liquor, qui in varicibus *c*, *d*, ob modicam quantitatem non exsiccaretur.

TAB. XIV.

Quæ me ex Dno. VARIGNONIO quærere jubes, curabo diligenter, ut ad notitiam perveniant Tuam. Ego etiam legi, quæ VALLEMONTIUS de Geographicis habet, videtur ideo imprimis impugnare correctiones Academiæ scientiarum, ut tanto liberius depectere possit, suum popularem DE FER, cujus Tabulas istis correctionibus fundatas [ut ait] turpiter traducit. Maximum argumentum quo nititur, est quod dicit, longitudinum differentias per Eclipses determinatas semper justo minores esse, teste experientia, quam refert de certamine *Hispanorum* & *Portugallorum*, quorum utrique *Japoniam*, aliasque regiones circa *lineam demarcationis* sitas, in suum Hemisphærium, à Papa utrisque assignatum, transtulerunt Eclipsibus nixi.

Gaudeo meam rationem demonstrandi Tautochronismum *Hugenianum* * Tibi placere: scire vellem an lucem viderit, aut quid de

* Act. Erud. 1698. Jun. pag. 267. vel Opp. Tom. I. N°. XLIV. pag. 248.

de ea fecerit Menckenius: si suppresserit, per me licet, modo id non fecisset suasore Tschirnhausio: hunc enim pro Judice meo non agnosco. Miror sane Dnum Menckenium tantum deferre huic Viro ad lapsum adeo proclivi, ut propterea aliorum inventa nihili habeat. 1698 Jul.

Si Dnum Hospitalium novam differentiandi rationem denuo forte postulantem ad Te remisero, quid quæso ipsi responsurus es? Proposui * *Fratri* meo, aut potius *Non nemini* ficto, hujusmodi Problemata, ut par pari referam, & ille videret, se non solum tam mirabilia & tam inaudita Problemata proponere posse.

Ecce hic methodum meam, tum directam quam indirectam †; examina quæso attente utramque, nunquam enim desistam provocare ad Tuam sententiam. Videbis me uti ellipticula, prout initio conceperam: Asserva, rogo, schediasma, ut, si forte opus fuerit, *Lipsiam* id mittere possis, *Actis* inserendum: Divinare me hercle non possum, quid *Frater* in meis solutionibus sit cavillaturus, consensu duarum Methodorum tam egregie confirmatis, oportet sane ut ejus solutiones, si a meis abludunt, potius sint falsæ, sed Tu ipse optime judicabis.

Prope satis accessisti ad mentem meam de varietate infinitorum; nec ego infinitos infinitorum gradus pro certo asserui; sed conjecturas tantum addixi, quibus rem possibilem & probabilem esse statui. Et quidem rationem præcipuam hujus esse, quod nulla sit ratio, cur Deus hunc tantum infinitatis gradum, seu hoc quantitatum genus, quæ nostra faciunt objecta, nostroque intellectui proportionata, voluisset existere; cum tamen facile concipere possim, in minimo pulvisculo posse existere Mundum, in quo omnia proportionata sunt huic magno, & contra nostrum mundum nihil aliud esse quam pulvisculum alius infinities majoris; atque conceptum continuari possit, ascendendo & descendendo, sine fine: unde nostrum genus quantitatum unicum tantum ex infinitis gradibus efficere; nihil autem esse, quod mihi persuadeat hunc potius debuisse existe-

* Journal des Savans 1698. 25. Journ. du 21. Avr. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLII. pag. 220.

† *Mem. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris.* 1706. pag. 235. vel Opp. Tom. I. N°. LXXV, pag. 424.

1698 Jul. existere quam alium; quicquid enim afferri potest, illud applicabile foret ad quemvis alium gradum. Ita si, exempli gratia, concipiam in globulo aëreo mundum formatum, partes habentem nostris hisce proportionatas, Solem, Stellas, Planetas, Terram cum suis incolis, omnesque cæteras quantitates eadem ratione; nempe quod nobis tempusculum unius secundi est, illis foret series multorum seculorum, & ita de aliis. Interim hos homines iisdem argumentis uti posse ad probandos se solos esse, suum mundum infinitum esse, nihil extra se existere. Sed abrumpo, plures paginæ mihi non sufficerent, si deliria mea suavia, quibus interdum per infinitates illas velificor, hic omnia recensere vellem. Cavebo tamen mihi, ne talia tangam apud Theologos quosdam hujus Civitatis, omnium libere philosophantium osores; haud dubie me ad rogum ablegarent, si tantas hæreses à me audirent: ut nuper fere mihi accidit in Disputatione Philosophica publice ventilata; ubi cum incidenter quæstio moveretur de statu corporum nostrorum post resurrectionem, & ego dicerem, eodem numerò corpora non resurrectura, quia durante vita singulis momentis alterentur, ita ut forte Corpus nostrum minimam nunc partem substantiæ habeat ejus, quam ante annum habuit; unde impossibile esse nos resurrecturos, cum omni illa substantia, quæ olim, successive, nostrum corpus composuerit; nisi velimus statuere Giganteam molem tunc nos habituros. Quid autem fit! Pastorculus quidam, cui vox est prætereaque nihil, bruto zelo animatus, subito contra me insurgere, meamque sententiam protinus criminari, exagitare, explodere, & ut Orthodoxæ Religioni adversantem damnare & execrari; præterea in Philosophos novatores [ut vocat] tam inepte, tam insulse debacchari, ut illum phræneticum catenis ligandum dixisses, si vidisses. Nec hoc sufficit, Urbem totam rumore implet, me esse Socinianum, me docere novam creationem novorum corporum in Resurrectione, & nescio quot alias ineptias mihi imputat, quæ nunquam in mentem mihi venerunt; reliquis interim Theologastris undique concurrentibus, seque mutuo fideliter succurrentibus. Subsequenti Dominica, suggestus omnes ad Populum resonabant, intonantes horribiliter contra Philosophos seductores studiosæ Juventutis,

tutis, [ita nos traducunt] & ſubverſores revelatæ veritatis. Nec- 1698
dum quieſcunt, aperte, & clanculum contra me machinantur quid- Jul.
quid poſſunt; mugit adhuc ſurdus tonitrus, perderent me, ſi per illos ſtaret. Sed *vanæ ſine viribus iræ*; irrideo eorum imbecilles conatus, mecumque rident quicunque ſolidiori judicio pollent: ſunt etiam Theologi ſanioris mentis & profundioris eruditionis, qui ſuorum Collegarum cæcum impetum maxime improbant; habeo etiam ſuperioris ordinis Patronos, qui meas ſuſtinent partes: unde nihil mihi timeo; interim magna cum confuſione Theologaſtrorum,

. . . . . Superi riſere diuque
Hæc fuit in toto notiſſima fabula cælo.

Cum nuper *Leidæ* tranſirem, Volderum conveni ſæpius, iſque me ſemel ad prandium invitavit; ubi etiam aliorum aliquorum Profeſſorum *Leidenſium* notitiam & familiaritatem nactus. Intererat convivio Dnus. De Blyswick *Delphenſium* Conſul, & Academiæ *Leidenſis* Curator, Vir affabilis & generoſus, bonorumque ſtudiorum inſignis amator & Mœcenas; qui a Te ſubinde litteras accipere mihi dixit: magni Te æſtimat, ſuaque officia ultro mihi obtulit, ſi quondam occaſio dabitur. Vidi præterea illum aliquoties apud alios Profeſſores; ſenſi illum ſummum eſſe Tui admiratorem. Volderus ſub diſceſſum meum proponebat mihi difficultatem contra Calculum infinitorum, quam ſibi ſe eximere non poſſe, neque à Nieuwentitio, cui dudum eamdem propoſuerat, hactenus enodationem accepiſſe rebatur; rogans ut ego ſibi ſuper hac re ſatisfacerem; quod etiam libenter promiſi, me ſcilicet ſatisfacturum, ſtatim ac huc redux factus eſſem, & revera nudius tertius ſolutionem ipſi miſi. Intellexi quoque quod à Papini parte ſtet circa æſtimationem virium; dicens a Te gratis ſupponi corporum elaſticitatem; hanc enim corporibus tantùm eſſe accidentalem: ſi corpora perfecte dura ſupponantur, Tua ratiocinia amplius locum non habere; duritie perfecta ſuppoſita, ſequi, exempli gratia, quod duo corpora æqualia, & æquali celeritate ſibi mutuo centraliter concurrentia, non debeant reflecti, ſed ſiſti in ipſo momento occurſus; & quod generaliter corpora duo perfecte dura, cujuſcunque molis & cujuſcunque celeritatis, poſt conflictum

1698 Jul. ctum ſeparari non debeant; quia ſeparatio proveniat ab elaſticitate, quam autem ſeponendam dixit. Ego vero, cum temporis anguſtia non permiſerit illum ab opinione ſua deflectere, hactenus ipſi promiſi copiam excerptorum ex litteris Tuis meiſque, hac de materia agentibus, ut videat quid me impulerit ad amplectendum Tuas partes. *Hagæ-Comitum* vidi Dominum DIERQUENS, Præſidem in *Curia Brabantiæ*: etiam hic multa civilitate me affecit. Dominus BELLAVALLIUS mihi oſtendit Logogryphum aliquod, ſibi a Dno. HUGENIO, dum viveret, depoſitum, ſuo tempore clavem miſſuro: morte autem occupatus id non præſtitit. Dnus. DIERQUENS, & ego ipſi conſuluimus, ut ederet quale accepiſſet. Nactus ſum *Hagæ Coſmotheoron* HUGENII recenter prælo enixum. Vale & fave.

Groningæ 5. Julii. 1698.

Amplitudini Tuæ Devotiſſimus

BERNOULLI.

EPISTOLA LXXIV.

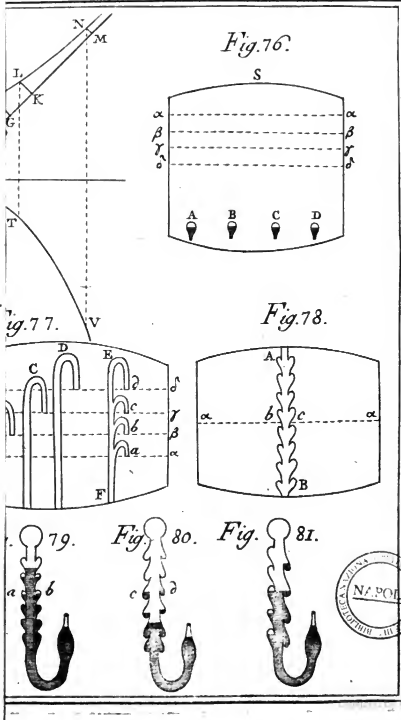
LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Reſponſio ad præcedentem.

Præcedentem Epiſtolam amiſſam nunciat. De VOLDERO. *De Materiæ natura. De infinito. De* HUGENII *Poſthumis. De Geographia.*

Vir celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

1698 Jul. A deprecatione, [quod mireris] cogor incipere litteras. Infelicitate quadam ſingulari, non ſine culpa tamen mea, Tuæ noviſſimæ periere. Cum acciperem, in eo eram ut *Herrenhuſam* irem, ubi Aula noſtra eſt extra urbem, quod altera die ſummo mane diſceſſura eſſet Electrix *Brandeburgica*, Aulaque *Cellenſis*. Tuas igitur obiter inſpectas mecum ſumo, lecturus in itinere. Forte ſuperve-


N
M
L
K
G
T
V
Fig. 76.
S
α
β
γ
δ
A
B
C
D
ig. 7 7.
C
D
E
δ
c
γ
b
β
a
α
F
Fig. 78.
A
α
b
c
B
79.
a
b
Fig.
80.
c
∂
Fig.
81.

pervenere, quæ alio verterent mentem; ſub noctem reverſus recordatuſque requiro, & magna cum perturbatione nuſquam reperio. Quæſivi anxie, præmium etiam reperturo ſponderi juſſi; hactenus fruſtra. Oportet ſacculo excidiſſe, qui togæ aſſutus eſt; forte dum egredior, ingrediorve currum. Cum igitur nihil aliud relictum ſit mihi, quam ut ad veniam a Te petendam recurram; pro gratiæ factæ indicio habebo, ſi denuo ad me redeant, quæ amiſi. Schediaſma enim Tuum ſolutionem Fraterni Problematis complexum, videram, non legeram; ſed & quæ de machinulis Barometris, occaſione Oenometri *Pariſini* meæque deſignationis, diſſerebas, inſpecta magis fuere, quam lecta, quod figurarum conſideratione eſſet opus. 1698 Jul.

Gaudeo innotuiſſe Tibi Dominum de Bleswick, Conſulem *Delphenſem* & Curatorem *Leidenſis* Academiæ, Virum præclarum. Quod Dnus. Volderus de Calculo differentiali dubitat, magis miror, quam quod de virium æſtimatione a nobis diſſentit. Ego ipſe olim adoleſcens, cum de Legibus motus ſcriberem Libellum, in ea eram ſententia, quæ nunc eſt Dni. Volderi, duo Corpora æqualia & æquivelocia ſua natura poſt concurſum directum non debere reflecti, ſed potius ſe ſiſtere mutuo. Idque etiam ſequitur ex vulgari notione materiæ, cum nempe nihil aliud in ea concipitur, quam extenſio & ἀντιτυπία ſeu impenetrabilitas. Sed, ex his ipſis & ſimilibus, poſtea agnovi longe aliam eſſe naturam materiæ in ſyſtema mundi redactæ quam vulgo creditur; & vim elaſticam omni corpori eſſe eſſentialem, non ita quaſi ea vis ſit aliqua qualitas inexplicabilis, ſed ex eo quod omne corpus, utcumque parvum, eſt machina, ex cujus ſtructura reſilitionem, ubi opus ea eſt ad virium conſervationem, oriri oportet. Hæc autem mira videri non debent conſideranti actualem cujuſque materiæ partis diviſionem in partes omnem numerum excedentes. Hæc an, cum multa a me ſalute, Dno. Voldero ſignificare velis, in Tua eſt manu. De cætero rem gratam facies, ſi communicabis quæ Dno Voldero ſcripſiſti, ſcribesve, aut ab illo recipies.

Mirum non eſt Dnum. Nieuwentiit ipſi non ſatisfeciſſe circa Calculum differentialem, quem ab eo ipſo non ſatis profunde

1698 Jul. penetratum constat. Cujus rei indicium fuit, quod nihil de suo potuit præstare; an nunc magis profecerit, res docebit.

Si Dnum. *Marchionem* HOSPITALIUM novam Methodum differentiandi postulantem, ut æquum est, ad me remittas, isque, quod vix facturum credo, apud me pulset, deliberandi adhuc locus erit.

Ex actuali divisione sequitur, in quantulacunque parte materiæ, velut mundum esse quemdam constantem ex innumeris creaturis; sed illud adhuc quæritur an ulla usquam portio detur materiæ, quæ ad aliam portionem habeat rationem inassignabilem, seu an detur linea recta utrinque terminata, sed quæ tamen ad aliam rectam habeat rationem infinitam, vel infinite parvam. In Calculo hæc utiliter assumimus; sed hinc non sequitur extare posse in natura. Res igitur altioris est indaginis.

Nihil ne apud *Batavos* intellexisti de edendis *Posthumis* quibusdam elaborationibus *Hugenianis*, præsertim *Cosmotheoro* per sidera ambulante, quem absolutum aut pene absolutum acceperam; itemque de *Dioptrica* dudum promissa.

Gratissima aliquando erunt, quæ, ut spero, ad Quæstiones meas, Te parario, respondebit VARIGNONIUS. Ego quidem *Isaaco* VOSSIO & VALLEMONTIO longitudinum determinationem per Eclipsium observationes factam impugnantibus minime omnium assentior; fieri tamen potest, ut ab Observatoribus ad loca remota tendentibus errores graves subinde sint admissi, & memini *Anglos* fidem derogare Observationibus quibusdam Jesuitarum *Gallorum* ad *Siamense* regnum ante annos aliquot tendentium. Talia ergo cum sint facti, diligentem merentur discussionem. Quod superest Vale & Fave.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{12}{22}$ Julii 1698.

Deditissimus
G. G. LEIBNITIUS.

Responsio ad hanc Epistolam deest.

EPIS-

EPISTOLA LXXV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Continet Responsionem ad Epist. LXXIII.

De virium conservatione. De infinitorum natura difficultas. An infinitæ quantitates dentur. De Oenometro. De Tschirnhausio. *De Isoperimetris. De signis algebraïcis. De linea brevissima in superficie curva.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Doleo me causam Tibi fuisse innocentem laboris ingrati; sperabam ab alio describi posse, quod iterum mitteres. Cum nemo hic curiositates valde curet, credo ad me rediissent litteræ, nisi fuissent conculcatæ aut dilaceratæ. 1698 Jul.

Ut Celeberrimo Volder o circa vim elasticam satisfiat, non est opus recurri ad animas, aut formas, aut spiritus; nam his sepositis sufficit, ut jam in præcedente Epistola notavi, tale esse Systema rerum, uti materiæ portio quantumvis exigua, ab alia adhuc subtiliore perlabente, mechanicam se se a flexu restituendi causam accipiat, quantum opus est ad observandas nostras motus Leges; atque ita vis elastica erit corpori omni essentialis, ex Systematis structura. Nec magis nos conservationem potentiæ, quam *Cartesianos* conservationem producti ex mole in velocitatem statuentes, recurrere necesse est ad aliquid altius; neutra enim ex sola extensione & impenetrabilitate duci potest; ad Dei autem hic voluntatem recurrere cum Cartesio parum Philosophicum est. Et quecunque modo æstimemus eam, quæ servatur, potentiam; concluditur ex eo quod vis vel actio non perit, aliud esse in corpore quam illa duo, extensionem scilicet & impenetrabilitatem; nam alias, ut in præcedente Epistola mea notavi, duo corpora æqualia directe sibi occurrentia se sisterent mutuo, aliaque multa contingerent prorsus & ab experimentis & a rationibus etiam aliena, quæ

 scilicet

1698 scilicet ex simplici compositione conatuum geometrica necessitate con-
Jul. sequerentur, ut alicubi explicare memini, in *Diario Eruditorum Gallico*, & jam olim in *Theoria motus*, † quam Juvenis publicavi.

Quod vero Dominus VOLDERUS nobis objecit, *nos ita cogi ad aliquid in corpore statuendum, quod concipere non possimus*; bene a Te responsum est sufficere, quod experientia nos cogat ad admittendum aliquid, præter extensionem & impenetrabilitatem, sive id concipi a nobis possit, sive non. Porro ut ostendat rem non posse concipi, quærit, *utrum id quod præter extensionem & impenetrabilitatem admittimus, substantia sit aut modus*? additque, *si modus sit, nihil futurum esse novi; si substantia, spiritum fore, aut corpus, aut tertium, & hoc tertium non posse explicari, nisi cum Veteribus ad formam substantialem dudum* [ipsius judicio] *explosam recurrere velimus.* Sed quærere vicissim liceret, quam assignet definitionem substantiæ vel modo; præterea dantur, quæ nec substantiæ sunt, nec modi, ut attributa primitiva; sic certa magnitudo essentialis est datæ materiæ; & ita non est modus, ut sunt figura, vel motus; & tamen magnitudo non est substantia, sed attributum: Nec nostra refert, utrum id quod statuimus, sit *novum*, modo sit *verum*. Cum etiam quæritur *an dari possit substantia, quæ nec sit spiritus, nec corpus*; rursus definitione opus est, qua fortasse cum illo non convenimus: nam ipse corporis essentiam in extensione collocabit, ego aliquid aliud postulo. Si spiritum omnem cogitatione & intellectu præditum censet; ego animas, formasve existere putabo, quæ spiritus non sint. Nec video quid impediat varios esse Monadum gradus, ut aliæ intellectu sint præditæ, aliæ inferiores sensu. Itaque, si formas substantiales ut res animabus analogas concipiamus, dubitare licebit, an jure sint explosæ.

Rectissime etiam solvisse mihi videris Viri Clarissimi Objectionem, sane per ingeniosam & elegantem, contra Calculum infinitesimalem; nempe revera infinite parvum longissime abest a nullo. Et cum æquatio ad Hyperbolam est $xxy = a^3$, patet x posita infinite parva,

† *Nova hypothesis Physica, qua Phænomenorum naturæ plerorumque causa ab unico quodam universali motu in Globo nostro supposito repetuntur: sive Theoria motus abstracti & concreti.* Moguntiæ 1671. 12°.

va, nempe primi gradus, esse y ad a ut aa ad xx, adeoque y 1698
esse infinitam, non simplicis, sive primi, sed proxime altioris, hoc Jul.
est, secundi gradus; quod secus est in Hyperbola simplice, ubi y est ad a ordinariam, ut eadem ordinaria a, ad infinite parvam primi gradus x. Cognatam objectionem ipse formavi olim mihi in *scholio Propositionis* 22 Tractatus inediti, quem in Gallia *De Tetragonismo meo Arithmetico*, paulo post inventionem ejus concripsi; ubi apparet, objectionem non tantum nostrum Calculum, sed & Geometriam jam antea receptam pari jure ferire. Nempe demonstraveram [*Prop*: 18.] *in figura Analytica simplice* (*Fig*.82.) [sic vocabam eas, quarum æquatio relationem continens ordinariam inter ordinatam & abscissam, nonnisi duobus membris constat, quales TAB. XV.
sunt Paraboliformes & Hyperboliformes, seu ubi quædam dignitates abscissarum sunt, ut quædam dignitates ordinatarum] *zonam* $1C1B2B1C1C$ *esse ad zonam conjugatam* $1C1G2G2C1C$, *ut exponens dignitatum ab ordinatis* BC, *est ad exponentem dignitatum ipsis proportionalibus ab ordinatis conjugatis, seu abscissis* GC *vel* AB. Unde in Hyperbola conica zonæ sunt æquales; in ea vero Hyperboloïde, quam Antiparabolam vocare possis, ubi ordinatæ sunt reciproce, ut quadrata abscissarum, erit zona ad zonam conjugatam, ut 1 ad 2, & ita porro. Hinc talis nascitur difficultas, etiam in ipsa Conica Hyperbola: Zona $3C3B2B2C3C$ æqualis est zonæ conjugatæ $3C3G2G2C3C$, &c. & zona $2C2B1B1C2C$ ipsi conjugatæ $2C2G1G1C2C$, & ita porro; ponendo zonas illas semper lineis terminatis esse comprehensas: Et ita semper quodlibet tale spatium horizontale æquabitur respondenti verticali. Jam omnia quadrilinea horizontalia in infinitum usque ad A complent spatium infinitum quadrilineum $3C3BA$ *&c.* $3C$, & omnia verticalia illis respective conjugata & æqualia in infinitum, complent spatium infinitum trilineum $3C3G$ *&c.* $3C$: Ergo hæc duo spatia infinita sibi sunt æqualia, pars toti, quod est absurdum. Excessus enim prioris super posterius est rectangulum $A3B3C3G$. Respondi multum abesse, uti indivisibile, seu nullum in magnitudine, ab infinite parvo, ita interminatum ab infinite magno; neque sermonem hic fieri debere de spatio absolute interminato, velut $3C$

$3B$

1698 Jul. $3BA$ &c. $3C$, rectis finitis $3C3B$, $3BA$, & Asymptota interminata A &c. & curva interminata $3C$ &c. comprehenso, vel quasi; neque adeo ultimam abscissam AoB accurate loquendo esse nullam, quasi o incideret in A, nec ultimam ordinatam $oBoC$ esse interminatam, quasi $oBoC$ incideret in Asymptotam; sed AoB esse infinite parvam, & $oBoC$ esse infinite magnam, sed terminatam; inter quas media proportionalis sit ordinaria quantitas, latus scilicet quadrati constantis, quod æquatur rectangulo cuicunque $ABCG$, atque adeo & rectangulo $AoBoCoG$, quod est longitudinis infinite magnæ, & altitudinis infinite parvæ. Atque ita cessat objectio, neque enim duo spatia interminata supra dicta, quadrilineum nempe, & trilineum, aut sibi æquantur, aut a quadrilineis [unum ab horizontalibus, alterum a verticalibus] conflantur, sed spatia infinita ambo debent esse quadrilinea & terminata, nempe zona horizontalis totalis ex prioribus numero infinitis conflata $3C3BoBoC3C$, & zona verticalis totalis itidem ex prioribus numero infinitis composita $3C3GoGoC3C$, quæ duæ zonæ, infinitæ quidem longitudine, sed tamen terminatæ, inter se æquantur. Quod etiam in Hyperbola conica per se patet, quemadmodum & in universum in ea constat, quod zona horizontalis respondenti verticali æquetur; nam si a duabus zonis detrahas commune trilineum $3CEoC3C$, restabit in uno rectangulum $A3B3$ $C3G$, in altero $AoGoCoB$, quæ duo rectangula æquantur inter se, ut constat.

Atque hæc quidem circa æstimationem virium, naturamque corporis, pariter ac circa Calculum infinitesimalem, excerpta ex his pariter ac præcedentibus literis, Domino VOLDERO, si videbitur, communicari possent. Inter nos autem hæc addo, quod & jam olim in dicto Tractatu inedito adscripsi, dubitari posse an lineæ rectæ infinitæ longitudine, & tamen terminatæ revera dentur. Interim sufficere pro Calculo, ut fingantur, uti imaginariæ radices in Algebra. Semper enim, quod per infinita ista & infinite parva concluditur, deductione ad absurdum, mea Incomparabilium methodo [cujus aliquando Lemmata dedi in *Actis* *] evinci potest. Itaque mirari etiam non debes, quod dubito an revera detur quantitas

* 1689. Febr. pag. 85. 86.

titas infinite parva, aut infinite magna utrinque terminata. Etsi enim concedam, nullam esse portionem materiæ, quæ non actu sit secta, non tamen ideo devenitur ad elementa insecabilia, aut ad minimas portiones, imo nec ad infinite parvas, sed tantum ad minores perpetuo, & tamen ordinarias; similiter ut ad majores perpetuo in augendo acceditur. Sic etiam semper animalcula in animalculis dari facile concedo; & tamen necesse non est dari animalcula infinite parva, nedum ultima. Si talia, de quibus inter nos agitur, infinita & infinite parva possibilia esse concederem, etiam crederem esse. 1698 Jul.

Sed ad reliqua Litterarum tuarum venio. Et quidem simplicissima est Oenometri ratio Tua novissima, per tubulum communem erectum, & infra valvula foras spectante instructum: habet tamen illud imperfecti, quod dum reaffusionem non indicat, etiam indicare non potest, quantum post reaffusionem iterum detrahatur. Imo poterimus detrahere aliquid, ut nihil plane indicet tubulus, si nempe præcedat aquæ tantæ affusio, quantum mox vini detracturi simus. Quid ergo, si adjungamus adhuc alium tubulum cujus valvula spectet introrsum? Is affusionem indicabit, detractionem non notabit, & machinamentum effici posset in utroque tubulo, ut appareret quantum quaque vice affusum aut detractum, & quis fuerit ordo affusionis aut detractionis; imo ratio posset excogitari definiendi specificam liquoris effusi gravitatem, si tanti ea res esset. Pressionem columnæ aqueæ indicatam ope globuli aërem continentis, & plus minusve aquam admittentis, atque adeo depressi aut emergentis, excogitavit quidam *Italus*, si bene memini, non Boylius. Tubi Tui varicosi inprimis placent ad usus quos notas, ut non sit opus observatione Thermometri continua, & tamen sciri possit, quis medio tempore maximus fuerit ascensus vel descensus. Follem ex materia durabili maxime desiderarem, pro Barometro portatili, aliisque usibus multis.

Cosmotheori Hugeniani præcedentes Tuæ non meminerant: libenter intelligo prodiisse; nam in rebus pulchris & magnis etiam conjecturæ ingeniosæ pretium habent.

In *Actis* nuperrimis, non sine admiratione mea vidi primum

1698 Jul. *Tſchirnhauſianam* †, deinde Tuam Parabolici arcus ſectionem *. Vellem autem narratum fuiſſet, qua ratione ille a Te in rectam viam fuerit reductus; id feciſſem ego, ſi mihi tale aliquid contigiſſet. Miraberis etiam expreſſionem dicentis, *nihil Methodum ſuam fugere*; credo ex quo noſtra intelligere cepit: Sed ſuperſunt tamen adhuc fortaſſe in quibus hæreat. Magna cum voluptate vidi methodum *Maximi*; quam ego ab initio ſtatim, antequam etiam Problema Brachyſtochronæ proponeres, maxime directam & generalem judicavi, & illi Problemati adhibui, aliiſque adhibendam, ſi bene meminiſti, ſuaſeram, pulchre a Te in rem præſentem Iſoperimetrarum uſurpatam. Placet etiam quod appellatione Functionum uteris. Loco Iſoperimetrarum, liceret generalius adhibere figuras Iſodynamas, ſecundum unam fungendi rationem, & ex iis reperire vel eligere eam, quæ *Maximum* aut *Minimum* præſtet, alia fungendi ratione. Verbi gratia [in ſimpliciſſimo] eam, quæ ex æque capacibus eſt breviſſimi ambitus, quæ eſt Circulus; decuſſata, ut ſic dicam quæſtione, cum quæſtione capaciſſimæ ex Iſoperimetris. Sæpe etiam ego utor Functionibus differentiatis x, neglectis differentialibus; ut ſi z ſit Functio ipſius x, tunc dz mihi eſt quantitas ordinaria, quæ prodit dz dividendo per dx, ſeu d$z = dz : dx$. Signa in cujuſque arbitrio ſunt, mihi tamen non placet × multiplicationem ſignificare, ob facilem confuſionem cum x; malo adhibere *τὸ in*, vel $\frown$, ut ZC *in* LM, vel ZC $\frown$ LM; imo ſæpe ſimpliciter duas quantitates puncto interpoſito conjungo, multiplicationemque deſigno per ZC.LM. Hinc in rationibus deſignandis non utor puncto, ſed duobus punctis, quippe quæ ſimul apud me ſignum ſunt diviſionis, itaque pro Tuo $dy.x :: dt.a$ ſcribo $dy : x = dt : a$, idem enim eſt dy eſſe ad x ut dt ad a, quod dy diviſum per x æquari ipſi dt diviſo per a. Ex qua æquatione etiam conſequuntur omnes proportionum regulæ.

Nondum ſatis attente examinare vacavit, an nihil referat ad *maximum*,

† *De methodo arcus curvæ parabolicæ inter ſe comparandi*, per D. T. Act. Erud. 1698. Jun. p. 259.

* *Inveſtigatio algebraica arcuum parabolicorum aſſignatam inter ſe rationem habentium* &c. Ibid. pag. 261. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLIX. p. 242.

ximum, quam sumas arbitrariam constantem *C*, in summando addendam vel subtrahendam; quo posito infinitæ erunt curvæ quæsitæ præstantes idem, seu æque *maximum*; alioqui oporteret ex ipsis *C* rursus eam, quæ *maximum* præstet, eligere. 1698 Jul.

Ad linteum hæc noto, pro gravitatione (*Fig.* 83.) particulæ F C clarius dici potuisse ejus gravationem; solet enim gravitatio sumi active, gravatio passive, sed hæc minuta sunt. Illud putem, si liquor superstet linteo, ut contineatur & linteo BFN & rectis RB, SN, ipsius quoque Centrum gravitatis, (cum idem semper liquor maneat, utcunque mutata lintei figura,) maxime descendere; sed res tamen eodem redibit. TAB.XV.

Consensus duarum methodorum, directæ & indirectæ, egregius est; tum pro illis qui hæc altius non introspiciunt, tum pro nobis ipsis, ut Calculi errores, aut ratiocinii paroramata melius vitemus. Dnus. MENCKENIUS Tuæ sectioni arcus parabolici adjecit tuam demonstrationem Tautochronismi Cycloïdis, & censuram in LA-HIRIUM, nonnihil puto temperatam. Scribit mihi, in proximis *Actis* * comparere debere *Davidis* GREGORII *Catenariam* ex *Transactionibus*. Rectius consuluisset nos prius, an aliquid afferat dignum referri: Sed ille exterorum benevolentiam captat, secus quam exteri faciunt nostris.

Pene oblitus eram dicere, quod tamen fortasse jam Tibi notum est, Dominum *Fratrem* Tuum specimina quædam dedisse in *Actis* † primi Problematis a Te in Diario Gallico propositi, & a Domino *Marchione* HOSPITALIO præteriti, pro linea minima inter duo puncta ejusdem superficiei: sed non dicit, an possit generaliter. Memini me Tibi dudum § scribere quod mihi occurrerit Methodus generalis. Pono superficiem constare ex portionibus superficierum, in quibus minimæ jam duci possunt, quales sunt planæ aut sphæricæ, tanquam elementis. Nam in plana minimæ sunt rectæ, in sphæra minimæ sunt arcus magni. Jam quia ex Methodo mea ge-

 nerali

* 1698. Jul. pag. 305.

† *Solutio sex Problematum Fraternorum &c.* Act. Fr. 1698. Mai. p. 226. *vel* Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. LI. Art. 2. pag. 256, aut Jac. BERNOULLI Opp. N°. 80. pag 796.

§ Epist. LXIV.

1698 Jul. nerali directa formarum *maximum minimumve* præstantium, etiam linearum *minimum* præstantium portiones utcunque parvæ *minimum* præstant: Ita quoque ex puncto unius portionis, seu hedræ [quod eligi potest maxime determinatum] ad punctum alterius proximæ portionis, quærenda est via minima, composita ex minimis viis in utraque hedra ad punctum in communi hedrarum sectione ita sumtum, ut summa sit possibilium minima. Sint (*Fig.* 84.) hedræ [nempe portiones planorum vel sphæricarum superficierum datam superficiem tangentium, vel, si in sphæris malis, osculantium] L M N & P M N hæc plana, aut hæ superficies sphæricæ vel hedræ, habeant communem in superficie data sectionem M N. Et sint duo puncta datæ superficiei sibi indefinite vicina R & S, quæ in hedris istis duabus determinatam maxime [ob facilitatem calculi] positionem habere intelligantur: quærendum est sectionis hedrarum communis MN punctum tale T, ut minimarum ab R & S ad T, nempe ipsarum RT & ST [quæ in Hedris planis sunt rectæ, in sphæris arcus magni] summa RT + ST sit omnium possibilium minima, & determinatio puncti T dabit naturam lineæ in superficie data ducendæ, inter puncta sua minimæ, generalem. Et harum linearum eæ deinde eligendæ infinitæ, quæ transeunt per punctum datum, & ex his demum una [regulariter] quæ a puncto dato tendit ad alterum punctum datum. Quod si Tibi alia occurrit via, tanto erit gratior. Sin hanc ipsam excolueris, etiam sic jucundum erit intelligere Tuo studio eruta; materia enim pulchra est, & Te digna. Vale.

TAB. XV.

Dabam *Hanoveræ* 29. Julii 1698.

Deditissimus

Godefridus Guillelmus LEIBNITIUS.

EPIS-

EPISTOLA LXXVI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Infinito. De natura corporis. De Oenometro. De Tschirnhausio. *De Iſoperimetri Probl. ſolutionibus ſuis. De linea breviſſima in ſuperficie curva. De Oenometro Pariſienſi. De controverſia fraterna.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime.

Hactenus a Domino Voldero nullam accepi reſponſionem; an ſit quod forte ipſi ſatisfecerim, neſcio: percuperem ſaltem noſſe, quid jam ſentiat de ſua objectione contra Calculum infiniteſimalem, quam inſolubilem credidit; niſi ad plurimum dicendo [hac enim reſponſione ſibi ipſemet adblandiebatur] Axiomata pro finitis quantitatibus recepta non valere pro infinitis; ita ut ſine contradictione duo infinita cenſeri poſſint ſimul æqualia & inæqualia, pars infiniti æqualis toti infinito, ſimplum duplo, &c. Sed, (cum valeat ubique, ***Nihil ſimul eſſe & non eſſe poteſt,***) hanc reſponſionem nullam eſſe prævideram ſtatim, & genuinam promiſeram, quam miſi. 1698 Auguſt.

Etiam mihi quandoque occurrerunt objectiones ſimiles Tuæ, quam ipſe Tibi in ***Gallia*** formaſti; & nuper admodum Varignonius hujuſmodi diluendam mihi propoſuerat, circa deſcenſum gravium.

Inſtabit, ſcio, Volderus petere claram explicationem illius tertii, quod, præter extenſionem & impenetrabilitatem, requiris in Corpore. Regeret forſan, ſi tales Monades ſtatuas corporibus peculiares, ſive illas nomines formas ſubſtantiales, ſive res animabus [intelligentibus, an ſentientibus, quod Voldero perinde eſt] analogas; monadem aut toti Corpori, aut parti attribuendam eſſe; non corpori, quia poteſt dividi in partes a ſe mutuo independentes; non parti, quia pariter in plures partes indepen-

 den-

1698 Auguſt. dentes dividitur. Si vero corpus ex infinitis monadibus conflatum dicas; tunc quamlibet, aut extenſo, aut non extenſo fore affigendam: ſi extenſo, licet infinite parvo, priorem recurrere difficultatem, niſi ad atomos refugere velis; ſi non extenſo, ergo nihilo, quia ex non extenſis non componi poteſt extenſum; ita ut forte cogaris dicere quodlibet corporis punctum [dico punctum mathematicum indiviſibile] peculiari monade, ſeu tali anima donatum eſſe. Quantum ad vim elaſticam, Tecum ſentio, nec forma, nec anima, nec ſpiritu opus eſſe, ut illa corpori ſit eſſentialis; rectiſſime, namque mihi dicere videris, eam ex mechaniſmo, ſeu ſtructura corporis dependere poſſe: quemadmodum non opus eſt anima, ut duo magnetes ſe mutuo attrahant, vel repellant: Et ego ſane ſæpius cogitavi, annon quodlibet corpuſculum, quantumvis exiguum, ita a Deo ſit conſtructum, ut pro ratione molis ſuæ, certam habeat copiam materiæ longe ſubtilioris, circa ſe, & per ſe continuo perlabentis, ipſiusque quaſi ſphæram activitatis conſtituentis: Tale quid etiam NEWTONUS ſtatuiſſe videtur, quando illum dicere memini, omnia & ſingula corpora totius univerſi in ſe mutuo gravitare, ſeu ſe mutuo attrahere; adeo ut meum corpus, verbi gratia, non magis verſus centrum Terræ trahatur, habita ratione vicinitatis, quam verſus centrum Saturni, aliuſve Planetæ, præterquam quod vacuum admittat, HUGENIO approbante, ut ex Coſmotheoris vidi.

Nunquam ego dixi in diviſione materiæ ad elementa inſecabilia, aut ad minimas portiones deveniri poſſe: ſed hic non eſt quæſtio, quouſque ego diviſione, ſeu actuali, ſeu mentali pervenire poſſim; quæritur quouſque jam perventum ſit? Concedis materiæ portionem finitam actu jam diviſam eſſe in partes numero infinitas; & tamen negas aliquam iſtarum particularum poſſe eſſe infinite exiguam: quomodo hæc cohærent? Nam, ſi nulla eſt infinite exigua; ergo ſingulæ ſunt finitæ; ſi ſingulæ ſunt finitæ, ergo omnes ſimul ſumptæ conſtituent magnitudinem infinitam; contra hypotheſim. Concipe aliquam magnitudinem determinatam dividi in partes geometrica hac progreſſione deſcendentes $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

+

+ &c. Quamdiu numerus terminorum finitus eſt, fateor ſingulos terminos fore etiam finitos; ſed ſi omnes termini actu exiſtunt, erit ſane infiniteſimus, omnesque ſequentes infinite parvæ magnitudinis: atqui in quolibet corpore, ob diviſionem actualem jam factam, non faciendam, revera & actu omnes termini talis progreſſionis exiſtunt, Ergo, &c. 1698 Aug.

Præterea corpus quod motu ſuo deſcribit lineam, exiſtit utique actu in ſingulis punctis quæ in illa linea concipere poſſum, ergo etiam in duobus quæ ego concipio infinite ſibi vicina; adeoque actu intervallulum illud, ſeu particulam infinite exiguam, emenſum eſt. Tandem licet talis particula infinite parva non exiſteret ſeparatim, coexiſtit tamen cum toto; ſed miror quod dicas, quod ſi talia, de quibus inter nos agitur, infinita & infinite parva, poſſibilia eſſe concederes, etiam crederes eſſe. Vellem ergo ut mihi demonſtrares impoſſibilitatem; nam quemadmodum non tantum mihi tribuo exiſtentiam eorum probare me poſſe, ita e contrario perſuaſiſſimus ſum impoſſibilitatem ejus nullis argumentis poſſe evinci.

Gaudeo Tibi placuiſſe Oenometri rationem meam; placet viciſſim perfectio Tua pro reaffuſione cognoſcenda; de qua ego non ſollicitus eram; quia nec *Galli* illius automatarii machinulam id præſtare intellexi. Sed quid ſi detractio vini & reaffuſio aquæ fiunt ſimul, ita ut quantitas liquoris in dolio nunquam mutetur? Uterque ſane tubulus, obſervatorem fruſtrabit, neque remedium video pro hoc. Cæterum valvulæ etiam applicari poſſent Barometris & Thermometris communibus pro maximo aſcenſu & deſcenſu explorando, unde tubis varicoſis non eſſet opus; ſed prævideo difficultatem applicationis valvularum intra tubos vitreos.

Mirabilia mihi narras de TSCHIRNHAUSII modo procedendi; expectabam ab ipſo agnitionem ſui erroris, & revocationem abſurdæ ſuæ refutationis, imo & gratiarum actionem quod a me in rectam viam ſit reductus. Quid autem? loco horum rependere ingratitudinem? mihi furari inventionis laudem? dicere nihil methodum ſuam fugere? talia profecto virum honeſtum non decent....

. . . .

Lætor admodum ſolutiones meas Problematis Iſoperimetrorum duplici

1698 Auguft. duplici methodo inventas Tibi probari: animadvertifti, credo, me adhibuiffe in methodo directa confiderationem Ellipticulæ, prout ego ab initio ftatim conceperam; abfque qua forte non tam facile perveniffem ad cognitionem æqualitatis arculorum OX & $\omega\xi$; id quod palmarium eft in hoc fcrutinio. Elegans eft converfio Tua quæftionis Ifoperimetrorum in Ifodynamorum, ubi fcilicet ex omnibus figuris Ifodynamis, feu ejufdem capacitatis, quæritur illa quæ, certa fungendi ratione, producat aliam figuram breviffimi ambitus inter omnes illas quæ eadem Functione ab aliis Ifodynamis produci poffent. Sed Problema hoc modo confideratum difficilius mihi apparet. Ad denotandam Functionem alicujus quantitatis indeterminatæ x, mallem uti litera majufcula cognomine X, vel græca ξ; ut fimul appareat cujus indeterminatæ fit Functio; hoc levaret memoriam. Quantum vero ad fignum Functionis differentiatæ facile adoptabo tuum d, loco mei Δ, quoniam fimplicius eft; ideoque in Tua eft manu fubftituere illud in fchediafmate meo. Reliqua quæ mones circa notationem fignorum vulgarium etiam ego approbo; interim malui morem receptum fequi quam novorum fignorum definitionem præmittere; id quod commodius fieri poteft confcribendo integrum Tractatum. Lubens credam Te nondum fatis attente examinaffe, an quid referat ad *maximum* quam fumam conftantem *C*, in fummando addendam vel fubtrahendam. Si enim vel tantillum adtendiffes, vidiffes facile revera infinitas debere effe curvas, quæ eadem Functione *maximum* præftant; non tamen inde fequitur, dari *maximum maximorum*, crefcunt quippe illa maxima a o in infinitum. Sumamus, exempli gratia, cafum fimpliciffimum, exiftente numero poteftatis $n = 1$, Problematis Fraterni, ubi fcilicet curva quæfita genitrix BFN, & genita BZN eft eadem curva, utraque nempe Circulus: patet utique non modo femicirculum BFN quæfito fatisfacere, fed quodcunque aliud fegmentum, vel
TAB.XV. majus ut (*Fig.* 85.) BRN, vel minus ut BSN, ita ut BRN & BSN æque faciant maximum, inter fuas refpective Ifoperimetras, quam BFN. Hic vero nullum eft *maximum maximorum*, quandoquidem BSN in infinitum diminui & BRN in infinitum augeri poteft; Hoc apprime convenit cum mea generali æquatione

$dy =$

$dy = dx(X \pm C) : \surd(a^2 - (x \pm c)^2)$, in qua si, loco generalis Functionis X, substituatur x, habebitur $dy = dx(x + C) : \surd(a^2 - (x \pm c)^2)$, seu summata æquatione $y \mp b = \surd(a^2 - (x \pm c)^2)$: quæ æquatio est ad semicirculum BFN, si $c = 0$; ad segmentum majus BRN, si adhibentur $- c$; & ad segmentum minus BSN, si $+ c$. Et quidem in hoc solo casu quando $X = x$, omnes tres curvæ BSN, BFN, BRN, sunt cognomines, nempe omnes Circuli; sed in reliquis omnibus casibus, sunt diversi generis curvæ. Si exempli gratia $X = \surd x$; tunc assumta $c = 0$, erit BFN Cycloïs; sed BSN, vel BRN cessat esse Cycloïs, si sumatur + vel — c. 1698 August.

Hoc notandum, quod si $C = 0$, tum semper curva FFN, posita quacunque Functione, normaliter insistit axi B N.

Gratum mihi esset videre GREGORII Catenariam & TSCHIRNHAUSII Schediasma. Si eam mihi mittere velles, remitterem ocyus; *Acta* enim non nisi tarde admodum ad me perveniunt. Nondum vidi quid *Frater* dederit in *Actis* pro linea brevissima inter duo puncta ejusdem superficiei: generaliter id posse dubito. Methodus Tua, vel potius basis alicujus Methodi, legitima est, eaque etiam primo se mihi obtulit, cum hoc Problema mihi incideret, & quidem porro facile videbam (*Fig.* 84.) lineam brevissimam in duabus hædris se secantibus, ab R ad S tendentem, eam esse quæ faciat cum communi hædrarum sectione N M; duos angulos ad verticem, ut ita dicam, oppositos RTM, & STN æquales; sed hoc hactenus nihil juvat pro constructione totius lineæ quæsitæ in superficie curva. Alium præterea inveni solvendi modum, qui generalissimus est, † quique in eo fundatur, quod planum transiens per tria quælibet puncta proxima lineæ quæsitæ debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum. Hinc enim generalem erui æquationem pro omnibus superficiebus, quæ in nonnullis, ut in Conoïdicis & Sphæroïdicis rectis cujusvis gradus facile construitur. Vale & fave. TAB. XV.

Amplitudini Tuæ Devotissimus

J. BERNOULLI.

† *Vid.* Opp. Tom. IV. N°. CLXVI. pag. 108.

1698] Auguft. P. S. Meis jam fcriptis, accipio hafce à Domino VARIGNONIO, cum defcriptione Oenometri, quod valde compofitum deprehendo, vereorque ne vel fola frictio denticulorum & virgulæ ferreæ liberum defcenfum & afcenfum fuberis multum impediat; præterquam quod eundem defectum habet, quem noftrum, quod fcilicet nihil indicet fi effufio & affufio fimul fiant. Mifit etiam longam,......... *Fratris* Epiftola in *Diario* † editam, ubi *Frater* fingularem omnino refutandi viam init. Fingit enim fibi ftatim analyfin quamdam defumtam ex methodo indirecta [fed male & longe aliter quam ego feci, adhibita, conjicit enim me fuppofuiffe Centrum gravitatis debere infimum locum fumere in liquoribus, ubi mutata figura non eadem copia manet; quod tamen fcis me in primis præcaviffe, nullamque me habere confiderationem Centri gravitatis, fed rem totam deducere a fumma gravitationum feu gravationum, prout volueris nominare]: illaque me ufum fuiffe conjecturat; quam igitur prolixè refutat, oftendendo quod multæ abfurditates exinde fequantur: quod vero in multis veritatem invenerim, id factum effe ex accidenti, quia commiferim duos paralogifmos feliciter adeo fe mutuo corrigentes, ut fortuito verum exhibuerint. Vides...... hominem cum umbra pugnare.......
.... refellere analyfin quæ mea non eft? fi volueris, mittam foliola. Præter Te afcifcit in arbitros Dominum HOSPITALIUM & NEWTONUM. Refpondi § ejus refutationem me non tangere, me meas Methodos, & directam & indirectam, cum Analyfi, apud Te diu depofuiffe: etiam *Fratrem* debere fuas Tibi mittere, quas utrafque fimul publicaturus fis, ut eas Lectores, & reliqui inprimis arbitri, cum fe invicem tanto commodius conferre, & de collatis judicare queant.

† *Journal des Savans* 30. Journ. du 4. Aout, & 31. Journ. du 11. Aout, vel Joh. BERNOULLI Opp. Tom. I. N°. XLV. pag. 222. *Aut* Jac. BERN. Opp. N°. 87. 88. pag. 829. 839.

§ *Journal des Savans* 40. Journ. du 8. Dec. *vel* Opp. Tom. I. N°. XLVII. p. 231.

EPIS-

EPISTOLA LXXVII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Mittit Responsionem fraternam.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

ACcipio *Diarium Gallicum*, in quo responsio Domini *Fratris* Tui. Omnino judicavit, ut divinasti, Te, ope lintei perveniſſe ad quæſitum, ſed non prævidit, Te etiam via alia directiore uſum eſſe. Suadeo ego, ne præcipites publicationem Tuam viæ directæ, ob rationes olim allegatas. Vix enim niſi pauciſſimi poſſunt eſſe judices, & hi poſſunt privatim intervenire; cæteris, quales Dnus. TSCHIRNHAUSIUS & Dnus. NIEUWENTIIT, qui noſtris non ita uti mihi videntur, ut æquum erat, tantum ſuppeditamus, quibus alant ſuam αὐθάδειαν beneficii accepti diſſimulatricem. 1698 Auguſt.

Epiſtola Domini *Fratris* Tui ad Dominum VARIGNONIUM directa eſt; quod ex eo judico, quia ipſius Theorema mechanicum de ſinubus laudat.

Uti ſe ait mea expreſſione per (:), commodo Typothetarum, poterat eodem modo etiam exprimere rationem, ut nuper ſcripſi.

Ad priores me referens nihil nunc addo, niſi ut, valeas & me ames, qui ſum perpetuo tuus.

Dabam *Hanovera* $\frac{9}{19}$ Auguſti 1698.

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA LXXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad penultimam.

De Oenometro Parisiensi. De TSCHIRNHAUSIO *&* MENCKENIO. *De Isoperimetris. De Infinito. De Corporum natura & monadibus. De vacuo & gravitatione universali. De signis algebraicis. De quadratura arithmetica. Mittit* GREGORII Catenariam.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1698 August. GRatum mihi est intelligere, Oenometrum Gallicum nihil aliud esse, quam suberem, qui elevatur secundum virgulam ferream, denticulis adjunctis. Huic constructioni nostram utique præferendam putem. In Thermometris & Barometris Tubos varicosos valvulis Tecum prætulerim.

Dno. TSCHIRNHAUSIO, ad Litteras ipsius responderam, me Tibi communicaturum vel communicasse quæ objicit; ab eo tempore mihi non scripsit. Velim inter bonos bene & candide agier, & suum cuique tribui. Dnus. TSCHIRNHAUSIUS quanto magis simulat a se negligi gloriam, tanto eam affectat magis. Dnus MENCKENIUS utilitatum suarum magis quam æquitatis rationem habet. Dno. TSCHIRNHAUSIO defert, tanquam vicino, quicum sæpe agendi occasio est; exteris remotioribus, ut GREGORIO, NIEUWENTIITIO & similibus favet, ut eos benevolentiæ significatione invitet; nos satis sibi astrictos putat. GREGORII Catenariam nondum vidi, sed tantum ex Literis *Menckenianis* intellexi, *Actis* † insertum iri: ubi accepero mittam statim. Respondi ipsi, videri mihi eam venturam post festum, nec *Anglos* nostra nisi aliquid novi & digno habeant, referre.

Video

† 1698. Jul pag. 305.

Video, quia Problemata Isoperimetrorum solvuntur non pro uno dato ambitu, sed pro quocunque, utique non unum *maximum maximorum* ibi haberi, sed variari in infinitum debere; interdum tamen in aliis casibus hæc cautio erit utilis, ut determinatio assumtæ inter summandum constantis adhibeatur. Uti dato ambitu Ellipticula, ita alio dato alia curvula est opus; & licet de curvula non cogitetur, sufficit duobus punctis datis tertium manere indefinitum, [utique in curva] ex lege maximi determinandum: Unde jam proprietas lineæ quæritur. Idque revera & pro ducenda minima in data superficie contingit, ut adeo semper eadem sit methodus directa generalissima, ut ad æquationem [saltem differentialem] deveniatur. Nec pro minima superficiei abludit speciale quod adhibes Theorema elegans & utile; nam Circulus maximus in sphæra superficiem datam tangente, transiens per tria puncta proxima lineæ minimæ quæsitæ, est planum rectum ad planum superficiem datam illic tangens. 1698 August.

Uti Dominus Volderus, ita olim *Gregorius* a S. Vincentio alicubi dixit in infinito non habere locum Axioma, quod Totum sit majus parte. Sed mihi videtur alterutrum dicendum, vel infinitum revera non esse unum totum, vel infinitum, si totum sit, & tamen non sit majus sua parte, esse aliquid absurdum. Sane ante multos annos demonstravi numerum seu multitudinem omnium numerorum contradictionem implicare; si ut unum totum sumatur. Idem de numero maximo & numero minimo, seu fractione omnium infima. Et de his dicendum quod de motu celerrimo, & similibus. Etiam universum non est unum totum, nec concipi debet ut animal cujus anima Deus, uti Veteres faciebant. Quemadmodum autem non datur elementum numericum, seu minima pars unitatis, vel minimum in numeris; ita nec datur linea minima, seu elementum lineale; linea enim, ut unitas, secari potest in partes vel fractiones. Interim fateor, cum aliud sit maximum ab infinito, & minimum ab infinite parvo, non hinc statim refutari possibilitatem nostrorum infinite parvorum. Et saltem in Calculo & ratiocinatione adhiberi possunt, quod in maximo interminatoque, itemque in minimo non licet, ut jam observavi. Cum dixi, si infinite

1698 August. te parva & infinita possibilia crederem, me concessurum ea esse; non ideo dixi ea esse impossibilia; sed rem in medio adhuc reliqui. Cum negavi ad minimas portiones deveniri, facile judicari poterat me non locutum de nostris divisionibus, sed etiam de illis quæ actu fiunt in natura. Etsi igitur pro certo habeam, quamlibet partem materiæ esse rursus actu subdivisam, non ideo tamen hinc sequi puto, quod detur portio materiæ infinite parva; & minus adhuc sequi concedo, quod ulla detur portio omnino minima. Si quis consecutionem in formam redigere velit, sentiet difficultatem. At inquies: si nulla est infinite exigua, ergo singulæ sunt finitæ. Concedo, si singulæ sunt finitæ, ergo omnes simul sumtæ constituent magnitudinem infinitam. Hanc consequentiam non concedo; concederem si aliqua daretur finita, quæ minor esset cæteris omnibus, vel certe nulla alia major; tunc enim fateor talibus assumtis, pluribus quam est datus numerus quivis, oriri quantitatem majorem data quavis, sed constat, quavis parte aliam minorem finitam dari. Uteris exemplo sane ad rem accommodato. Ponamus in linea actu dari, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ &c. omnesque seriei hujus terminos actu existere; hinc infers dari & infinitesimum, sed ego nihil aliud hinc puto sequi, quam actu dari quamvis fractionem finitam assignabilem cujusque parvitatis. Similiter in motu, & si per omnia puncta transeatur, non tamen sequitur duo puncta dari sibi infinite vicina, & multo minus dari sibi proxima. Et revera puncta concipio, non ut elementa lineæ, sed ut limites, seu negationes progressus ulterioris, sive ut lineæ terminos.

Quod ad corporis naturam attinet, sæpe dixi [quod videris non improbare] omnia phænomena in corporibus explicari posse mechanice, adeoque & vim elasticam: interim ipsa principia Mechanismi, seu Legum motus ex sola consideratione extensionis & impenetrabilitatis non posse derivari; itaque aliud quid in corpore esse statuendum, cujus modificatione oriantur conatus & impetus, uti modificatione extensionis oriuntur figuræ. Per *Monadem* intelligo substantiam vere unam, quæ scilicet non sit aggregatum substantiarum. Materia ipsa per se, seu moles, materiam primam vocare possis,

poſſis, non eſt ſubſtantia; imo nec aggregatum ſubſtantiarum, ſed aliquid incompletum. Materia ſecunda, ſeu Maſſa, non eſt ſubſtantia, ſed ſubſtantiæ; ita non grex, ſed animal; non piſcina, ſed piſcis, ſubſtantia una eſt. Etſi autem corpus animalis, vel meum organicum, rurſus ex ſubſtantiis innumeris componatur, eæ tamen partes animalis vel mei non ſunt. Sed ſi nullæ eſſent animæ, vel his analoga, tunc nullum eſſet ego, nullæ monades, nullæ reales unitates, nullæque adeo multitudines ſubſtantiales forent; imo omnia in corporibus non niſi phaſmata eſſent. Hinc facile judicatur nullam eſſe materiæ partem in qua Monades non exiſtant. 1698 Augúſt.

Miratus ſum Hugenium atque Newtonum admittere vacuum; ſcilicet quod animum ultra notiones geometricas non ſuſtulere. Magis adhuc mirum eſt Newtonum ſtatuiſſe attractionem, quæ mechanice non fiat. Interim quod ait corpora in ſe gravitare [ſaltem ad ſenſibiles effectus in magnis corporibus noſtri ſyſtematis] non videtur contemnendum, etſi Hugenio id minus arrideat. Et plane probo quod ais, corpus utcunque exiguum habere ſuam ſphæram activitatis; dicere ſoleo nullum eſſe corpuſculum, quod non ſit mundus quidam infinitarum creaturarum.

Optime facis, ut Functionis nota deſignet, cujus litteræ ſit Functio, veluti ut ξ ſit Functio ipſius x. Si ſint plures Functiones ejuſdem, poſſent diſtingui numeris. Soleo interdum adhibere notam relationis hoc modo $\overline{x}|\underline{1}|$, $\overline{x}|\underline{2}|$, &c. id eſt utcunque formatum ex x; ita ſi quod ex pluribus formatum, ut ex x & y ſcribo $\overline{x;y}|\underline{1}|$, $\overline{x;y}|\underline{2}|$. Et quando formatio eſt rationalis adſcribo r, veluti $\overline{x}|\underline{r:1}|$ & $\overline{x}|\underline{r:2}|$ vel $\overline{x;y}|\underline{r:1}|$, $\overline{x;y}|\underline{r:2}|$. Si formatio ſit rationalis integra, ſcribo $\overline{x}|\underline{ri:1}|$, $\overline{x}|\underline{ri:2}|$. Sed ubi nonniſi una Functio, aut paucæ; ſufficiunt litteræ græcæ, vel aliquid tale, ut ſoles.

Meus Tractatus *Tetragoniſmi arithmetici* poterat applauſum habere, tunc cum ſcriberetur; nunc Tironibus noſtrarum Methodorum magis placeret, quam Tibi. Cum Dominus *Frater* Tuus putet Te alicubi non dediſſe verum reſponſum; oportet ut aliam ſibi habere videatur ſolutionem generalem. Verba, quibus Hos-

PITA-

1698 August. PITALIUM & NEWTONUM mihi adjungit, non vidi, & ut communices rogo........................ Vale.

Dabam *Hanoveræ* 22. Augusti 1698.

Deditissimus
G. G. LEIBNITIUS.

P. S. His jam scriptis, allatus est ad me mensis *Julius Actorum*; unde hæc *Gregoriana* de Catenaria mitto, quæ legendi mihi spatium nondum fuit. Judicium igitur Tuum ubi remittes, plagulas istas accipere spero.

EPISTOLA LXXIX.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

Censura Catenariæ GREGORII. *De* TSCHIRNHAUSIO, *& Fraterna solutione Problematum suorum. De Infinito, Natura corporis & Monadibus.*

Vir Amplissime & Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1968 Septemb. REmitto plagulas *Actorum*, cum gratiarum actione. Nihil in his video præstitisse GREGORIUM *, quod applicationem septennalem, post nostras solutiones editas, mereretur........... In eo enim totus est, ut quas olim invenimus catenariæ constructiones & proprietates, ille jam per analysin examinet & demonstret; quod quam facile sit a posteriori, id est, ex generali rei natura semel cognita & a nobis tradita, Tuo judicio relinquo. Fecisset aliquid, si nostris non visis, a priori Problema solvisset. Ut vero ex mechanicis primariam Catenæ proprietatem eliceret, ex qua cætera omnia pendent; ex ejus ratiocinio clare patet, sibi non fuisse scopum eruendi quod incognitum supponitur, sed potius ut, qua

* DAVIDIS GREGORII *Catenaria* A. E. 1698. Jul. pag. 305.

qua data porta, ad noſtram ſolutionem perveniret; modo ſpeciem ſolutionis exhibuiſſe videretur; ſuum adeo ſolvendi modum quæſito, quod jam cognitum habebat, accommodaſſe credo. Etenim Prop. 1. ſi non paralogizat, ſaltem maxima eſt inevidentia, dum neſcio quo pacto confundit potentias. Tamen verum concludit; forte quod duos paralogiſmos ſe mutuo corrigentes [ut Fratris termino utar] admiſerit, vel potius quæſiverit ſtudio. Videtur enim, ut modo dixi, præmiſſas concluſioni non vero concluſionem præmiſſis adaptaſſe. Miraberis innuentem ſtatim quaſi etiam nos uſi fuerimus methodo *Newtoniana*, quando illam Geometris familiarem deprædicat. Rem forte gratiorem multis feciſſet Dominus MENCKENIUS, ſi hanc cramben recoctam omiſiſſet; præſertim cum ſcateat tot vitiis typographicis, ſenſum non turbantibus, ſed pervertentibus; ut qui noſtra non antea intellexerit, fruſtra ſit ea hinc ediſcere velle. Notat GREGORIUS catenariam eſſe debitam curvaturam fornicibus conciliandam; ſed diu eſt quod idem & ego & alii annotavimus. . . . .

1698 Sept.

Legi, & relegi quæ TSCHIRNHAUSIUS de ſecandis arcubus parabolicis in *Actis* * habet; at ne nunc quidem rem acu tetigit. . . . . Legi etiam Fraternas ſolutiones Problematum meorum †; ſed eum longe abeſſe a generali ſolutione apparebit ex reſponſione quam nuper ad *Acta* § miſi. Problema de ducenda linea minima ſolvit tantum pro Conoïdibus rectis & circularibus, non pro quavis ſuperficie curva. Item reliqua Problemata in *Diario Gallico* propoſita, pro curvis ſimilibus, non pro quibuſvis ordinatim poſitione datis ſoluta dedit. Trajectorias [datis ordinatim poſitione in angulo recto occurrentes] in pauciſſimis invenit, non vero generaliter; multo minus pro angulo obliquo; & minime pro angulo data lege variante, quemadmodum ego ſolvi, ſi recordaris.

* 1698. Jun. pag. 259.

† A. E. 1698. Mai, pag. 726. Joh. BERN. Opp. Tom. I. N°. LI. 2. pag. 256. Jac. BERN. Opp. N°. 80. pag. 796.

§ *Annotata in ſolutiones Fraternas Problematum quorumdam ſuorum*, A. E. 1698. Oct. pag. 466. vel Opp. Tom. I. N°. LII. pag. 262.

1698 Sept. Hac ipsa hora extra urbem abiturus, nunc ad litterarum Tuarum contenta prolixe, prout vellem, respondere non possum: id saltem dico me etiam credere maximam & minimam quantitatem non dari; infinita & infinite parva non posse demonstrari existere, sed etiam non posse demonstrari non existere; probabile tamen esse existere. Si omnes termini hujus progressionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. actu existunt, ergo existit infinitesimus, & omnes qui eum sequuntur: mihi videtur me hoc jure posse inferre ex actuali existentia. Nec ego puncta concipio ut elementa lineæ, sed ut limites tantum. Quid per materiam primam per se, seu per molem distinctam a materia secunda, seu massa, intelligas, non satis capio; neque etiam quid Tibi sit incompletum. Si materia secunda, seu massa, non est substantia sed substantiæ; si bene comparas cum grege, seu cum piscina; divide ergo mihi certam portionem materiæ in suas substantias solitarias, singulares & individuas; quemadmodum grex dividitur in animalia, exercitus in milites &c. & explica quæso clare in quo putes talem substantiam singularem consistere. Esto esse aliquod animæ analogum: concedis portionem materiæ nullam esse tam exiguam, in qua non infinitæ existant tales animæ, tales substantiæ, tales monades, seu quocunque nomine velis notare: quousque ergo progrediendum ut perveniam ad simplicem unitatem, & individuam; ut possim dicere hanc esse substantiam, non substantias? Sane materia non modo dividenda erit in partes infinite exiguas, sed in minimas id est puncta, seu non quanta, quæ non dantur.

Hesterna luce accepi litteras a Domino VOLDERO: Is sibi satisfactum fatetur, &c.

EPIS-

EPISTOLA LXXX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De Catenaria GREGORII. *De Infinito. De Academiæ Pariſienſis hiſtoria. De Machiniſta quodam Pariſienſi.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratiſſime!

ANte omnia nuncio, litteras Tuas, quas in Itinere inter *Hanoveram* & *Herrenhuſam*, ubi Aula eſt, perditas ex circumſtantiis credideram, præter ſpem comparuiſſe in maſſa ſchedarum, ubi prius quæſieram fruſtra; itaque Te metu ſolvo, quam Tibi incutere poterat Lector incommodus eorum, quæ de Paſtoribus quibuſdam veſtris dicebas, quos ego nunc a prudentioribus edoctos rectius judicare arbitror. 1698 Sept.

Gregoriana de Catenaria aſpexeram magis quam legeram, ſed dubitatione Tua admonitus, demonſtrationem propoſitionis primæ, qua fundamentalem quandam lineæ proprietatem conſtituere conatur ex Mechanicis, non tantum legi, ſed & examinavi; & mirum dictu, Vir cætera ingenioſus ita paralogizare deprehenſus eſt, ut vix tyro poſſit magis; ſed perplexitate exprimendi ſe fortaſſe ipſum decepit ſucceſſu apparente. Adjeci examen, rogoque ut conſideres, mihique ſententiam Tuam perſcribas, deliberesque mecum, an e re ſit mittere ad *Acta*. Satis apparet [quidquid affectet] non ſatis ab ipſo intelligi uſum Caculi infiniteſimalis, & induiſſe ſe ſe in ſpinas, fere ut olim Dnus SAUVEUR *Pariſiis*, * Uſum Catenariæ ad fornices non ſatis concepiſſe animo vel explicuiſſe videtur. Et ſane meretur res exponi a Te diſtinctius.

Domini TSCHIRNHAUSII proceſſum tecum admiror, vellemque actum fuiſſe apertius, & ſuum cuique tributum.

 Venio

* *Vide* Epiſt. ſuperiores XLI, XLII, & XLIII.

1698 Sept. Venio nunc ad ea quæ in Epiſtola Tua noviſſima ſunt μεταφυσικώτερα: Colligis ita, ſi omnes termini hujus progreſſionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. actu exiſtunt, etiam exiſtere infiniteſimum, & qui eum ſequuntur. Reſpondeo; collectionem eſſe probam, ſi concedatur aliquem revera eſſe terminum infiniteſimum, aut poſt-infiniteſimum, id ipſum vero a me non concedi.

Quæris 1°. Quid per materiam per ſe, ſeu materiam primam ſive molem, a ſecunda diſtinctam, intelligam? Reſpondeo, id quod eſt mere paſſivum, atque ab animabus vel formis ſejunctum.

Quæris 2°. Quid mihi hic ſit incompletum? Reſpondeo, paſſivum ſine activo, & activum ſine paſſivo.

3°. Petis, ut Tibi dividam portionem maſſæ in ſubſtantias ex quibus componitur: Reſpondeo, tot in ea eſſe ſubſtantias individuas, quot in ea ſunt animalia, ſive viventia, vel his analoga; itaque eodem modo divido, ut gregem ſive piſcinam, niſi quod liquidum interjectum inter animalia gregis aut inter piſces, itemque liquidum [imo & reliquam maſſam] in quolibet piſce vel animali contentam, rurſus ut novam piſcinam dividi debere arbitror, & ſic in infinitum.

4°. Monadem completam, ſeu ſubſtantiam ſingularem voco, non tam animam quàm ipſum animal aut analogum, anima vel forma, & corpore organico præditum.

5°. Quæris quouſque progrediendum, ut habeamus aliquid quod ſit ſubſtantia, non ſubſtantiæ? Reſpondeo, talia ſtatim offerri etiam ſine ſubdiviſione, & unumquodque animal tale eſſe. Neque enim ego, Tu, ille componimur ex partibus corporis noſtri.

6°. Vereris ne materia componatur ex non quantis. Reſpondeo, non magis eam componi ex animabus, quam ex punctis.

Quanto plura quæres, eo magis videbis connexionem firmitatemque ſententiæ, non levi conſideratione, ſed poſt diuturnam a longo tempore tractationem & retractationem tandem conſtitutæ, & fortaſſe aliquando non minus probabis hæc μεταφυσικώτερα, quam illa δυνάμικα.

Dnus. BAYLE auctor Dictionarii duobus in folio voluminibus editi, qui olim *Novellis Reipublicæ Litterariæ* operam dederat, cum

cum non in Philosophia minus quam Historia valeat, lectis quibusdam meis Philosophicis in *Diario Gallico* & *Batavo*, objectiones quasdam humanissime propositas inseruit Dictionario suo, voce Rorarius: Eas cum nuper legissem, responsionem modestam misi Dno. Basnagio, ut si videatur inserat suæ *Historiæ Operum Eruditorum*, modo Dnus. Bayle assentiatur. Hic responsionem meam secum communicatam sibi non tantum pulchram, sed & efficacem [*fortem*, ut Gallica vox habet] videri, significavit ipse Litteris humanissimis ad me datis, editionemque ejus gratissimam sibi fore professus est. Quæram an adhuc aliquid ipsum moretur? 1698 Sept.

Pro *Varignonianis* notitiis, quæ sane mihi valde placent, gratias ago. Oenometrum *Langlosianum* compositius est, quam ut facile homines id sint in ordinariam praxin deducturi. Quoniam *Historia Academiæ Scientiarum Regiæ* typis paratur, rogo ut quæras, sed tanquam per Te, an aliqua & qualis ibi mentio mei, cui reapse ibi datus fuit a Rege locus, etsi tunc cum introducendus eram, Johannes Fridericus Dux *Brunswicensis* me evocarit ad se; quod ipsum tanquam Tibi notum addere potes, quo minus Dnus. Varignonius quæstionem miretur.

Nosse etiam velim quis Auctor *Historiæ*, utrum Dnus. *Abbas* Gallois, an Dnus. Fontanella qui nunc Secretarius est Academiæ, auctor Dialogorum de *Pluralitate Mundorum*; & utrum *Memoriæ Physico-Mathematicæ*, quæ cœptæ erant, nomine Academiæ continuentur?

Est quidam Machinista in Gallia, qui multa promittit, etiam in *Mercurio Elegante*; [*Mercure Galant*] ejus nomen nunc non succurrit, quantum intelligo nonnulla etiam executus est, sed aliorum spem facere voluit, quæ mihi non videntur possibilia. Interim peritia Enchiresium & rei manuariæ non contemnendus saltem videtur: Promiserat inter alia currum non evertendum [*un Carosse inversable*] an, & quid, tum in hoc, tum in aliis reapse præstiterit, quod alicujus sit momenti, a Dno. Varignonio discere poteris, cui facile etiam erit judicare ex dictis, quis ille qui designatur,

 gnatur,

gnatur, & quem nunc nominare non possum. Quod superest, vale & fave.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{20}{30}$. Septembris 1698.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Hæc jam dudum scripseram, una cum Examine *Gregoriano*, sed descriptionem & expeditionem varia distulere. Interea nomen Mechanici in mentem venit, credo GAROUST. * Adjeci & P. S. separatum, quod, si ita videbitur, Dno. VOLDERO communicare possis.

* *Rectius* DE LA GAROUSTE.

EPISTOLA LXXXI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De Catenariæ Gregorianæ *Paralogismis. De infinito, monadibus, & natura corporea. De lege continuitatis. De infinitis infinitorum ordinibus. De lege gravitatis* Newtoniana. *De figura fornicibus aptissima.*

Vir Celeberrime & Amplissime! Fautor Honoratissime!

1698 Octob. QUod litteræ meæ, quas perditas credideras, iterum comparuerint, valdę lætor. Paralogismos *Gregorianos*, quos ego fugitiva perlustratione monstraveram, egregie in ordinem redegisti. Meo judicio, minime male facies, si examen tuum quantocius *Lipsiam* miseris, *Actis* † inserendum, ut videat GREGORIUS, ubi illud legerit, se Calculum infinitesimalem nondum in tanta perfectione

† *Animadversio ad Davidis* GREGORII *Schediasma de Catenaria. &c.* Act. Er. 1699. Febr. p. 87.

fectione possidere, ut quidem sibi imaginatur. Viso Tuo examine, eoque perlecto attentius, nunc magis confirmor in eo, quod statim conjectabam; quod scilicet pedem calceo accommodaverit; id est, quod ex solutione nostra quæsiverit modum solvendi. Et hoc credo ipsi ansam dedisse, ut tot paralogismos consueret, illosque, apparenti specie fascinatus, videre nequiverit, vel potius videre noluerit, quos procul dubio ab alio commissos vidisset. 1698 Octob.

Μεταφυσικώτερα Tua non improbo, & facile illa admittam, ut Tua *δυναμικά*; si modo claram eorum ideam mihi excitaveris. Responsiones Tuæ, pro hoc, nimis sunt Laconicæ; suntque definitiones potius quam explicationes. Videtur mihi contradictio dicere omnes terminos hujus progressionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, &c. existere, infinitesimos autem revera non esse terminos: si enim infinitesimi non existunt, tunc finiti tantum sunt termini; Ergo non omnes existunt, contra hypothesim. Video quidem quo tendas, nempe non posse perveniri ad terminum infinitesimum; quia quamdiu continuamus progressionem, tamdiu termini sunt finitæ magnitudinis. Sed non quæritur quousque nos, sive actu, sive conceptu, pervenire possimus; sed quousque a natura ipsa jam perventum fuerit. Concedis autem omnes terminos simul existere, ergo sane etiam infinitesimus existit, & revera existit; vel revera est; nisi enim esset, non existeret.

1°. Per materiam per se, seu materiam primariam, sive molem, a secunda distinctam, dicis Te intelligere id quod est mere passivum, atque ab animabus, vel formis sejunctum. Sed *Cartesianus*, qui formarum nullam habet ideam, quique corporis naturam in extensione unice ponit, hic Tibi replicaret, se nescire quid illud sit quod a formis sejunctum.

2°. Incompletum dicis Tibi esse activum sine passivo, & contra. Potuisses dicere materiam primam sine forma, & formam sine materia prima. Sed tunc *Cartesiano*, nullam distinctionem agnoscenti inter materiam & formam, eadem quæ in præcedenti difficultas orietur.

3°. Si concedatur massam esse congeriem viventium, vel his anolo-

1698 Octob. analogorum, poterit dividi in ſubſtantias individuas. Sed *Carteſiani* negabunt in Corporibus eſſe aliquid animæ analogum, vel quid illud ſit analogum, clare ſibi explicari poſtulabunt.

4°. Si Monas completa, ſeu ſubſtantia ſingularis, Tibi eſt animal, vel analogum, anima, vel forma, & corpore organico præditum; negabunt *Carteſiani*, præter hominem talem monadem dari.

5°. Concedo non longe progrediendum, ut habeamus ſubſtantiam, non ſubſtantias; unuſquiſque enim homo talis eſt. Sed corpus quod vocant inanimatum, ut ſilex, quouſque dividendus erit, ut habeas ſubſtantiam, non ſubſtantias? ſilex enim, ſecundum Te, non eſt ſubſtantia, ſed ſubſtantiæ.

6°. Nunquam veritus ſum ne materia, ſcilicet ſecunda, componatur ex non quantis, ſed ne componatur ex punctis forma præditis, quia minimum corpuſculum, licet infinite exiguum, non ſubſtantiam facit, ſed ſubſtantias. Oportet ergo ſubſtantiam ſingularem eſſe punctum cum forma, non quantum cum forma; alias in plures divideretur.

Video rem totam eo recidere, ut formam, vel illud animæ analogum, clare explices. Non quidem alienus ſum admittere tertium quid in corpore, præter extenſionem & impenetrabilitatem, ſi modo æque claram ejus ideam habere poſſim, ac habeo extenſionis & animæ. Scio etiam tertium illud poſſe exiſtere, licet ejus eſſentiam clare concipere nequeam; contra quorumdam *Carteſianorum* pertinaciam, qui ſtatuunt id quod clare & diſtincte a nobis concipi non poteſt, non exiſtere; oporteret enim prius demonſtraverint, ſe clare & diſtincte percipere poſſe quicquid exiſtit: alias non minus abſurde concludunt, quam cæcus faceret, qui ex eo quod ſolem nunquam viderit, neque videre poſſit, argumentari vellet, illum non exiſtere: Id quod non tantum ſemel ipſis objeci, ſed antiquæ cantilenæ obſtinate inhærentes, ſurdi ſunt, ſuamque perpetuo obtrudunt regulam claræ & diſtinctæ perceptionis, juxta quam rem eſſe, vel non eſſe, judicant. In horum igitur gratiam, Tuam pleniorem explicationem deſiderarem, ut data occaſione illis occurrere poſſim. Quid? ſi vocabulum *animæ analogi* vel *formæ*, quod odio-

odiosum est, relinqueres; illamque diceres consistere in conatu quodam insito, vel vi primitus impressa, sine qua corpus non esset corpus, sed pura extensio uniformis, quam ita appellares, loco Veterum materiæ primæ; absolveres credo negotium longe facilius, atque felicius assuefaceres novis terminis mentem *Cartesianam*, efferatam quasi veteribus. Possent enim hinc omnia Tua dynamica æque facile salvari; & naturæ phænomena, ut elasticitas corporum, impenetrabilitas, conservatio quantitatis virium, &c. explicari. Nec puto *Cartesianos* talem conatum insitum, seu vim impressam jure exsibilare posse: coguntur enim, & ipsi, statuere materiam cum motu simul creatam esse. Quid ni ergo etiam cum motu infinite tardo? id est, cum conatu ad motum, seu cum tali vi, quam Tu vocas aptissime mortuam, qua unamquamque materiæ particulam, quantumvis exiguam, donatam esse existimarem, & quidem pro diversitate complicationis horum conatuum, directionum, seu tendentiarum, putarem diversa hujusmodi corpora oriri. Sane non ausim negare creationem universi constitisse duntaxat in varia ista impressione conatuum; nolim tamen asserere extensionem illam uniformem, seu materiam primam, præextitisse ab æterno; adeoque cum Deo unicam substantiam fuisse; ne spinosizare videar: ipsa enim illa diffusione virium, extensionem concreatam esse, mihi sufficit dicere.

1698 Octob.

Transmisi statim Voldero post-scriptum tuum; † habebit, non dubito, etiam suos scrupulos, circa ea quæ de formis dicis. Consului ipsi, ut ad Te ipsum scribat, si quid monendum haberet. Quæ ibi habes de continuitatis lege, impense mihi placuerunt; sed quod observas celeritatem non uno impetu imprimi, sed a quiete per omnes gradus intermedios ascendere, Te non invito dixerim, etiam me habuisse tales cogitationes jam a longis annis. Id vero paulo aliter exprimere solebam, dicendo Naturam nihil ex abrupto, neque incipere, neque finire; eodem modo ac omnis curva principio & fine careat; id est, vel in se redeat, vel utrinque in infinitum abeat, salvis tamen nonnullis exceptionibus; hinc quantitates

† *Idcirco illud deest.*

1698 Octob. titates successive crescentes vel decrescentes, non solum non per saltus augeri & diminui posse, sed etiam non posse generari, vel destrui uno impetu. Et hoc fere est ex præcipuis rationibus, quod me induxit ad conjecturandum, annon forte tot gradus infinitatis sint supra nostrum magnitudinum genus, quot infra sunt gradus infinitæ parvitatis; vel saltem [quia infinitum & infinite parvum in rerum natura Tibi displicet] quemadmodum microscopiis detegimus animalcula incomparabiliter minora quam nos, & cætera animalia nobis consueta; & procul dubio ista animalcula, si & sua haberent microscopia, iterum detegerent alia se iterum incomparabiliter minora, & sic porro: Unde cum naturæ non sit consentaneum, secundum meum principium, ex abrupto subsistere, colligo [rideas, per me licet,] alia animalia in rerum natura posse existere, quæ nobis, nostrisque animalibus consuetis, in eadem ratione majora sint, in qua illa animalcula microscopio detecta sunt minora, quæque nos, in nostro mundo, suo microscopio intueri solent, ut nos intuemur talia animalcula innumera. Et alia rursus esse posse animalia incomparabiliter illis majora, sicque tot gradus pono ascendendo, quot inveni descendendo. Nam non video [ut jam serio loquar] cur nos, nostraque animalia, supremum gradum constituere deberemus; quia, ut clare patet, etiam talia animalcula incomparabiliter nobis minora, sibi adulari possent, se suamque guttulam, in qua habitant, totum constituere universum; si modo haberent animam rationalem, ut ita ratiocinari possent. Concede, vel finge saltem, granulum piperis [in quo pariter multæ myriades animalculorum, teste LEUWENHOECKIO, & mea ipsa autopsia, microscopio conspiciuntur] habere suas partes nostri mundi partibus per totum proportionales; scilicet suum Solem, suas Stellas fixas, suos Planetas cum Satellitibus, suam Tellurem ornatam montibus, campis, sylvis, rupibus, fluviis, lacubus, maribus, variisque animalibus: Credisne hos pipericolas, qui omnia ista objecta sub eodem visionis angulo, adeoque sub eadem magnitudine aspicerent, qua nobis nostra apparent, non eodem jure putare posse; extra suum granulum nihil esse, quo nos putamus nostrum mundum omnia complecti? Nam quamnam, quæso, haberent

berent rationem, seu quam experientiam, quæ contrarium ipsis persuaderet, quæque misellis istis animalculis ostenderet alium esse mundum suo incomparabiliter majorem, cum incolis pariter incomparabiliter majoribus? Jam vero, si isti pipericolæ id scire non possint; quis ergo nostrum scit, annon totus noster Mundus aspectabilis forte sit granum, respectu alius incomparaliter majoris? Est enim utrobique par ratio. Sed aliæ mihi sunt conjecturæ, quas hic recensere nimis longum foret; quæ tamen ex ea lege naturæ, nunquam abrupte incipientis vel desinentis, egregie confirmantur. 1698 Octob.

Incidit jam, de lege continuitatis cogitanti, quod apud Newtonum aliosque legisse memini, gravitatem corporum extra Terram in duplicata esse reciproce ratione distantiarum a centro, sed intra Terram esse directe in simplici ratione distantiarum. Hoc mihi videtur aliquo modo adversari continuitatis legi, dum incrementa gravitatis in ipsa Terræ superficie quasi per saltum degenerarent in decrementa. Nam si ad rectam, a centro Terræ prodeuntem, concipiantur applicari aliæ rectæ gravitatem in singulis a centro distantiis exprimentes; erunt applicatæ extra Terram ad Hyperbolam secundi gradus, intra Terram vero ad lineam rectam; adeoque hæ duæ lineæ in mutua intersectione, ubi ab una ad aliam transitur vel saltatur, continuitatis legem violant. Quid de hoc sentias, intelligere velim.

Quæ scire desideras, curabo diligenter ut discam a Varignonio; Oblitus es remittere mihi ejus litteras. Examen solutionis *Gregoriana*, quia non petis, non remitto; si vero nullam ejus descriptionem retinuisti, remittam statim; fac modo id rescisçam quantocyus. Vale & fave.

Amplitudini Tuæ

Devotissimo

J. Bernoulli.

P. S. Quod Catenaria vera sit curvatura fornicis, ex eo patet,

 quod

1698 Octob. quod omnes partes catenæ dum libere pendent, eum situm sumunt, ut inter se æquilibrentur; unde fit ut si tota catena, eum partium situm retinens, circa horizontalem converti intelligatur, donec verticaliter sursum erigatur, partes catenæ eundem situm etiamnum servare debeant; cum enim nulla pars alteram magis extrorsum urgeat, quam ipsa ab ea extrorsum urgetur, propterea quod directio gravitatis partium non fuerit mutata, sed tantum in contrarium determinata; sane altera alteram suffulcire, adeoque tota catena, licet flexilis, ita arcuata manere debet, ad instar fornicis rigidi: Et sic catenaria aptissima est figura fornici concilianda. Sed fallitur GREGORIUS quod putat ordinariam Catenariam, quam scilicet inducit catena uniformis, solam aptam esse pro fornice. Liquet enim clare fornicem posse esse circularem, parabolicum, & cujuscunque alterius figuræ, si modo lapides quadratarii [*les voussoirs*] fornicem constituentes, debiti ponderis fiant, pro ratione ponderis partium catenæ non uniformis, quæ libere pendendo eamdem curvaturam, quam fornici dare voluimus, indueret. Ridiculum hinc est, quod GREGORIUS dicit fornices vulgares non ad figuram Catenariæ ordinariæ factos, ideo tantum se sustentare, quod cum habeant sat magnam latitudinem, semper intra suos limbos contineant veram curvaturam catenæ. Si enim hoc esset, interior fornicis limbus semper corrueret; vel si murus extrueretur super duabus columnis, non totus murus corruere deberet, sed portio tantum quædam excidere, quæ cavitatem relinqueret, ad figuram catenæ formatam: Et sic natura sponte sibi faceret fornicem; quod lepidum est. LA HIRIUS in suo *Tractatu Mechanico*, Propp. 123. 124 & 125, affinitatem inter fornices & Catenarias suboluisse videtur; nec tamen rem satis assequi potuit, nostro Calculo destitutus. Vidit aliquid; quid autem viderit, ipse non intelligit.

EPIS-

EPISTOLA LXXXII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad praecedentem.

De infinito, natura corporis & Monadibus. De lege gravitatis Newtoniana. *De fornicum curvatura. Varia.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Quia Tibi non displicent animadversiones meae in *Gregorianam* Catenariae solutionem, rogo ut eas Tuis inclusas ad Dnum. Menckenium pro *Actis* mittas; ita ut necesse non sit ei indicare a quo sint. Dudum enim pollicitus est se *Actis* inserturum, si quid sine stomacho moneremus. 1698 Novemb.

Dicis meas circa μεταφυσικώτερα illa nimis esse laconicas; sed dedi, ni fallor, operam, ut loquerer accurate & rotunde. Quod si quae dubitationes supersunt, iis respondendo satisfacere conabor. Ais me attulisse definitiones potius quam explicationes. Sed utinam semper definitiones afferrentur! nam illis explicationes virtute continentur. Quod terminos infinitesimos attinet, videtur mihi non tantum ad eos non posse perveniri, sed etiam eos non esse in natura, id est, non esse possibiles; alioqui fateor, ut jam dixi, si concederem esse posse, concederem esse. Videndum ergo quanam ratione demonstrari possit, possibilem exempli gratia, esse lineam rectam infinitam, & tamen utrinque terminatam. Sed ad tuos numeros venio.

Ad 1. Cum dixi materiam primam esse id quod est mere passivum, & ab animabus seu formis sejunctum, bis idem dixi; seu perinde est ac si dixissem esse mere passivam & ab omni activitate sejunctam. Formae enim nihil aliud mihi sunt, quam Activitates seu Entelechiae, & substantiales quidem sunt Entelechiae primitivae.

Ad 2. Malui dicere incompletum esse activum sine passivo, & passi-

1698 Nov. passivum sine activo, quam materiam sine forma, vel contra; ut scilicet potius explicatum ponerem quam explicandum, & ut quodammodo uterer consilio tuo antequam dares, quando minus activitatum, quam formarum nomine offenditur vulgus Neotericorum.

Ad 3. *Cartesianos* negantes in corporibus esse aliquid animæ analogum non debemus morari, cum nullas habeant rationes negationis; nec sequitur quod non possumus imaginari id non esse.

Ad 4. Ridiculum mihi dudum visum est, naturam rerum adeo fuisse pauperem vel avaram, ut soli massæ tantillæ, qualis humanorum est corporum in hoc nostro Globo prospiceret de animabus; cum posset omnibus, nullo ad cætera sua destinata inpedimento.

Ad 5. Quousque silex dividi debeat, ut occurrant corpora organica, adeoque Monades, haud scio; sed facile agnosco ignorantiam in his nostram nihil præjudicare naturæ.

Ad 6. Puto nullum dari minimum Animal vel vivens, nullum sine corpore organico, nullum cujus corpus non dividatur rursum in plures substantias. Ergo nunquam devenitur ad puncta viva, seu formis prædita.

Si claram habes ideam animæ, habebis & formæ; est enim idem genus, species variæ.

Optime judicas, quæ nos distincte & clare non percipimus, ideo rejici non debere.

Boni illi *Cartesiani*, quidquid jactent de sua clara & distincta perceptione, mihi ne extensionem quidem sic percipere videntur.

Cæterum, si animam vel formam concipiamus ut primam activitatem, cujus modificatione oriantur vires secundæ, ut extensionis modificatione oriuntur figuræ, puto nos intellectui sic satis consulere.

Nempe ejus, quod essentia sua mere passivum est, nullæ possunt esse modificationes activæ; quoniam modificationes limitant magis, quam augent, vel addunt, itaque præter extensionem, quæ est sedes vel principium figurarum, debemus ponere sedem vel πρῶτον δεκτικὸν actionum, nempe animam, formam, vitam, entelechiam primam, ut appellare lubebit.

Prorsus

Prorsus probo consilium Tuum, ut apud *Cartesianos*, aut simi- 1698
les, abstineamus mentione materiæ primæ & formæ substantialis, Nov.
contenti mentione massæ per se activæ, & entelechiæ, seu activitatis primitivæ, animæ, vitæ.

Optime etiam sentis complicatione virium insitarum oriri corpora omnia in mundo, nec dubito quin materiæ ipsi coævæ sint vires; quin arbitror, materiam per se sine viribus subsistere non posse. Puto tamen, aliud esse entelechias primitivas, seu vitas, quam vires mortuas, quæ & ipsæmet fortasse semper oriuntur ex vivis; ut apparet, cum conatus recedendi a centro, qui inter vires mortuas computari debet, oritur ex vi viva circulationis. At vita, vel entelechia, aliquid amplius est, quam conatus aliquis simplex mortuus; puto enim inesse ei & perceptionem & appetitionem, quasi in animali, utramque respondentem præsenti statui organorum.

Plane ad mentem meam differis, mutationes non fieri per saltum. Præterea non irrideo, sed plane profiteor esse animalia in mundo, tanto majora nostris, quanto nostra sunt majora illis microscopiorum animalculis. Neque ullum natura terminum novit. Et fieri potest vicissim, imo fieri debet, ut sint in minimis pulvisculis, imo Atomulis, Mundi nostro non inferiores pulchritudine & varietate; neque quicquam prohibet, quod magis mirum videri possit, animalia moriendo in tales mundos transferri; ego enim mortem nihil aliud puto esse, quam animalis contractionem.

Gravitatem esse in duplicata ratione reciproca distantiarum, mea dudum fuit sententia ante Newtoni opus, in quam deveni non tantum successu a posteriori, sed etiam ratione a priori, quam miror ipsi non animadversam. Nempe abstrahendo animam a physica ratione gravitatis, manendoque in terminis notionis mathematicæ, considero gravitatem, ut attractionem factam radiis quibusdam, seu lineis attractivis, exeuntibus a centro attrahente; itaque, ut in radiis luminis densitates illuminationis, ita in gravitatibus attractionis, uno verbo, radiationis densitates erunt in ratione duplicata reciproca distantiarum a radiante. Puto autem eandem legem nonnisi per gradus mutari appropinquando ad Terram, ubi scilicet ip-
sum

1698 Nov. TAB. XV. ſum radians minus incipit habere naturam puncti; ſed ubi in Terram ipſam inciditur, poteſt nova Lex oriri, ut ſi (*Fig.* 86.) corpus, quod ivit curva AB poſt eat recta BC, ob novam cauſam. Quanquam omnia expendendo, ne ſic quidem violari debeat Lex continuitatis, nec reipſe violetur, etſi linea mutetur.

Quod Catenaria ſit linea fornicis, fortaſſe locum habet, ſi fornix eſt ſuperficies, ſeu ſine craſſitie vel altitudine, ita ut ejus ſectio verticalis ſit linea, ſed ſi habeat craſſitiem, ita ut ſectio ſit ſuperficies & in ipſa craſſitie concipiatur, quod impediat rupturam, ut in trabibus a GALILÆO, & paulo adhuc aliter a me olim in *Actis Lipſienſium* * conſideratis, patet alia in conſiderationem venire debere, atque adeo lineas fornicum adhuc eſſe quærendas, cum illi plus quam uno extremo ſuſtentantur. Nam cum gravia in longitudinem ex uno fulcro projecta ſunt; tunc per ea quæ olim a me expoſita ſunt, principium ſolvendi habetur.

Litteras VARIGNONII me remiſiſſe putabam, ſed præter opinionem adhuc penes me repertas nunc remitto cum actione gratiarum.

Nihil ne amplius a Dno. *Marchione* HOSPITALIO, Dno. VARIGNONIO, aliiſque amicis ad Te pervenit, unde proficere poſſim? Quid Dnus *Marchio* HOSPITALIUS? an in valetudinis gratiam meditationibus nuncium remiſit? an ſibi canit & Muſis?

Quid Analytica noſtra? In quibus indies aliquid utile a Te præſtari non dubito. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 18. Novembr. 1698.

Deditiſſimus

G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Problemata Dno. *Fratri* vel aliis propoſita, vellem & Dno. NEWTONO communicari curaſſes, pro incremento Scientiæ.

* *Demonſtrationes novæ de Reſiſtentia Solidorum*, *Auctore G. G. L.* Act. Er. 1684. Jul. pag. 319.

tiæ. Accipio jam & *Acta Octobris*, ubi Tua quædam, † in quibus, cum alia valde, tum id probo, quod Dno. *Fratri* illic ita respondes, ut nullam offensæ causam jure habere possit. Unum addo me Tibi novam applicationem Calculi differentialis non quasi pro Tuis communicasse (ut ex dictis videri potest) sed cum celare possem, libere, & generose, & ut esset qui uteretur, quando id mihi non satis licet. 1698 Nov.

EPISTOLA LXXXIII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De natura corporis & monadibus. De infinito. De lege gravitatis. De fornicum figura. Hortatur ut meditationes dynamicas in lucem emittat.

Vir Amplissime & Celeberrime! Fautor Honoratissime!

ANimadversiones Tuas in *Gregorianam* solutionem ad *Acta* mittam prima occasione, qua Dno. Menckenio scripturus sum; sed vereor ne Te Auctorem suspicetur, ubi viderit correctiunculas hinc inde Tua manu scriptas. 1698 Dec.

Concedo definitionibus contineri explicationes: sed ostendendum est quod sint definitiones rei, non nominis; secus enim non magis sequitur rem ita se se habere in rerum natura, quam sequitur Centaurum existere, ex eo quod illum clare definio, & explico, dicendo; Centaurus est animal corpus habens ex humano & equino compositum: quamvis non negem, quin forte talis aliquis existat, cum multa existant monstra. Ita pariter tua μεταφυσικώτερα possunt esse vera; sed veritatis demonstrationem expeto. Vellem, exempli gratia, mihi demonstres corpora, quæ vulgus vocat inanimata,

+ *Theorema universale rectificationi linearum Curvarum inserviens*, &c. Act. Erud. 1698. Oct. p. 462. *vel* Opp. Tom. I. N°. L. pag. 149.
Item, *Annotata in solutiones Problematum quorundam horum* &c. A. E. 1698. Oct. p. 466. *vel* Opp. Tom. I. N°. LII. pag. 262.

1698 Decemb. ſuas habere perceptiones & appetitiones, adeoque ſuas animas, & quidem unumquodvis innumeras; quatenus ſcilicet conflatum eſt ex innumeris ſubſtantiis, ſeu Monadibus.

Sed litterarum Tuarum filum ſequor. Quantum ad terminos infiniteſimos, aut Tu me, aut ego Te non intelligo. Dico, ſi infiniteſimi non eſſent in natura, tunc utique forent tantum termini numero finiti; ergo non omnes exiſterent, contra hypotheſim. Sed ecce hoc facio dilemma: Numerus terminorum in natura exiſtentium, aut finitus eſt, aut infinitus; tertium non datur. Si finitus; tunc non omnes exiſtunt, quia poſſent dari plures: ſi infinitus; ergo eo ipſo exiſtit infiniteſimus & qui eum ſequuntur. Dices forſan eſſe terminos numero infinitos, & tamen ſingulos finitæ magnitudinis; ceu manifeſtum eſt in hac progreſſione $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. ubi neceſſario infiniti ſunt termini magnitudinis finitæ; nam ſi tantum eſſent finiti numero termini magnitudinis finitæ; tunc numerus terminorum foret determinatus; quod eſt abſurdum. At ſi ex altera facie progreſſionem conſidero, quatenus ſi infiniti numero ſunt termini, neceſſario infiniteſimus exiſtit, concludo hunc neceſſario debere eſſe infinities minorem termino finito; id eſt, debere eſſe infinite parvum. Jam ad numeros pergo.

1°. Dicis materiam primam [quam ego extenſionem uniformem, ſeu potius informem nominarem] eſſe id quod eſt mere paſſivum, & ab animabus ſeu formis ſejunctum: Et alibi dicis materiæ primæ coævas eſſe vires, ſeu formas; illamque ſine his ſubſiſtere non poſſe. Ergo paſſivum ab activo realiter ſejunctum non eſt, nec eſſe poteſt, ſed mentis tantum abſtractione, quatenus illud ſine hoc conſiderare poſſum, ut in Geometricis facimus. Sed quæro tamen, annon Deus per omnipotentiam ſuam potuiſſet creare paſſivum ſine activo, ſeu materiam primam ſine animabus, vel formis; ſiquidem animas, nempe Spiritus & Angelos, ſine materia, ſeu activum ſine paſſivo, creaverit. Et poſito potuiſſe creare ſolam extenſionem, ſeu materiam ſine forma, annon tuto ſupponere poſſemus vacuum? ibi enim eſſet extenſum ſine corpore, & tamen

men non esset nihil, sed substantia extensa distincta a corpore ; 1698
unde hoc vacuum a *Cartesianorum* quidem argumento refelli non Dec.
posset.

2°. Capio mentem Tuam de incompleto: sed si activum sine passivo, seu forma sine materia, est incompletum quid; sequi videtur, Spiritus, Angelos, & ipsum Deum, qui Ens est completissimum, esse tamen incompletos. Video autem quid sis responsurus, nempe Te hic intelligere incompletum compositionis, non perfectionis. Dispice tamen, ne malevolis & invidis cavillandi, & in deteriorem sensum detorquendi, caufam suggeras.

3°. Verissimum est *Cartesianos* negantes in corporibus esse aliquid animæ analogum, suæ negationis non habere rationem; sed affirmanti incumbit probare. Interim non dicunt, quantum ego scio, quod non possumus imaginari, id non esse: potuissent enim quotidiana experientia falsitatis convinci; cum cæcus, exempli gratia, Solem imaginari non possit, & tamen Sol existat: sed id non esse asserunt, quod clare & distincte concipere nequimus; quod tamen, meo judicio, æque absurdum est ac prius.

4°. Ergo datur particula silicis, quæ substantia est, non substantiæ. Dixeras autem corpus quodvis non esse substantiam, sed substantias.

5°. Quia arbitrabar Te in ea esse sententia, nullum corpusculum tam exiguum esse, quod possit dici unam esse substantiam, & non plures; merito me inferre credebam, substantiam singularem non esse extensam, sed merum punctum. Sed ex articulo præcedente, video Te comprehendere substantias in substantia.

Non valet consequentia; si habeo ideam animæ, ergo & formæ; quia est idem genus, & species variæ. Habeo ideam animalis, tanquam generis, non vero hujus, vel illius speciei animalis, quod nunquam, nec pictum, nec vivum vidi: Habeo etiam unius speciei ideam, ita ut non statim alterius speciei ideam habeam, licet sub eodem genere contineantur.

Fateor nonnullas vires mortuas oriri ex vivis, ut conatus recidendi a centro, vis elastri, gravitas, &c. sed non ideo sequitur, non posse dari etiam conatus primitivos & insitos; & nisi in hujusmodi

1698 Dec. di conatu posueris Tuas Entelechias primitivas, seu vitas, fateor iterum me non posse assequi in quo illas consistere facias. Dicis ipsis inesse perceptionem & appetitionem; Ergo quid diutius cunctaris? Dic Entelechias illas Tuas esse animas rationales; solius enim animæ rationalis est percipere & appetere, uti *Cartesiani* dicunt; & sic Te dispensabunt ab ulteriori explicatione, sed negabunt hujusmodi animas corporibus competere.

Non miror Te mihi assentiri, quod conjecerim esse animalia in mundo, tanto majora nostris, quanto nostra sunt majora illis microspiorum animalculis: Tibi enim totum universum est congeries animalium. Sed ego magis proprie id sumo, statuendo illa animalia, nobis nostrisque animalibus incomparabiliter majora, esse in sensu vulgari animalia, habentia corpus & membra nostris similia, vel eorum loco aliquid analogi; interque illa animalia, esse etiam intelligentia, seu ratione utentia, id est, homines. Sed revera mirum mihi videtur, quod dicis animam moriendo transferri in mundum, suo, in quo vixit, incomparabiliter minorem; & mortem nihil aliud esse quam animalis contractionem: hoc quodammodo sapit *μετεμψύχωσιν Pythagoricam.*

Prout Mathematice explicas gravitatem, abstrahendo a causis physicis, video clare legem rationis duplicatæ reciprocæ distantiarum a radiante, nonnisi per gradus mutari appropinquando ad Terram; ubi scilicet ipsum radians minus incipit habere rationem puncti. Sed non video, ubi in ipsam Terram inciditur, novam Legem oriri: est enim intra & extra Terram eadem causa gravitatis; præterea, radians naturam puncti perpetuo servat; id enim est centrum Terræ, versus quod gravia detruduntur. Unde non capio quod NEWTONUS dicit, non centrum tantum, sed omnia reliqua puncta attrahere. Demus autem talem attractionem singulis Terræ punctis inesse, adeoque illam agere in corpora cum sunt extra Terram eadem lege, qua quando sunt intra eandem; non video cur, in ipsa Terræ superficie, talis subitanea mutatio accidere debeat.

Puto Catenariam etiam locum habere posse pro figura fornicis, licet cum crassitie, vel altitudine fiat, si modo centra gravitatis lapidum

pidum quadratariorum fornicem constituentium, sint in Catenaria; 1698
palam enim est catenam flexilem, quamvis illa sit nullius ponderis, Dec.
si in æqualibus distantiis oneretur ponderibus æqualibus, etiam tunc debitam suam figuram induere: seu si concipias ipsam catenam gravem & flexilem, sed cum crassitie aliqua, pendere ab extremitatibus, & sponte induere curvaturam; & si jam intelligas in hoc situ rigescere, & circa horizontalem sursum converti, habebis hoc modo fornicem cum crassitie, qui sola dispositione partium se sustentat; ad quam, ni fallor, in constructione fornicis primario attendendum est: quantillum enim illud sit, quod tenacitas materiæ contribuit, vel exinde patet, quod fornix, ni debitam habeat figuram proprio pondere, utcunque exiguo, corruat, etsi nullum aliud onus superstructum adhuc sit.

Diu est quod nihil litterarum acceperim a Dno. Varignonio, quod miror; jam ante ferias ipsi misi replicationem *Diario* * inferendam, ad responsionem *Fratris*; mihi tunc quidem rescripserat se eam accepisse, cum jam sub prælo essent ultimæ pagellæ, quæ imprimendæ adhuc erant ante ferias; quibus autem finitis, se sine mora schediasma meum imprimi curaturum. Interim jam a Divi Martini festo redincepti sunt labores, nec tamen mihi scribit quid factum sit: vereor ut valeat.

Annus est & plus quod ne γρῦ quidem ab Hospitalio acceperim. At ecce epistolam Volderi, ubi invenies nonnullas objectiones contra Tua dynamica, plerasque jam a Papino & me olim factas; si ad eas respondere dignaris, poteris ad me dirigere responsionem, quam ipsi mittam. Quamvis consultius putarem, ut Tute ad ipsum scriberes; unde libertatem captaret ad Te vicissim scribendi. Meo judicio, etiam non male egeris, si Dynamicam Tuam, quam supprimis, & cujus specimina tantum hactenus dedisti, plene in lucem emiseris, una cum Tuis responsionibus ad objectiones Tibi factas; ita enim, semel pro semper, labore respondendi defungeris, qui Tibi alias ad nauseam usque repetendus erit. Accenderet spero nobis lucem pro meliori Meta-

Ggg 3 physica;

† *Inserta est* 40°. *Diario a. d.* 8. *Dec. Vid.* Opp. Tom. I. N°. XLVII. p. 231.

1698 Dec. physica; quam si ab ullo alio a Te inprimis exspectamus; quamque etiam Te promisisse memini. Habemus duas Philosophias, Veterem & Novam, sed in utramque extremitatem peccantes; quid si Tu tertiam conderes, servando medium inter utramque? Te enim aptiorem neminem novi ad hoc negotium. Non dubito quin systema, si quod componeres, felicissimum haberet successum. Sunt enim in *Batavis* nonnulli egregii Viri, qui hunc Tuum ingenii fœtum fortiter foverent, & defenderent; interque illos ipse Dominus VOLDERUS, qui si Tua principia, (cum *Cartesiana* tanquam insufficientia, ut ipse mihi fassus est, jam a longo tempore deseruerit) semel probe percepisset, ea gnaviter propagaret, suisque discipulis, quorum semper insignem numerum habet, adeo inculcaret, ut forte brevi dominium haberet supra Philosophiam *Cartesianam*, & *Aristotelicam*, illasque quasi reconciliaret. Rogo Te etiam atque etiam, ut de hoc cogites, deque Orbe philosophico bene mereas. Consule quæso nobis, & posteritati; Tuoque nomini exige monumentum.

. . . .

Ob pressam scriptionem in margine non satis intelligo an displiceat, quod in *Actis* mentionem fecerim novæ Tuæ applicationis Calculi differentialis; ignosce mihi; id non feci animo derogandi Tibi, sed potius inventum Tuum exaggerandi; nec puto me dixisse quod id mihi communicaveris pro meis, sed ex occasione meorum, quod ipse agnoscere videris in litteris Tuis. Da igitur veniam, si hac in parte peccavi; rei circumstantia id postulabat. Potuisses me celare; non nego: Ego vero generosius me egisse puto, si quid communicavero, quam si celassem. Vale & fave.

Groningæ 6. Decembris 1698.

Amplitudini Tuæ

Devotissimo

J. BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA LXXXIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De infinito, Natura Corporis & Monadibus. Varia.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

CUm Domini Volderi epiſtola Tibi ſcripta pene unice ad mea pertineat, conſilium Tuum ſecutus ipſe reſpondi. Vereor tamen ne nimis prolixe; ſed malim in hanc partem peccare, & contrahendi otium non fuit. Rogo autem ut reſponſionem meam tranſmittas, & ubi eam firmare, illuſtrare, imo & corrigere opus videbitur, id ne omittas. Nunc ad Tuas venio, ubi cogor eſſe brevior, cum non ſatis ad ambas ſuppetat tempus. 1698 Dec.

Hactenus quædam per modum hypotheſeos affirmo, quæ demonſtrare majoris molis foret: & ſic interim explicationes vel definitiones pro demonſtrationibus ſufficiunt, modo phænomena faveant.

Non tam dico corpora, quæ vulgo inanimata vocantur [ut ſilices] habere perceptionem & appetitum quam ipſis talia quæ habeant ineſſe, ut vermes caſeo.

De Infiniteſimis res huc redit, ut probetur hæc quam adhibes, propoſitio : Si infiniti numero ſunt termini in ſerie, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. exiſtit infiniteſimus. Quid enim, ſi quilibet eorum ſit finitus, & aſſignabili intervallorum numero diſtans a primo? Nec video quid impediat concipi ſeriem conflatam non niſi ex terminis magnitudine finitis, ſed numero infinitis.

Recte judicas, paſſivum ab activo in creaturis nunquam actu ſejunctum eſſe; quid Deus potuerit, definire non auſim. Paſſivum ſolum, & vacuum, ſi non pugnant cum ipſius potentia, ſaltem pugna-

1698 pugnare videntur cum ipſius ſapientia; nec certum eſt, Deo ex-
Dec. cepto, dari Intelligentias plane ſeparatas. Et Patres plurimi in contrarium inclinavere, etiam Angelis corpora tribuentes.

Deus haud dubie eſt purus actus, quia eſt perfectiſſimus; ſed imperfecta ſunt paſſiva, & ſi aliter concipias, ſumuntur incomplete.

Homo ſubſtantia eſt; corpus ejus, ſeu materia, eſt ſubſtantiæ; idem de vivente quod in ſilice latet, dicerem.

Ut nos Analogia noſtræ animæ quodammodo concipimus alias animas & intelligentias; ita volui analogia animarum concipiendas utcunque alias, ſi quæ ſunt, Entelechias primitivas; a noſtro ſenſu nimis remotas: perfecte non concipi fateor.

Animas omnes, atque Entelechias, eſſe rationales minime neceſſe eſt; qui ſic colligunt *Carteſiani* mihi nimis præcipites videntur in judicando de ignotis ex notis.

Etiam ego facile admiſerim dari animalia in ſenſu vulgi noſtris incomparabiliter majora; & dicebam aliquando per jocum, poſſe eſſe ſyſtéma aliquod noſtro ſimile, quod ſit horologium portatile Gigantis maximi.

Quoniam indicaſſe me puto, & publice etiam profeſſus ſum nec incipere nec perire naturaliter poſſe Entelechias, ſeu, ut ita dicam Atomos ſubſtantiæ; & corporis etiam organici deſtructionem nihil aliud eſſe, quam organorum involutionem; poſſibilitas illa tranſlationis in ſyſtema exiguum, ubi omnia æque bene, imo magis eſſe poſſent quam in noſtro, ex mea ſententia patet. Sed non procedo ultra poſſibilitatem. Μετεμψύχωσιν in novum animal non probo, ſed μεταμόρφωσιν, αὔξησιν, μείωσιν ejuſdem animalis. Cæterum cum de origine animæ, aut animalis mutationibus, locutus ſum, diſerte ſum proteſtatus de animæ rationalis origine & ſtatu nihil a me definiri, Regnumque Gratiæ peculiares habere leges, præter eas quibus gubernatur Regnum Naturæ.

Non examinavi quid NEWTONUS habet de lege attractionis intra Terram, & inclino interim, ut judicio Tuo accedam. Terræ autem partes quoque, ut magnetis attrahere, veriſimile puto. De fornice res mihi altioris indaginis videtur; nec dubito Te, ubi animum intenderis, optime ejus formam poſſe definire.

Domi-

Dominum *Marchionem* Hospitalium ad Te non scripsisse miror, cum quo alias crebro commutabat litteras. Velim id non ab invaletudine, aut mutato animo, sed ab occupationibus oriri. 1698 Decemb.

Paraenesim Tuam, ut mea edam, tanquam verae benevolentiae signum accipio, & vellem per omnia expectationi satisfacere posse. Id facillimum est, ut edam quae cum viris Doctis contuli per litteras. Interea conabimur progredi, neque mediocria ego mihi promitto ab ingenii Tui ope. Non sum ita factus, ut statim movear, si quid forte amicus dixit frigidiuscule, aut hoc a malo animo profectum putem. Tantum malebam videri sponte quam commercio egisse. Vale.

Dabam *Hanoverae* 17. Decembris 1698.

Deditissimus
G. G. Leibnitius.

P. S. Imminentem annum novum faustum & felicem precor.

EPISTOLA LXXXV.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad praecedentem.

De virium aestimatione. De Infinito, & Natura Corporis. De Dei libertate. Varia.

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Misi Domino Voldero responsionem Tuam; efficaciter & & nitide rem exposuisti; religio mihi fuisset vel minimum immutare. Pro potestate tamen, quam mihi concessisti, adjeci nonnulla eorum, quae olim inter nos agitata fuere; ea nimirum quae ad convincendum aptiora mihi visa sunt, qualia judicavi esse Tua argu- 1699 Januar.

1699 Januar. menta a priori: Actio faciens duplum tempore simplo est dupla [virtualiter] actionis facientis duplum tempore duplo &c. Item demonstrationem Tuam, qua demonstrasti corpus sua vi, qua ascendere potest uno tractu ad altitudinem 4 pedum, posse efficere ut corpus idem, vel æquales, ascendat ad eandem altitudinem per vices. Hoc enim inprimis necessarium duxi; cum alias VOLDERUS dubitare potuisset, an elevare libram L ad 4 pedes; ideo præcise idem sit, quod elevare 4 Libras A, C, E, G, ad unum pedem; quia utrobique quater fiat elevatio unius libræ ad unum pedem. Id enim, quod illæ elevationes non sunt similes, id est, quod pedes LM, MN, NP, PQ, inæqualibus, pedes vero AB, CD, EF, GH, æqualibus temporibus percurrentur, potuisset scrupulum injicere vacillanti adhuc; quem vero mox deferet, ubi videbit revera eandem potentiam requiri, sive libra uno saltu elevetur ad Q, sive per singulos pedes LM, MN, NP, PQ, novo impetu concepto ascendat. Communicavi præterea modum meum determinandi Centrum oscillationis, ex principio conservationis virium; monuique ex pulcherrimo consensu cum *Hugeniano* Theoremate ab omnibus admisso, elucescere veritatem hujus Principii. Tandem etiam ipsi exposui meum quondam actionis materiæ gravificæ explicandæ modum; ut si forte negotium facesseret vulgaris explicatio, meam tantisper substitueret. Spero interim VOLDERUM parti nostræ accessurum, ubi omnia sedulo perpendere voluerit; quod si fiet, pro haud mediocri lucro id reputabo; præsertim si felix successus incitamento Tibi esset ad meditata Tua, quorum quædam frustatim tantum dedisti, jam plene edenda, posthabitis omnibus vulgi præjudiciis, & imperitorum hominum censuris. Velim consideres, initio non quærendos esse turbæ plausus, sed æquiorum judicum, licet paucorum, suffragia unice respicienda. Quocirca libenter hic repeterem, quæ nuper monui & rogavi, si Te movere possem; sed nescio quid Te induxerit ad opinandum, quasi dixerim frigidiuscule, quod ardentissimo tamen animo mihi concidit. Fac prout libuerit, ut vel sponte, vel commercio egisse videaris; modo partus Tuus tandem in lucem veniat; nil refert qua via. Ad reliqua litterarum Tuarum ita breviter respondeo.

Con-

Concedent *Cartesiani* silici, cæterisque corporibus inanimatis, posse inesse animalcula, ut vermes caseo: sed quemadmodum vermes non componunt materiam casei, seu id quod est caseus, utpote aliunde in illum translati, vel ex ovulis, seu semine generati; ita negabunt illa animalcula, quæ forte hospitantur in silice, ideo facere materiam silicis, seu id quod est silex. 1699 Januar.

Propositionem hanc; si infiniti numero sunt termini in serie, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. existit infinitesimus (quam adhuc probandam mihi superesse ais, ad demonstrationem perficiendam existentiæ quantitatis infinite parvæ;) ita facile probo: si decem sunt termini, existit utique decimus; si centum sunt termini, existit utique centisimus; si mille sunt termini, existit utique millesimus; ergo si numero infinito sunt termini, existit infinitesimus.

Nondum video rationem cur passivum solum, seu vacuum pugnet cum Dei sapientia; hoc si demonstrares, jam sufficeret ad probandam impossibilitatem vacui. Quodcunque enim Dei sapientiæ non convenit; etiam ipsius potentiæ non convenire putem. Video Te inclinare in opinionem, quod neque Angeli, nec aliæ Intelligentiæ dantur [Deo excepto] plane separatæ a corporibus. Optarim eam mihi aperias fusius; & simul explices, quibus ergo Corporibus Anima nostra post mortem alligetur. Hac occasione incidit mihi in memoriam, quod jam olim mihi scripsisti. Te nimirum habere mirabilem opinionem de commercio animæ & corporis, per quam putes omnia intelligibiliter explicari. Eum quoque tum, prima occasione mihi perscribere promiseras; quod tamen hactenus oblitus es: patere igitur ut Tui jam promissi Te commonefaciam.

Si Entelechiæ nec incipiunt, nec pereunt naturaliter; inceperunt tamen existere in universali creatione. Ais corporis organici destructionem nihil aliud esse quam organorum involutionem: Ego dicerem potius organorum dissolutionem.

Accepi nuper litteras a Dno. Varignonio, sed nihil novi perscripsit. Exemplar unum *Historiæ Academiæ scientiarum*, conscriptæ a Dno. Du Hamel, mihi dono destinatum, *Amstelodamum*

misit; sed ibi nuperrime nondum appulit. Ubi illud nactus fuero, Tibi perscribam an, & qua'is de Te mentio fiat.

Transmisi etiam *Lipsiam* .uum *Examen Solutionis Gregorianæ* †, quod a celeberrimo quoda.n Mathematico mihi communicatum esse dixeram. Vale, & novum hunc annum pluresque sequentes feliciter age.

Groningæ 7. Jan. 1699.

Amplitudini Tuæ

Devotissimus

J. BERNOULLI.

† 1699. Febr. pag. 87.

EPISTOLA LXXXVI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad præcedentem.

De virium æstimatione. De Monadibus. De Dei libertate & Sapientia. De harmonia præstabilita. De Mente humana. De infinitesimis quantitatibus.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

. . . .

1699 Januar. GRatissimum est, quod quæ ad rem conferre visa sunt Epistolæ ad Dum. VOLDERUM meæ adjecisti. Fecisti id non tantum potestate a me concessa, sed & jure Tuo. Præterea quid alios morari queat, Tu melius me ipso intelligere potes. Et comparare talia soleo, cum eo quod sæpe animadverti, in corrigendis Typographicis exemplis; plerumque enim aliena facilius corrigimus, quam nostra. Eodem modo facilius animadvertit alius, quam nos ipsi, quid nostris

nostris desit, præsertim qui antea iisdem difficultatibus obhæsit, seque demum expedivit. 1699 Januar.

Rogo ut mihi ea, quæ Dno. Voldero ad hanc rem facientia scripsisti communices, quo integra habeam, quæ illi expendenda sunt data. Præsertim cum credibile sit, responsionem ejus omnia esse complexuram.

Tuomet exemplo judico, in argumento a priori de æstimatione actionis, illud virtualiter melius inposterum omissum iri, tantum enim turbat, ut dubitet aliquis, quasi diversa ratio æstimationis, in una alteraque præmissarum, non possit conclusione in unam conjungi. Et quemadmodum simpliciter dicere sufficit: Ducatus est duplum Thaleri, Thalerus est duplum semithaleri, ergo Ducatus est quadruplum semithaleri, ita ut non sit opus adjicere Ducatum esse duplum Thaleri virtualiter, Thalerum vero esse duplum semithaleri formaliter; eodem modo sufficit hic procedi.

Tuus quoque modus determinandi Centrum oscillationis ex principio nostro sane elegantissimus plurimum affert lucis & confirmationis.

Modus quo agit materia gravifica, adhuc altioris est indaginis, neque contemnenda sunt quæ in eam rem attulisti, etsi mihi ea consideranti subnatæ sint dubitationes complures, quod in re a sensibus remota & difficili mirum non est.

Gratias & egi Tibi, & ago, quod existimationi meæ velificaris plurimum, & ad ea me agenda hortaris, per quæ nostra magis propagari & confirmari possint. Quod te frigidiuscule scripsisse dixeram, non ad hæc pertinet, sed ad ea quæ habebas nuperrime in *Actis Eruditorum*; sed jam significavi me non eo esse animo, ut talia sinistre accipiam.

Fateor in caseo esse partes, in quibus nulli apparent vermes, sed quid impedit, in illis rursus esse alios vermes aut plantas subtiliores, aliave sui generis organica, & sic in infinitum; ita ut nihil sit in caseo a talibus liberum. Id de silice dici potest.

Non dico vacuum, atomum, aliaque id genus esse impossibilia, sed tantum non esse divinæ sapientiæ consentanea; etsi enim nihil Deus producturus sit, nisi secundum leges sapientiæ; diversa ta-

1699 Januar. men ſunt objecta potentiæ & ſapientiæ, nec confundenda. Deus ex infinitis poſſibilibus eligit pro ſapientia ſua, quod eſt convenientiſſimum. Vacuum autem [perinde ac atomos] relinquere loca ſterilia atque inculta manifeſtum eſt; in quibus tamen, ſalvis cæteris omnibus, aliquid adhuc produci potuiſſet. Talia vero relinqui cum ſapientia pugnat. Et nihil in natura ſterile atque incultum eſſe puto, etſi multa nobis talia videantur.

Entelechiæ haud dubie ortum habent cum cæteris rebus communem; naturaliter autem de novo produci non poſſunt.

Fateor quædam organa animalium, nempe craſſa, deſtrui ac diſſolvi, ſed puto ſemper aliqua ſupereſſe, ita ut maneat animal, [involutum licet] priore aduc Entelechia præditum; nam nec migrant Entelechiæ de materia in materiam, neque unquam ſine organis reperiuntur.

Meas cogitationes de commercio vel unione Entelechiæ & corporis expoſitas jam reperies in *Diariis Eruditorum Pariſino* * & *Hagienſi* Dni. BASNAGII †. Loca nunc ſtatim indicare non poſſum. Puto tamen partim eſſe anni 1696, partim 1697 & 1698. Verum citata omnia reperies in *Dictionario* Domini BAYLII; ubi mei meminit, quod index Alphabeticus cuique Tomo [duo enim ſunt] ſubjectus indicabit. Mihi enim jam liber non eſt ad manus; *Groningæ* autem haberi non dubito.

De anima humana nihil pronuntiare auſim, quoad originem, pariter ac ſtatum poſt mortem; quia animæ rationales ſeu intelligentes, qualis noſtra eſt, peculiari ratione ad imaginem Dei conditæ, diverſis longe legibus gubernantur, quam eæ quæ intellectu carent. Neque enim Deus ſe erga Spiritus habet, tantum ut artifex ad opus, ſed etiam ut Princeps ad Subditos. Sed circa Entelechias naturalibus tantum

* *Syſtème nouveau de la nature & de la communication des ſubſtances, auſſi-bien que de l'union qu'il y a entre l'ame & le corps, par M. D. L.* Journal des Sçavans. 1695. 25., Journ. du 27e. Juin.

Eclairciſſement du nouveau Syſtème de la communication des ſubſtances, &c. Ibid. 1696. 14 Journ du 2 Avr. & 15e. Journ du 11e. Avr.

Extrait d'une lettre de Mr. LEIBNITZ *ſur ſon hypothèſe de Philoſophie, &c.* Ibid. 1696. 38e Journ. du 19. Nov.

† *Remarques ſur l'harmonie de l'ame & du Corps.* Hiſt. des Ouvr. des Sc. 1696. Fevr. pag. 274.

tantum legibus subjectas, censeo, ut dixi, eas nunquam penitus ab omni materia semel accepta divelli. *1699* Januar.

Frustra quæsivi apud Typographos librum cui Titulus; *Doutes de Mr.* BERNIER *sur la Philosophie*, in Gallia ante annos aliquot editum & mihi visum, sed nunc non repertum. Vellem autem ideo iterum legere, quia ille *Gassendistarum* fuit Princeps; sed paulo ante mortem libello hoc edito ingenue professus est, in quibus nec GASSENDUS, nec CARTESIUS satisfaciant. Has dubitationes ejus breviter tollere & solutiones meas Animadversionibus in CARTESIUM quas vidisti, [quarum editionem amici flagitant] addere vellem. Si liber forte alicubi reperiri potest; quæso ut me juves, quo eum vel ad tempus impetrare possim. Quod superest, vale, & fave.

Dabam *Hanoveræ* Januarii *1699*.

Deditissimus
G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Pene oblitus eram quæstionis, utrum extent infinitesima? Dubitari potest an sequatur: Positis terminis decem, datur decimus: Ergo positis terminis infinitis, datur infinitesimus. Dicet enim fortasse aliquis, argumentum de finito ad infinitum hic non valere. Et cum dicitur dari infinita, non dicitur dari eorum numerum terminatum, sed dari plura quovis numero terminato; & pari jure conclusurum iri: Inter numeros decem datur ultimus, qui & maximus eorum; Ergo & inter omnes numeros datur ultimus, qui & maximus omnium numerorum; qualem tamen numerum puto implicare contradictionem. Ipse quoque non respondes meæ objectioni, cum monueram posse intelligi seriem infinitam numeris finitis constantem. Manifestum enim est, etsi poneretur Tecum series ex finitis pariter & infinitis constans, hoc posito posse intelligi partem ejus constantem ex meris finitis, reliqua parte infinitas complectente omissa. Hæc autem series ex meris finitis esset quidem & ipsa infinita, sed tamen nullum haberet terminum infinitesimum. . . . .

EPIS-

EPISTOLA LXXXVII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad penultimam.

De Monadibus. De Dei libertate. De vacuo & Atomis. De Commercio animæ cum corpore. De Entelechiarum ortu & interitu. De infinitesimis. De Historia Academiæ & Parisiensis. De Phosphoro.

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

. . . .

1699 Febr. A Dno. VOLDERO nihil hactenus responsi accepi; forte formalem parat responsionem. Quæ Tuis litteris ad eum de meo adjeci, Tibi jam in præcedentibus meis omnia narravi. Scrupulos quosdam meos, quos putabam VOLDERO etiam subnasci posse, & Tuas eorum enodationes, ex commercio nostro simpliciter excerptas, ipsi transmisi; partim ut novo concipiendi labori parcerem; partim ut historiam & modum, quo Tuus sum factus videret, nec temere forte, vel ad Tibi complacendum, in castra Tua transiisse me existimaret. In Argumento Tuo a priori de æstimatione actionis, illud virtualiter, & formaliter non omisi, quia de voluntate Tua illud inposterum omittendi non constabat; si tamen VOLDERUM hoc turbaverit, poteris ipsi respondere, quod mihi responderas. Etiamsi modus meus actionis gravificæ explicandæ non sit certus, nec certo unquam demonstrari possit, valere tamen potest pro hypothesi, tanquam res possibilis, ad os obturandum PAPINO, suique similibus, qui, ad convellendam veram æstimationem virium, objectioni ex vulgari gravitatis concipiendæ modo petitæ pertinaciter inhærent.

Non nego in partibus casei, in quibus nulli apparent vermes, posse tamen inesse subtiliores vermes aut plantas. Sed illud quæro, an isti vermes, præsertim conspicui, forment substantiam & essentiam

essentiam casei, id est, an sint id, sine quo caseus non esset caseus? An vero sint tantum de substantia peregrina ad caseum non pertinente? quemadmodum plerique arbitrantur generari ex seminibus a muscis, culicibus, aliisque insectis in caseum asportatis. 1696 Febr.

Si vacuum, atomus, aliaque id genus divinæ sapientiæ non sunt consentanea, eo ipso sane ea & impossibilia crederem. Quidquid repugnat Dei sapientiæ, ejus etiam potentiæ repugnat. Attributa enim Dei sunt ipse Deus. Secus, si Deus posset facere, quæ insipienter vel imprudenter facta essent, Deus non foret perfectus, quia se ipsum imperfectum redderet; Adeoque potentia & sapientia Divina, earumque objecta, nonnisi ratione & diverso concipiendi modo differunt: in Deo vero neutiquam. Deus ex infinitis possibilibus non eligit, sed elegit ab æterno; imo omnia possibilia elegit, ... id est prævidit, decrevit, vel ordinavit: quæ enim non decrevit, illa & ipsi Deo sunt impossibilia; quia in se impossibile est sua decreta revocare; alias sibi non constaret, & foret mutabilis. Sed transeamus hæc, & decidenda relinquamus Theologis, ne ad intricatam prædestinationis quæstionem delabamur: nollem enim Tecum Religionis certamen inire. Demonstrandum igitur restat, quod vacuum perinde ac atomi, licet relinquant loca sterilia, ideo pugnent cum sapientia Divina. Quid enim? si aliquis diceret talem sterilitatem necessariam fuisse ad motum producendum, vel generatim ad systema mundi creandum. Ante mundum conditum, præter Deum, nihil utique erat: adeoque erat sterilitas universalis, [si ita loqui fas est:] jam vero, si hæc cum Dei sapientia non pugnavit, cur sterilia quædam exigua pugnent, non satis patet. Præterea si loca dantur vacua, non ideo statim sunt sterilia; sterile enim est quod inutile est: illa autem suum usum habent, sicuti pori in spongia, & foramina in reti, vel cribro omnino sunt necessaria ad usum quem præstare debent. Difficile igitur demonstratu esse puto, vacua & atomos pugnare cum sapientia divina, & tanto difficilius, quia ejus fines & scopi omnes fere nos latent. Quid? si semper miseri nos homines judicare vellemus ab iis quæ nobis, bene maleve, prudenter vel imprudenter facta videntur, quid Dei sapientiæ conveniat, quid non; dicere deberemus

1699 Febr. beremus Deum non debere permittere, ut peccata committantur; considero enim peccata inter actiones bonas, seu prava hominum cogitata inter bona, ut loca vacua inter corpora. Imo peccatum, cum non tantum nihil boni, sed minus quam nihil, id est malum producat; potest dici sterilius quam vacuum, quod simpliciter nihil corporis habet. Cæterum tamen, & ipse credo, nulla nec vacua, nec atomos in rerum natura dari, nihilque sterile & incultum: semper enim existimavi quod, quamdiu nec per revelationem, nec per rationem, vel experientiam contrarium habemus, tunc ea conjecturando statuere debemus, quæ Dei gloriam, potentiam, & majestatem quam maxime nobis sistant & repræsentent. Ita, malim credere universum infinitum, quam finitum; plenum, quam vacuum; organizata, quam atomos; animalium infinitorum graduum varietatem, quam eorum certum numerum &c.

Quæ de commercio & unione animæ & corporis in *Diario Hagiensi* Dni. BASNAGII exposuisti, non vidi: vidi autem *Diarium Parisinum* an. 1696 †, ubi tres notas harmoniæ modos, primus est influentiæ, secundus assistentiæ, & tertius præordinationis: Rejectis primo, & secundo; primo nimirum, quia concipi non possit, quomodo anima in corpus, vel corpus in animam possit agere, ope specierum, vel qualitatum immaterialium; secundo vero, quia esset accersere Deum ex machina, qui singulis momentis interveniat in re omnino naturali & ordinaria: amplecteris tertium, tanquam elegantissimum & Deo dignissimum; quia sufficit Deum utramque substantiam, animam scilicet & corpus, tanta cum perfectione & exactitudine formasse, ut alterum cum altero conspiret, suas tantum proprias leges observando; perinde ac duo horologia accuratissima perpetuo conveniunt, sine ulteriori interventu artificis horologiarii. Sed hæc sententia non omnino nova mihi videtur: Eundem fere in modum a nostro Dno. BRAUNIO sæpius explicari audivi, & ni fallor continetur in ejus systemate Theologico; ego quoque similiter fere rem semper concepi. Legi locum in *Dictionario* Dni. BAYLII, ubi hæc citat; inter alias objectiones quas facit, depre-

† Vide Epist. præced.

deprehendo maximi momenti, quando objicit, mentem, tanquam ens simplex, non posse habere tot diversas modificationes a se ipsa, nisi illas ab alio ente potentiore successive recipiat; sed in eodem statu debere manere, & de una eademque re perpetuo cogitare, quamdiu ab eo non disturbaretur; Non secus ac corpus a suo motu rectilineari nunquam sponte deflectit: Item mentem suas cogitationes futuras non praenosse; quod tamen fieri deberet, si illas a se, non vero immediate a Deo per causas occasionales haberet. *1696* Febr.

Mihi videor satis capere opinionem Tuam de ortu Entelechiarum: Dicis, per mortem animalium, organa tantum crassa destrui ac dissolvi, sed subtilissima manere, in quibus eadem Entelechia semper operetur, ita ut maneat idem numero animal; quia, ut dicis Entelechia non migrat de materia in materiam. Hinc sequentem formo Theoriam. Dedit, in creatione universi, Deus cuique Entelechiae certam portiunculam materiae, seu certum corpusculum organicum, quod perpetuo informet, vel animet, & nunquam deserat, ipsi sit essentialis, ut ab ea plane separari non possit; jam vero illud animalculi corpusculum, quod stamina vocabo corporis animalis postea generati, generatione & nutritione evolvitur & expanditur, per modum receptionis novae & peregrinae materiae se in poros insinuantis; unde paulatim crescit, & tandem ex animalculo invisibili fit visibile. Haec autem evolutio ita peragi censenda, ut per corpus maximi etiam animalis aequabiliter diffusa sint illa prima stamina, quantumvis exigua; non secus ac concipio minimum granulum salis in magna quantitate aquae dilutum, se se uniformiter cum aqua permiscere; sic ut nulla sit aquae gutta, quae non, pro ratione suae molis, de isto granulo participet. Porro si corpus animalis crescere desiit, rursus paulatim decrescit, dum partes illae adventitiae iterum abeunt, seu quomodocunque destruuntur. Evidens est stamina illa, quae per magnum spatium diffusa erant, jam iterum contrahi & cogi in minus; donec absumptis omnibus peregrinis, tandem in pristinam suam parvitatem redigatur. Eo sane modo, quo concipio granulum salis, in aqua dilutum, paulatim aquae exsiccatione, coctione, evaporatione vel percolatione iterum pedetentim coarctari, & tandem in minimam suam massulam condensari.

1699 Febr. ſari. Hæc ni fallor ex Tua fluunt hypotheſi; belle ſane, ſi nullis premerentur difficultatibus. Mors, ſecundum illam, nihil aliud eſſet quam paulatina partium craſſiorum corporis deſtructio; interim illa accidit repente, ſi non momento, [dicis enim apud Baylium momentum mortis obſervari non poſſe] ſaltem morula adeo exigua, ut tempus deſtructionis tempori generationis & nutritionis minime poſſit comparari, & hic natura debeat quaſi per ſaltum operari. Diſpicias igitur, quomodo Lex continuitatis ſalvari poſſit, dum poſt diuturnam adeo evolutionem, animal, nictu velut oculi, in priſtinam involvatur parvitatem. Et dicas mihi, cur natura noluerit, ut tantundem temporis ad involutionem requireretur quam ad evolutionem. Præterea, ſi ante mortem animalis ipſi crus aliudve membrum amputetur, eo ipſo aliquid de ſtaminibus amputatum ſeparatur; & ſic poſt reductionem animalis ad ſuum exiguitatis ſtatum, illud quod de ſtaminibus ſeparatum fuit, aut redditur animalculo, aut non redditur. Si prius; velim mihi explices, qua virtute illud, quod, exempli gratia, in Americam tranſportatum eſſet, rediret in Europam, ſeque cum animalculo conjungeret. Si poſterius; tunc illud, quod amputatione membri ſtaminibus animalis ademptum eſt, eidem non eſt eſſentiale, neque neceſſarium; contra hypotheſin: nota quod hæc omnia fundentur in eo quod Entelechia non migrat de materia in materiam. Sic, exempli gratia, equus poſt mortem in illud animalculum reductum eſt, eodem corpuſculo, & eadem Entelechia gaudens, quod ante generationem ejus in ſemine equino latitabat, quodque microſcopii tantum ope potuiſſet videri. Hinc aliquid lepidum mihi venit in mentem; nimirum quod non ſit impoſſibile, unum idemque animal bis, ſeu pluries, generari & mori poſſe: ſi enim per mortem animalis nihil fit aliud, quam ejus reductio in priſtinum ſuum ſtatum; quid impedit quominus denuo evolvatur per accretionem novæ materiæ? Quis ergo ſcit, an non Bucephalus, ab Alexandri Magni tempore, multoties fuerit in mundo, ſub viſibili equi forma? Ad id enim tantum opus eſſet, ut equus aliquis, cum pabulo, aut potione imperceptibilem Bucephalum abſorberet, eumque cum reliquis ſeminis ſui animaculis permiſceret. Vides me nihil dicere de homine, quia

quia animam humanam ipse excipis; vellem tamen mihi certi quid diceres de statu animæ post mortem. Videris enim credere, etiam tunc, eam non sine corpore esse; sicuti nec Angelos nec Dæmones. 1699 Febr.

Inquisivi in librum Domini Bernierii; sed nondum inveni.

Mihi videtur clarissimum, si dantur termini infiniti, dabitur etiam terminus infinitesimus [non dico ultimus] & qui eum sequantur.

Miror quod nolis admittere magnitudinem infinite parvam; cum tamen cogaris admittere numerum infinitum, quem etiam memini Te alibi negare.

Accepi nuper Dni. Hamelii *Historiam Academiæ scientiarum*: Tui mentionem bis tantum factam reperi, his verbis, pag. 152. *Vir omni eruditione clarus Dominus* Leibnitz, *horologium a se inventum asportari jussit ut æquabilem illius motum exhiberet: Jam in ante anno* 1675, *machinam numeralem protulerat, cujus ope quatuor Regulæ Arithmeticæ magna facilitate perficiuntur*; p. 178. *Die* 15. 9^bris *Dominus* Hugens *phosphorum liquidum a Domino* Leibnitz *ad se missum exhibuit.*

De Calculo differentiali, qui in Academiam per *Marchionem* Hospitalium introductus fuerit, & a quo ille hauserit, ne γρῦ quidem memorat. . . . .

Ad quæsita Tua Varignonius in litteris ad me nuper scriptis ita respondet. „*Vous n'y* [*Histor. Acad.*] *trouverez pas Monsieur* Leibnitz, *comme de l'Academie* &c.

Frater meus tandem in depositum remisit Varignonio 50 Imperiales mihi, si Problemata sua solverem promissos: Te vero, ut Judicem solum, etiamnum recusat; non obstante quod, in ultima mea responsione, ipsi concesserim jus appellandi ad reliquos Judices, quos nominat, me vero hoc ipso jure privaverim, & acquiescere promiserim Tuæ sententiæ, etiam si contra me decisurus esses . . . . Remitte, obsecro, mihi methodorum mearum scriptum prius, quod amissum putaveras, ut tertio describendi onere sublever, si in *Galliam* aliove mittendum. Vale.

Groningæ 11°. Februar. 1699.

Amplitudini Tuæ Devotissimus

Bernoulli.

 P. S.

P. S. De Phoſphoro illo liquido, quem HUGENIO communicaveras, vellem me informares, quomodo componatur; an & quantum Tibi ſuperſit; num ejus me quoque poſſis participem reddere, vel aliunde pro me emere. *Frater* meus junior ex *Anglia* mihi attulit Phoſphorum ſolidum, ſed hic communis eſt, liquidum hactenus nondum vidi.

EPISTOLA LXXXVIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De libertate Dei, & permiſſione mali. De Commercio animæ cum Corpore. De Entelechiis. De infinitefimis. De Phoſphoro. Gratulatur BERNOULLIO, *quod ſit in Academiam Pariſienſem adſcitus.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

. . . .

1699 Febr. POſſibilia ſunt quæ non implicant contradictionem. Actualia nihil aliud ſunt quam poſſibilia [omnibus comparatis] optima; itaque quæ minus perfecta ideo non ſunt impoſſibilia; diſtinguendum enim inter ea, quæ Deus poteſt, & quæ vult: poteſt omnia, vult optima. Cum dico, Deum eligere ex infinitis poſſibilibus, idem volo quod Tu, cum dicis eum ab æterno elegiſſe. Quod vero ais, impoſſibile ipſi eſſe ſua decreta revocare, atque adeo alia creare, quam quæ creare decrevit; id pertinet ad neceſſitatem hypotheticam, de qua non eſt ſermo.

Scio multos dubitare, ut inſinuas, an nos poſſimus cognoſcere quid ſit Sapientiæ Juſtitiæque divinæ conforme. Puto tamen, ut Geometria noſtra & Arithmetica etiam apud Deum obtinent; ita generales boni juſtique leges, mathematicæ certitudinis, & apud Deum quoque validas eſſe. Et ſi malum in ſe ſit minus quam nihilum,

hilum, tamen conjunctum interdum aliis effectu realitatem auget, ut umbræ prosunt in pictura, & dissonantiæ in Musica. Nec dubium mihi est, tum demum permissa esse mala, cum plus inde nascitur boni. 1699 Febr.

Perplacet, quod mea sententia de unione & commercio Animæ & Corporis a Tuo & Dni. *Dis.* BRAUNII sensu non abhorret, sed eam non videntur satis percepisse qui hactenus rem pro inexplicabili & quasi miraculosa habuere; sic enim omnis, ni fallor, difficultas cessat.

Dno. BAYLIO mea responsio ad objectiones duas, quæ Tibi maximi momenti videntur, non displicuit. Etsi enim anima non constet ex partibus, exprimit tamen perceptionibus suis rem ex partibus constantem, nempe corpus. Hinc cum multas habeat perceptiones simul, & ex perceptionibus præsentibus naturali consequentia nascantur futuræ; mirum non est sponte ex anima fluere tot modificationes. Dubium etiam nullum est quin futuri status nostri jam aliquo modo in præsentibus involvantur, etsi ob multitudinem & exiguitatem comperceptionum distingui non possint.

Hinc & alia Dno. BAYLIO reposui, & Dnus. BASNAGIUS responsionem meam ultimo suo trimestri inserere * promittebat litteris, exeunte ni fallor autumno anni superioris, scriptis. Quod si factum non est, vereor ut prodierit ipsum trimestre, in quod rogo ut inquiras. Mitto ecce censendum Tibi, quod ***Diario Parisino*** destinavi, occasione Auctoris, qui putavit commercium animæ & corporis esse supernaturale, uti certe statuere debent, qui meam præformationis hypotesin non sequuntur ***Cartesiani.*** Quæso ut remittas schediasma hoc meum, ubi expenderis, ut ***Lutetiam*** ire possit.

In Tua expositione Theoriæ meæ de subjecta materia Entelechiarum, sunt aliqua quæ non ita asseverare ausim. In his enim, ubi certa haberi possunt, nolim hypothesibus uti; sufficit tamen summam rei teneri. Ad objectiones Tuas hæc responderim. Cum dico

* *Lettre de* M. LEIBNITZ *contenant un Eclairciſſement des difficultés que* M. BAYLE *a trouvées dans le Syſteme nouveau de l'union de l'ame & du corps.* Hist. des Ouv. des Sav. 1698. Juill. Art. 5. pag. 329.

1693 dico momentum mortis definiri non posse, simul significo Meta-
Febr. physico sensu nullum esse; nec video qui sequatur Legem continuitatis infringi, etsi hic brevi admodum tempore magna fiat mutatio, quod ipsum sæpe in natura fieri consentaneum est, præsertim in mortibus. Machinas enim compositas lente formari, facile turbari convenit. Sed sapientia Auctoris efficit, ut in summa rebus optime semper consulatur. Idem animal sæpius prodire in hoc Theatrum possibile est: sed tamen & contrarium possibile esse putem. Itaque hic nihil facile definit ratio. Altioris ista indaginis habeo.

Non respondes rationi meæ, quam allegavi, cur non sequatur, dantur termini infiniti, ergo infinitesimus. Nempe, quod concipere licet seriem multitudine infinitam, constantem ex meris terminis finitis, seu ordinariis progressionis geometricæ decrescentis: Concedo multitudinem infinitam, sed hæc multitudo non facit numerum, seu unum totum; nec aliud significat, quam plures esse terminos, quam designari possint; prorsus quemadmodum datur multitudo, seu complexus omnium numerorum; sed hæc multitudo non est numerus, nec unum totum.

Valde ago gratias, quod communices quæ Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS & Dnus. VARIGNONIUS ad Te scripsere, quæque notasti in libro Dni. DU HAMEL. Puto nonnihil erroris esse in relatione de Phosphoro; nam recordor etiam solidum Dno. HUGENIO a me fuisse missum. Et quoniam solidum esse communem, liquidum vero minus notum censes; scito utrumque eadem operatione prodire, nempe distillatione forti transit tandem liquor lutosus in speciem, in recipientem, & simul quædam partes solidiores parietibus vitri agnascuntur. Liquor autem mea opinione non lucet, nisi quatenus partibus solidis nonnihil dissolutis est imbutus. A multis annis nihil tale habui; cæterum non dubito ab iis qui solidum præbent, etiam liquidum haberi posse.

Etiam a Dno. HOSPITALIO accepi litteras in eum, quem scribis, sensum, itaque & Academiæ gratulor & mihi, quod Te quoque ascito Collegæ sumus.

Dnus. *Frater* Tuus non male facere videtur quod unum judicem recusat, neque ego facile in me judicium reciperem solus.

Cum

Cum Dnus. Tschirnhausius dudum Academiæ Regiæ membrum habitus sit, miror etiam nunc demum nominatum scribi. Vellem hac re animaretur ad inventa, quæ nos sperare jubet, publicanda; sed ita tamen ut suum etiam aliis tribuat, quemadmodum vellem parabolicorum arcuum inventionem Tibi tribuisset. Quod superest, vale & fave. *1699 Febr.*

Dabam *Hanoveræ* 14. Februarii 1699.

Deditissimus
G. G. Leibnitius.

Responsio deest.

EPISTOLA LXXXIX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De libertate Dei. De commercio animæ cum corpore. Varia. De Groningii historia Cycloidis. *De* Cluverio.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Ecce quid Dno. Voldero respondeam, modo ne nimis prolixe, quod Tu arbitrabere, & si quid tamen deesse videbitur, in tuis supplebis. Neque enim dubito quin id optime possis, neque facile est prævidere, quid alios turbare queat. Ausus etiam sum in Te rejicere onus satisfaciendi circa argumentum ab ascensu æquivalituro, sive continue fiat, sive per vices; quia non ita bene memini quæ olim ea de re inter nos acta, Litteræque ipsæ, inter alias disjectæ, non sunt in promptu. *1699 Mart.*

Circa Dei potentiam repeto quod dixi, posse eum omnia, velle nonnisi optima; nec video quid huic sententiæ obstet. Distinctio necessitatis hypotheticæ ab absoluta, & in Deo & in Creaturis mea sententia valet, rursusque non video quid obsit. Vacua & atomi mihi non videntur esse umbræ, sed maculæ, & quidem inexcusabiles,

1699 biles, quia nil juvant, cum ipsis sublatis alia omnia fieri possint quæ alias fiunt. Vulgatum illud, Non esse facienda mala, ut eveniant bona, falsum est, si nimis generaliter accipias. Sæpe mala, vel damnosa, & facere & pati oportet, majoris boni obtinendi, vel mali vitandi causa.

Mart.

Non aliam intelligo similitudinem inter sensationem & objectum, quam repræsentationis. Sed hanc non agnoscere *Cartesianos* passim ipsi indicant, idque inprimis manifeste facit Auctor, cui respondeo, adeo ut arbitrarium putet, quam sensationem dare animo Deus velit, ad qualitates sensibiles corporum exprimendas. Difficultas Tibi superesse videtur circa subitum transitum a calore, verbi gratia, ad frigus. Sed sciendum est, si nos corpus perfecte intelligeremus, in ipso nos transitum prævisuros; idem ergo fit in anima, quæ est corporis repræsentativa. Nulla ergo est mutatio per saltum; nisi in nostra opinione, quibus insensibiles transitus interjectos comprehendere non datur.

Non sine causa confusas perceptiones comparavi machinis naturæ, distinctis a machinis artis. Refertur hoc ad primum meum de his schediasma *Gallico Diario* * insertum; idque adeo verum est, ut machinæ artis possint cognosci perceptionibus distinctis, naturæ non nisi confusis, quia omnis machina naturæ infinita involvit organa.

Non mala est comparatio distinctarum & confusarum cum recta & curva, quia hæc infinitos habet flexus. Hoc tamen interest, quod curva infinitos habeat flexus quidem, uni tamen Legi finitæ distincte intelligibili submissos; quod in naturæ machinis locum habere nequit.

Dnus. MENCKENIUS mihi scripsit, se *Censuram Demonstrationis Gregorianæ de Catenaria*, *Actis* † inserturum. *Septembri* inseruit, quæ Dno. STURMIO Mathematico *Altdorfino* respondi §, qui in *Physica Electica* tueri voluit opinionem Cartesianorum, quod Creaturæ semper a Deo, velut ex Machina interveniente impellantur nec ipsæmet agant. De cætero nihil observavi in rem nostram.

Signi-

* 1695. 25. Journal. du 27. Juin.

† 1699. Febr. p. 87.

§ G. G. L. *De ipsa natura, sive de vi insita actionibusque Creaturarum, pro Dynamicis suis confirmandis, illustrandisque* Act. Er. 1698. Sept. pag. 427.

Significabo, ubi aliquid videro; quamvis *Acta* interim ad Te perventura credam. 1699 Mart.

Dno VARIGNONIO rogo, ut multas pro gratulatione a me gratias agas, significesque gaudere me talium Virorum Societate, eumque honorem judicare maximum. Si quid in Historia rerum gestarum, quam Tibi descripsit, cognitioni meæ convenire Tibi videbitur, rogo ut communices talium curioso. Sæpe enim hinc indoles hominum notescit.

Celeberrima illa Domina DE SCUDERI, cui ut innotescerem, PELISSONIUS olim fecit, misit mihi carmina funebria & sua & aliena in Psittacum, quem habebat; sed eo ingenio, ut quemadmodum ipsa scribit, vel solus sufficere potuerit automatis CARTESII refellendis.

Nescio an videris novum Diarii Eruditi genus, quod inscribitur *Nova Litteraria Maris Baltici.* Quæ ibi habentur mathematica schediasmata, inserta sunt a Dno. *Detlevo* CLUVERIO & a Dno. GRONINGIO.

Hunc Tibi visum scripsisti; etiam me salutavit anno abhinc. Dixi, mihi historiam Cycloïdis pro TORRICELLIO contra PASCALIUM scribere, tanti non videri; nam nec res adeo magna est, & quid ad *Germanum*, *Galli* vel *Itali* lites? Sed si omnino Historiam Cycloïdis moliretur, suasi adjiceret tot alia inventa circa hanc lineam, majoris longe momenti, ipsasque demonstrationes; sed vereor ne nimium ab eo petierim. Quæ in *Novis* illis *Maris Baltici Litterariis* habet, mediocria sunt. At Dnus. CLUVERIUS videtur ibi velle nobis tandem aditum dare aliquem ad mysteria sua. Verum enim vero res non maximas apparet adhuc ab eo verbis efferri magnificis. Videbimus an post hæc initia nos ad majora sit ducturus. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 14. Martii 1699.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

 P. S.

1699 Mart. P. S. Mitto primam solutionis Tuæ ad Fraterna postulata communicationem mihi factam. Epistolæ ad VOLDERUM responsoriæ nondum præsto est Apographum, nolui tamen hanc meam ad Te ideo differre, vel solutionis illius quam remitti desideras causa.

Responsio deest.

EPISTOLA XC.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM

Mittit nonnulla.

Vir celeberrime! Fautor Honoratissime!

1699 Mart. Ecce nunc tandem litteras meas responsorias, quas ut ad Dnum. VOLDERUM cures rogo, & sicubi opus videbitur tuis adjuves.

Adjicio quæ in novissimis, quæ ad me pervenere *Lipsiensium Actis* ad rem nostram pertinent, * quæ ut remittas peto, mihique interpreteris ea, quæ Dominus *Frater* Tuus circa Loxodromicam meis adjecit. † Mihi enim, fateor, non licet ista rimari attentius, prout merentur.

Nunc quod prioribus addam non habeo, nisi ut valeas ex sententia, & in præclaris meditationibus tuis pergas.

Dabam *Hanoveræ* 24. Martii 1699.

Deditissimus
G. G. LEIBNITIUS.

† *Animadversio ad* Dav. GREGORII *Schediasma de Catenaria*, &c A. E. 1699. Febr. pag. 87.

§ *Circinus proportionum nauticus*, *Scala loxodromica instructus* &c. A. E. 1699. Febr. p 91. vel Opp. N°. 91. pag. 868.

EPIS-

EPISTOLA XCI.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De Dei libertate, deque peccato. De Academia Scientiarum Parisiensi. De differentiis, quarum exponentes fracti vel irrationales. Varia. Mittit Schedam CLUVERII.

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

SI Deus potest omnia; sed non vult ex omnibus, nisi quædam tantum, nempe optima, differre oportet etiam in ipso posse & velle. Vacua non possunt usum habere, quem non & habeant fluida, quantum satis subtilia, eademque simul alium habent usum, quem vacua habere non possunt. Peccatorum permissionem esse contra sapientiam nullo tali argumento ostendi potest. *1699* Mai.

Curvæ, quæ libera manu ducuntur, se habent ut machinæ naturales, idest nulli possunt submitti Legi finitæ. Quoniam id concedis de curvis istis liberis, re accuratius considerata, idem concedendum de naturalibus machinis.

Si quæ mentes, peccati notitiam nullam habentes, judicarent nullum esse peccatum in universo, probabiliter ratiocinarentur, non demonstrative, ut nos de vacuo. Nam vacua perfecte cognosci possunt, cum nullas alias res notione sua involvant; quod de peccatis secus est, quæ implicant seriem rerum. Sunt quidem & alia argumenta contra vacua, & atomos, sed ea nunc prolixioris discussionis forent.

Versus in Psittacum Dominæ De SCUDERI nondum sunt editi; misit enim manuscriptos; CARTESIO cognatam nesciebam. Alia est Parisiis docta & elegans fœmina, CARTESII ex fratre neptis....................

Gratias ago, quod communicasti quæ Dnus. VARIGNONIUS de Academia Scientiarum ad te perscripsit. Nondum quicquam tam exactum habueram. Multi ex Academicis mihi ignoti sunt,

1699 Mai. non quod ipsi non sint celebres, sed quod ego a multo tempore res *Gallicas* parum norim, post tot annorum absentiam, & quod non fuit qui Litteraria nuntiaret. Inter Honorarios ignorabam Dnum MALESIEUX & Patrem TRUCHETTUM *Carmelitam*. Ex Pensionariis Dnum. FABRUM Astronomum, JAUGEONIUM, & DALEMIUM Machinistas, BOURDELINUM & BOULDUCIUM Chemicos, COUPLETUM Thesaurarium. Ex associatis Gallis, MARALDUM, CHASELLUM, TAURIUM, BOURDELINUM; succenturiatos [Gallis *Eléves*] pene universos. Fac igitur, quæso, ut si qui ex his scriptis, operibusve noti, aut aliter memorabiles, id mihi quoque jam socio innotescat.

Ad dignitatem Corporis faciet, quod perinde, atque in Academia, quam *Gallicam* vocant καθ' ἐξοχὴν, honoris ergo recepti homines numeribus genereve insignes.

Valde etiam laudo, quod unicuique Collegarum succenturiatus assignatus est suus.

Perscriptum ad nos fuit reditus annuos in Academiæ sustentationem destinatos, esse 30 millium librarum Turonensium, sed hoc de pensionibus interpretor. Nam in experimenta, machinas, observationes, itinera, aliaque idgenus, puto sumtus faciendos non minores, si quid præstandum est dignum Fundatore.

Gratulor Tibi, quod Epistola tua tanta omnium approbatione ecta est : Et Dni *Abbatis* BIGNONII consilium mirifice probo, quod paci inter Te & Dnum. *Fratrem* tuum studet. Scis quantopere improbetur, qui lites inter Fratres serit; pari jure laudabitur qui componit.

Explica quæso, si commodum, quid sit illud quod de differentiationibus & summis Dno. VARIGNONIO communicasti, de quo ratiocinationem ejus non satis intelligo. Illud observavi, si termini y, $[y]$ &c. sint progressionis Geometricæ, etiam y, dy, ddy &c. progressionis Geometricæ fore. Eoque argumento aliquando Dno. *Marchioni* HOSPITALIO probavi $d^n y$ esse reale aliquid; etiam si n esset numerus fractus, vel irrationalis.

Dno. VARIGNONIO ut officiosissimam a me salutem reddas valde

valde rogo. R. P. MALEBRANCHIUS scribit Tractatum de motuum communicatione a se refingi, & se tandem agnoscere, non servari quantitatem motus; sed ignorat adhuc servari quantitatem, virium actionisque motricis; etsi animadverterit servari quantitatem motus in eandem partem, seu ut ego voco, directionis. Scripsi ei hac de re, sed paucis, obiterque. Aliquando poterimus communicare quæ cum Dno. VOLDERO acta; Ad hunc responsorias meas interim acceperis.................... 1699 Mai.

Litteræ hucusque scriptæ jam ante septimanas aliquot una cum Tuis evanuerant ex oculis meis, & se condiderant inter chartas, ubi non quæsissem. Interea iter faciendum fuit, agendaque alia, quibus peractis, dum Chartas ordino, rursus in Tuas & *Varignonianas*, & has ipsas meas incido, quas nunc absolvo.

Amicus ex *Anglia* veniens & hac transiens, monstravit mihi quosdam *Philosophicas Transactiones* anni superioris, in illis mense *Octobri* Artic. 7, reperitur Quadratura Logarithmicæ Dni. CRAÏGII, cui non immoror, subjiciuntur deinde hæc ejusdem verba.

„ Dum Methodum meam ad hujusmodi figuras applicarem, in-
„ veni errorem aliquo modo in Calculum *Bernoullianum* irrepsisse,
„ dum figuræ, cujus æquatio $a^z = y^y$ quadraturam assignat
„ $(2yyly - yy) : la$ in pereximio suo Tractatu *de Principiis cal-*
„ *culi exponentialis*; est enim istius figuræ area $= (2yyly - yy) :$
„ $4la$; ubi y abscissam & z ordinatam designat.

Suspicor hæc de Tuo potius quam Domini *Fratris* scripto esse accipienda, subinde enim de talibus mecum communicasti. Duo interim nosse desidero; primum: ubi sit Tractatus ille tuus, quem & ipse videre pervelim; deinde quid sentias de illa erroris calculi correctione; mihi enim nunc ista discutere non vacat.

Ex *Novis Litterariis Maris Baltici* [quæ nescio an non forte interim jam nactus sis] mitto [in omnem eventum] Dni. CLUVERII Schediasma adjunctæ plagulæ insertum, ubi multa mira; de quibus judicium tuum [ubi remittes] mihi gratum erit. Addo delineationem nummi Genethliaci, quem Cælum Cæsaris vocant, qui non inelegans videtur. Videtur aliquid tribuere Astrologiæ Judi-

1699 Maii judiciariæ, quod miror. Quod ait hanc propositionem *Deus est*, coincidere cum illa, *Duo contradictoria non posse simul esse vera*, paulo laxius dictum puto, ut solet fieri ab illis qui amant παραδοξολογεῖν. Cum in litteris ad me suis olim idem innueret, respondi esse sane cognatas, & inter fundamentales. Nam Divina essentia est, ut sic dicam, regio æternarum veritatum, ita ut per existentiam Dei veritates circa possibilia non existentia realisentur, subjecto & sustentamento alias cariturae. An hoc ipsum velit Dnus. Cluverius nescio, litteris enim illis meis non respondit. Quod ait Atheum esse animal ἀσυλλόγιστον, quod sublata unitate numeros superesse posse inepte fingat; non quidem inepte dictum est, si per unitatem intelligat principium, & per numeros principiata. Nam alioqui non solus Deus est unitas, sed substantia omnis opposita substantiis, seu aggregato, est monas; itaque hoc torqueri posset non tam in eos qui negant Deum, quam in illos qui nullas substantias immateriales agnoscunt. Quæ de structura mundi habet ex duodecim classibus intelligentiarum formatricium, concursuque & coalitione radiorum cælestium hypermetaphysica sunt, quæ non capio. Oportet per radios cælestes ab ipso intelligi aliquid ideale; alioqui enim ipsum utique cælum cum suis luminaribus & radiis partem mundi ex radiis formandi facit. Verum haud dubie est, æternis quibusdam rationibus idealibus omnia deberi, si quis immensum intervallum ab uno ad infinitum saltu transmittat. Philosophiam Divinam ejus, cujus folia aliquot impressa hic refertur, non vidi, Quod pag. 121. dicitur, nullam esse quantitatem absolutam, suo quodam sensu admitti potest quemadmodum & quod ait περί τῆς δυνάμεως. Et fieri potest ut subsint aliqua a nobis non abhorrentia. Habet hoc Vir Optimus, quod res etiam mediocres miris titulis exornare potest, quæ res usum interdum habet apud vulgus. Vellem daret, vel saltem explicaret illam, quam memorat............ & ideam Pandectarum Astronomicorum, quos olim fuit molitus. Miror quod Ellipses *Keplerianas* vult abrogare, quæ tamen tam pulchre satisfaciunt. Solem in uno esse focorum tantum abest ut sit contra mechanicen, ut potius ex Legibus motus prona consequentia fluat. Mirum si ostendet Solem semper eandem

servare

ſervare diſtantiam ad Terram, obliquitatemque EccliptICæ a priore patefaciet. Magis mirum, ſi quid dabit circa ordinem fixarum. Talia cum Cartesio aggredi fruſtraneum puto, niſi quis cum Gaffarello & ſimilibus cælum eſſe putet pellem extenſam inſtar libri Caracteribus inſcriptam, ubi fata omnium legi poſſint. Miror nondum illic chemicos quæſiſſe Lapidem Philoſophorum; quod ſi quid apte fingi poſſet, ſaltem prodeſſet ad ſtellas melius deſignandas & memorandas. Vereor, ut Machinæ auctoris opticæ conſiſtant in ideis inexſequibilibus. 1699 Mai.

Non video quomodo in Muſica aliquid magno cum fructu circa Monochordi ſectionem mutari poſſit, conſtat enim incidi in numeros irrationales, & eorum loco aſſumtos eſſe vicinos rationales. Unde octavæ diviſio in tonos, quæ accurata eſſe non poteſt. Quicquid ejus ſit, non dubito aliquid non contemnendum fore etiam in illis viri egregii meditationibus, quæ non plane ferient ſcopum. Itaque ſi omnia prodeant [modo ne nimis *ἀινιγματικῶς καὶ ὑπερβολικῶς*] pergratum erit. Alias alia mittam ex iiſdem *Novis Balthicis*, quibus præſtruere quædam videntur ad ſuas ſeries.

Nunc finiendum, nec unæ litteræ nimis onerandæ....... In *Groningianis* nihil video quod mitti e re ſit, itaque his faſciculum inflare nolim. Curioſitate non mediocri ſententiam Dni. De Volder expecto. Videtur ſemi-converſus. Miror quod non voluiſti ut ſcirem, quid Tibi de noviſſimis ad eum meis ſit viſum, cum judicium de iis tuum mihi futurum ſit præjudicium aliquod alieni; & gratiſſima habeam monita tua. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 16°. Mai. 1699.

Deditiſſimus

G. G. Leibnitius.

EPISTOLA XCII.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De litteris LEIBNITII *ad* VOLDERUM. *De Dei libertate. De sua cum quibusdam Theologis controversia. De Academicis quibusdam Parisinis. De Schediasmate* Cluveriano.

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1699 Jun. Ecce Responsionem Dni. VOLDERI. Multa objicit acute & solide; sed severus nimis, & scrupulosus videtur esse in exigendis probationibus eorum etiam, quæ, meo judicio, accurate probari non possunt; qualia sunt quæ ex lege ordinis petuntur: Item principium illud Tuum activum substantiæ: hinc non video quomodo illum omnino lucraturus sis, nisi aliquid remittas quod certum non est. Pleraque fere prævideram, quæ VOLDERUS objecturus esset: Quæ vero ipsi scripseras maximam partem probo; sed non putabam judicio de iis meo Tibi valde opus esse; alias incunctanter Tibi respondissem, licet a Te litteras expectaverim: Fuerunt tamen, quæ mihi adhuc injecerant scrupulum; quem vero ut moveam, non consultum duco; præstat id a VOLDERO fieri: Ita enim ab utraque parte proficio, absque ut id mihi magni constet. Delector valde, cum Tuas lego profundissimas meditationes, quæ reconditissimam quandam Metaphysicam spirare videntur; quod & ipsi VOLDERO dixeram, cum Tuas postremas ipsi misissem. Sed & vice versa VOLDERI in objiciendo soliditas, & in exprimendo felicitas me quoque non parva admiratione afficiunt. Jucundum mihi erit, & fructuosum, inceptæ vestræ velitationis exitum videre: sed jam ad nostra.

Deus ea tantum potest, quæ decrevit, & vult omnia quæ decrevit; Ergo omnia vult quæ potest; unde in ipso non differt velle

le & posse; quidquid jam sit de distinctione inter absolutam & hypotheticam necessitatem. 1699 Jun.

Vellem mihi geometrice demonstrares, fluida habere posse omnem usum quem vacua, sed vacua non omnem quem fluida.

Ergo concedis ideas confusas, non modo machinis naturalibus, sed etiam curvis libera manu ductis posse comparari. Illa alia argumenta quæ Tibi contra vacua & atomos superesse dicis, magna me voluptate afficerent, si ea mihi communicare digneris; fateor enim de eorum impossibili existentia me nondum demonstrative esse convictum.

Gratias ago pro communicatione elegantis Epigrammatis Tui in Psittacum *scuderianum*. Cum Te in omni scientiarum genere versatissimum sciam, non miror Te etiam esse Poetam, & mihi interdum præter spem vena luxuriat. Sed quod mihi ante annum excidit Epigramma, statim post litem illam cum Theologis quibusdam inceptam, eorum choleram in tantum excitavit, ut undique atræ nubes supra caput meum se se contrahentes, exitialem minarentur procellam; sed ex ea evasi salvus, & ignis videtur omnino extinctus, postquam novissime disputationem in hanc rem cum Theologis istis habuissem, sub incredibili confluxu Auditorum, qui me Philosophum theologice disputantem nunquam antea audiverant. Si disputationem, quam in eum finem composui, legere desiderares, possem data occasione exemplar ejus Tibi transmittere. Si scires, quantum hic passus fuerim ab ineptis hominibus, & imperitis istis misomusis, non dubito quin mei misereris: sufficit, si habeor pro novatore; pro introductore sapientiæ Theatralis [ita appellitant Philosophiam Experimentalem] quam heic primus doceo, ut suo odio me dignum putent. Tanta est apud homunciones istos bonorum studiorum nausea! Tantus contemptus! Ipsi quippe, cum nihil moliuntur quod laudabile est, aliis laudem invident.

Multi ex Academicis *Parisiensibus* non solum mihi sunt ignoti, sed etiam, cum *Parisiis* agerem, nondum erant recepti. Nondum accepi Receptionis Bullam, quam VARIGNONIUS jamdiu scripsit mihi statim missum iri per Illustrem BIGNONIUM. Quid causæ sit quod nondum acceperim, divinare non possum: an Tuam

1699 Jun. acceperis nosse pervelim. Triginta ista millia librarum, viginti tantum pensionariis *Lutetiæ* habitantibus sunt destinata; an exteris quoque aliquid destinatum fuerit, valde dubito.

Quod de differentiationibus & summis Dno. VARIGNONIO communicavi, est idem illud, quod jam olim inveneram pro methodo summandi ex observato a Te consensu inter Binomii potestates & Rectanguli differentiales; de quibus suo tempore, si meministi, prolixe inter nos actum est.

P. MALLEBRANCIUS valde instabilis sit oportet, cum mentem suam de communicatione motuum toties mutet. Nisi minutim distincteque omnia ipsi explicaveris, non facile in castra tua transibit: stat etiam pro perfecta corporum duritie.

Schediasma meum *de principiis calculi exponentialis* continetur in *Actis* 1697, Mense *Martio* (pag. 125. *vel* Opp. Tom. I. N°. XXXVI, pag. 178.) Præterea nihil edidi de hac materia. Quod autem Dno. CRAIGIO libuerit hoc schediasma appellare Tractatum, quid in mente habuerit non capio. Verum est quod pag. 131. lin. ult. pro Area figuræ cujus æquatio $x^x = a^y$, ponam $(2xxlx - xx) : la$, loco quod ponendum esset $(2xxlx - xx) : 4la$; sed quid est qui non videat fuisse vel lapsum calami, vel errorem typographicum: Unde tibi judicandum relinquo, an publice perstringi mereatur. Alius error item subrepsit, nam linea tertia a fine habetur $lydy$, loco $lady$: miror quod CRAIGIUS hoc pariter non observaverit. Optarim videre quid in *Transactionibus Londin*: de quadratura Logarithmicæ ediderit: videtur agere etiam de exponentialibus, ubi dicit *Dum methodum meam ad hujusmodi figuras applicarem*: sed quam facile ipsi fuit ex jam inventis proficere.

Remitto his cum gratiarum actione CLUVERII schediasma: sed, ut Tibi candide fatear, parum, aut nihil, ex illo intelligo: forsan nec ipse satis intelligit. Videtur affectare obscuritatem, ut res tenues quoque & leves magna pompa exagerare possit. Memini alicujus viri apud nos, qui tantam laudem in non intelligibili loquendi modo quæsiverat, ut cum aliquando orationem haberet, postea ipse gloria-

gloriaretur, ſublimi adeo ſtilo ſcriptam fuiſſe, ut nec a ſe, nec ab auditoribus potuerit intelligi. Non dubito quin CLUVERIUS idem de ſe gloriari poſſit: quod vel exinde patet, quod ipſi omnia ſordent, quæ recepta ſunt. Dum ſcilicet Ellipſes *Keplerianas* vult abrogare; item Solis excentricitatem, aliaque quæ pro demonſtratis habentur. Sed præ omnibus mihi diſplicet, quod jam olim, & nunc iterum, Parabolæ quadraturam *Archimedæam* impugnare velit; ſane, ſi eo uſque ineptiarum procedit, quid porro in Matheſi tutum, quid certum erit? . . . .
. . . . Vale.

Groningæ 3. Junii 1699.

Amplitudinis Tuæ

Devotiſſimus
J. BERNOULLI.

P. S. deeſſe videtur.

EPISTOLA XCIII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De controverſia ſua cum VOLDERO. *De Dei libertate. De vacuo & atomis. Varia. De aëris compreſſione.*

Vir Ampliſſime, Fautor Honoratiſſime!

CUm Dno. VOLDERO diſputans Tua ope indigo, tanto magis quod difficilius eſt nova tueri, itaque quoties a mea ſtas parte, æquum eſt ut auxilio mihi ſis, agaſque confeſſorem & defenſorem veritatis. Nam quod ais ſpectando Te laboris compen- 1699 Jun.

1699 Jun. dium facere, id a me ætate tanto provectiore speciosius dici potuisset.

Objectiones mihi interim videntur fere a præjudiciis proficisci. Longe alia ipsi, quam mihi extensionis notio est; Idem est de substantia aliisque multis. Deinde aliud est objicere, aliud exigere probationes. Objectionibus respondere non defugio; probationes omnium dare, hujus loci temporisque non esset, etsi in promptu haberem.

Inprimis miror quod negat plus esse idem promptius efficere. Quis hac scrupulositate ad demonstrandum invitetur, & quis satisfacere speret, ne illa quidem concedenti, quæ totius naturæ testimonio confirmantur? sed ista mihi interim in hypothesin apud æquos credo judices suffecerint, qualem ipsum Dnum. VOLDERUM fore puto, ubi rem magis expenderit. Taliaque ipsi a Te commodius quam a me dici poterant. Cæterum mihi non tam id quæritur, ut mea persuadeam, quam ut considerationibus mutuis proficiatur. Veritas serius aut citius semper vincet.

Quod dicis Deum ea tantum posse quæ vult, hoc non concedo; nisi in sensu composito loquaris, ut vocant. Verum est ea tantum facere, sed si ea tantum posset, omnia faceret necessario, nec esset liberum agens: nam decreto aut electioni locus esse nequit, cum nisi unum possibile est.

Asserendus esset usus vacuorum, quem fluida habere non possint. Cæterum unum ad hoc argumentum habes in hac Epistola adjuncta ad Dnum. VOLDERUM, nempe si darentur atomi, daretur & mutatio per saltum.

Facies pro prudentia Tua, ut Theologos non habeas inimicos, nam ubique terrarum magna est ipsorum auctoritas; idque postulat status rerum. Epigramma Tuum libenter videbo, nec per me ulterius ibit quam voles. Disputatio etiam gratissima erit.

Litteras Acceptionis Academicæ nondum accepi. Haud dubium est 30 millia librarum solis pensionariis esse destinata; qui omnes sunt regnicolæ.

Mutationes repetitas R. P. MALLEBRANCHII non culpem, si modo expenderet potius quam ederet in Publicum. Itaque vereor ne, ne post tertiam editionem Regularum motus suarum, indigeat quarta.

In

In Craigii schediasmate nihil erat quod ad exponentialia pertineret, quam quod transcripsi. Admisi autem demonstrationem logarithmicæ tanquam obviæ. Nec illam [quam vocant] *Transactionem* nunc amplius habeo, visam tantum apud transeuntem. 1699 Jun.

Ecce alterum Dni. Cluverii schediasma, quo paulo propius ad rem videtur accedere. Si Archimedis quadraturam Parabolæ improbat, cur non respondet ejus demonstrationi rigorosæ, ostenditque ubi vitium hæreat; neque enim Archimedes assumit infinite parva, aut alia quæ *Cluverianis* objectionibus obnoxia videri possunt.

Quando Dnus. Cunæus Te vidit, jam erat unus ex secretariis intimis serenissimi Electoris Brandeburgici, etsi apud Dnum. Dankelmannum plerumque ageret. Nunc Patrono everso stationem invenit, factus Consiliarius, ubi licet minus in iis possit in quibus nobis utilis esse poterat, quietiorem tamen & jucundiorem vitam agit. Mathematica & æstimat & intelligit; Astronomica inprimis. Cæterum inde a Dankelmanni casu nulla mihi cum illis notitia intercedit, qui in *Halensis* Academiæ rebus aliquid valent; quæram tamen a Dno. Cunæo, quo illæ sint loco.

Certissimum est, librum Bernerii prodiisse sub Titulo; *Doutes sur la Philosophie.* Invenies eum in *Actis Lipsiensibus* jam ante multos annos recensitum, si modo indicem generalem consules; habetur & in *Novellis Reipublicæ Litterariæ*, si bene memini, ibi non pauca, quæ olim stabiliverat in suo *Compendio Philosophiæ* Gassendi & alibi, dubia nunc sibi videri profitetur, & difficultates producit. Gratias interim ago, quod inquisivisti.

Non memini legere, qui aërem compressum ponderaverit. Memini Boylium, in his credo, quæ *Franc.* Lino reponit, aut adjectis, calculo experimentorum deprehendere sibi visum aëris vim elasticam fere reciproce proportionalem esse spatio. Idem in pondere examinandum: Boylius etiam notare sibi visus est aërem rarefactum a calore accipere vim se. dilatandi majorem quam proportione raritatis expectarat. Id dignum excuti, simulque observari annon similiter aër compressus minorem dilatandi vim acquirat quam

quam pro ratione densitatis; quod ego aliquando observasse mihi visus sum, facto tumultuarie experimento. Vale & fave.

Dabam *Hanoveræ* 26. Junii 1699.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

Responsio deest.

EPISTOLA XCIV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

De FATII *investigatione lineæ celerrimi descensus. De suis Epistolis a* WALLISIO *edendis. De* CLUVERIO. *De aëris compressione. Varia.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1699 Jul. PRrorsus incogitante me factum est quod Litteræ Dno. VOLDERO per Te destinatæ ad Te obsignatæ pervenere; nam volebam ut legeres, & adhuc volo ut legas, imo peto, simulque ut expendas, & cum remittes tua cogitata addas. Accipies autem proximis, nunc enim satis oneratus est fasciculus. Tuas a Dnum. MENCKENIUM curabo statim. [Imo jam curavi].

Gratias ago quod mecum communicasti litteras Dni. VARIGNONII, quem rogo a me officiose salutes, & quam obligatus ei sim testeris, quod ad me quoque pertinentia significare voluit, quibus ita utar, ut decet, Auctoremque nuntii dissimulabo, ut par est. Ipsum FATII libellum † missu Dni. *Marchionis* HOSPITALII accepi. Non miror quod judicas oportere hominem rusticum esse, certe apparet parum socialem esse, qui ita debacchetur in eos a quibus

† Lineæ brevissimi descensus Investigatio geometrica duplex, cui addita est Investigatio geometrica solidi rotundi in quo minima sit resistentia. Lond. 1699. 4°.

bus non est læsus. Sed bene est quod Lectores facile intelligent, invidia stimulatum scripsisse. Responsionem quam *Actis* inferendam * composui, ecce accipis; eam ut cum sententia Tua remittas rogo. Malui leniter castigare hominem, quam dure accipere, ut merebatur, nam ridiculum esse spectaculum puto, si Viri Eruditi, qui præ cæteris cultum profitentur, dicteriis inter se certent instar muliercularum.

1699 Jul.

Optime interim fecimus, quod novam accessionem Calculi differentialis adhuc suppressimus; ita enim fortasse habebit, cui dentem insigens offendat solido.

Wallisius consensum meum petiit, ut Epistolæ meæ veteres ederentur; dedi non invitus; etsi nesciam an omnia nunc satis essem probaturus. Quæsivit an aliquid mutare vellem, sed non vacavit quærere in antiquis schedis, ubi nec invenirem omnes. Virum doctum & bonum animo sinistro egisse nolim suspicari, utcunque res cadat, nunquam verebor nudam veritatem. Accipis nunc partem libelli *Fatiani*, reliqua mox sequentur. Interea *Cluveriana* remittes. . . . .

Haud dubie Dnus. Cluverius aliqua laborat ἀῤῥεςία [ut *Josephus* Scaliger olim, & Hobbius, insignes alias viri] quod certitudinem demonstrationum *Archimedearum* impugnat. Sed nociturum dignitati Geometriæ non puto, eoque facilius ignosco, præsertim cum non scribat more *Fatiano*. Aliquoties ad me scripsi hac de re, sed nunquam ad responsiones meas quicquam replicavit. Quæsivi, an posset aliam accuratiorem dare rationem Paraboles ad quadratum circumscriptum, quam est *Archimedea*. Hinc si mente esset libera, agnoscere posset nodum se quærere in scirpo.

Quoniam tantum Tibi cum Fratre Fatii natu majore fuit commercii, non ab re suspicaris inde aliquid ad eum pervenire potuisse. Quod ait se Calculum differentialem habuisse suo marte, in eo forte se ipsum fallit: habuisse ejus initia quædam, & ipsum & multos alios, quis neget? Sed si talem habuisset qualem nos, mirum est nihil dudum protulisse, unde hoc appareret; cum nos nihil fere attingamus, quin aliqua nobis occurrant notatu digna.

Tom. I. Mmm Non-

* Inserta est *Actis* Maii 1700. pag. 198.

1699 Jul. Non est necesse, ut pondus aëris sit ejus condensationi proportionale, nisi aërem ponamus esse homogeneum comprimibile. Quid enim, si constat duabus partibus, una comprimibili, altera æqualiter disseminata non comprimibili, uti certe tale aliquid ei inspersum non videtur negandum? sit aëris pars comprimibilis b, incomprimibilis c, spatium quod b occupat sit l, quod c occupat sit m Ponamus totum comprimi in spatium dimidium $(l + m) : 2$, itaque cum spatium ipsius c maneat nempe m, patet spatium novum ipsius b fore $(l - m) : 2$, adeoque fore minus dimidio prioris: itaque cum gravitas specifica sit in ratione ponderis, seu materiæ, directa & voluminis reciproca, patet eam non fore in ratione condensationis sive compressionis, nec in ratione virium comprimentium. Quin etsi omnes partes aëris [intelligo semper eas, quæ pondus habent] essent comprimibiles, si tamen aliæ plus minusve aliis tales essent, rursus aliqua esset diversitas. Hinc in BOYLII defensione contra LINUM ostendit Tabula experimentorum, paulo majore fuisse opus pondere mercurii, quam opus esse videbatur; quod ego admistæ materiæ incomprimibili imputo. Hinc densitas aëris [cui reciproca est raritas] duplici modo accipi potest, vel ex pondere ipsius & volumine, ita nihil aliud erit, quam ipsa aëris gravitas specifica; vel ex compressione, sive vi elastica, seu ex pondere, quod aër potest sustinere in vacuo; verbi gratia, ex altitudine mercurii. Hæc duo coinciderent inter se, si aëri nihil non comprimibile, aut nihil inæquabiliter comprimibile esset immistum, sed si distinguamus b & c, utique divortium duæ æstimationes patiuntur. Ut in casu jam dicto, gravitas specifica fiet dupla, sed compressio plus quam dupla. Et ideo aër in spatium dimidium comprimendus erit pondere plus quam duplo ejus, quo in priore spatio coërcebatur. Et hinc, experimentis conferendo gravitatem specificam & vim elasticam aëris, definiri poterit aliquid circa aëris partes.

Jam pergamus ad ea quæ dixi de calore. Hic verba mea secius accepisti. Dixi aërem rarefactum videri a calore accipere vim se dilatandi majorem, quam proportione raritatis. Credis me voluisse dicere, proportione reciproca. Sed sensus hic est. Sint duo unius ejus-

ejusdemque aëris volumina unum V alterum majus (V); ponamus 1699
aërem in volumine V positum per se sustinere pondus p. Calore Jul.
autem dati gradus accedente, sustinere posse majus pondus π, seu a pondere π, [non obstante calore] in suo volumine V coërceri. Ponamus eundem aërem in volumine (V) positum per se sustinere pondus (p) & accedente calore pondus majus (π). Jam cum calor in aërem magis rarum minus agat, ponamus aërem esse homogeneum perfecte elasticum, & eundem aërem in quocunque sit statu eodem calore æque dilatari, vel ad dilatandum se disponi, verbi gratia, calorem dati gradus supervenientem efficere, ut aër duplum occupet spatium ejus quod habet, seu duplum prioris ponderis sustineat, seu ponamus calorem esse supplementum compressionis vel densitatis, ac tantum in aëre efficere, quantum si ipse aër esset densitatis duplæ. His positis utique erit p ad π ut (p) ad (π); sed si (V) sit millecuplum ipsius V, utique [posito aërem esse homogeneum, seu gravitates specificas esse ut compressiones vel pondera coërcentia] etiam (p) erit submillecuplum ipsius p. Et ideo licet ponamus calorem esse virtutis elasticæ duplicativum & π esse $2p$ vel $(\pi) = 2\ (p)$ tamen (π) erit quantitas parum notabilis, quia & (p) est talis, & hinc fit ut in Barometro parum noceat calor, ob aëris magnam raritatem. Boylius tamen notasse sibi visus est in aëre valde rarefacto adhuc aliquid notabile efficere calorem, & videtur velle plus eum facere, quam quis expectaret, seu plus quam pro ratione raritatis; ita scilicet ait, in *Observatis circa durationem virtutis elasticæ aëris expansi*, quæ subjiciuntur ejus Epistolæ *de mira aëris rarefactione citra calorem.* „ Adhuc, inquit, „ alius superest modus a me excogitatus, quo aër in quodam par- „ vo instrumento portatili ad quingenties, sexcentiesve, forte mil- „ lies amplius solito spatium expansus, non tantum longo temporis „ spatio elasticitatem suam retinuit, sed & primario cuidam quæsi- „ to meo satisfecit; utrum scilicet aër valde dilatatus citra calorem „ insigniter afficeretur calore externo. Eo quippe ipsum affici in „ hoc instrumento palam est, ibi enim magna, quam jam acquisi- „ vit, quamque tueri velle videtur raritate necquicquam obstante, „ manus exteriori vasi admotæ calor subitam manifestamque admo-

Mmm 2 „ dum

1699 Jul. „ dum operationem edit, eaque remota, aër sensibilis derepente ad „ priores suas dimensiones juxta ac temperiem revertitur.

Hæc Boylius, constructionem instrumenti non explicans, TAB. XV. quæ forte talis fuit. In (*Fig*, 87.) tubo A si alius tubus B supra clausus infra apertus, in quo suspensus mercurius. Et tubo A extrahitur aër, & descendet mercurius in tubo B ad imum, & ex illo descensu æstimari poterit rarefactio; cum enim tantillum mercurii in tubo B remaneat, erit aëris dilatatio præsens ad priorem, ut altitudo mercurii residua ad priorem. Extracto aëre claudatur tubus A & ita servetur ad usum. Hic tubo A calefacto mercurium nonnihil exsurrexisse non dubito, cum enim aliqua vis elastica aëris superfuerit, non mirum si ea fuit calore aucta. Sed cum tamen Boylius nihil distincti afferat, nescio an hinc aliquid colligere novi potuerit. Nam si, ut solet, contentus fuit, rem quæ per se intelligitur sensibilem reddere, non erat cur valde commendaret experimentum, aut quæsito alicujus momenti satisfactum diceret. Sed si calor, qui mercurium aëri parum rarefacto incumbentem, in vacuo in duplum attulit, illam exiguam mercurii quantitatem in hoc tubo B plus quam in duplum extulisset, experimentum fuisset alicujus momenti, & calor in aëre rarefacto plus egisset quam proportione raritatis ejus admittere debere videatur. Ex talibus experimentis haberi posset, utrum calor agat, ut sic dicam, per multiplicationem, an per additionem, id est an tantum sic agat, quasi aëris densitas multiplicaretur, ut paulo ante supposui, an vero sic agat, quasi novam aliquam vim de suo adjiciat constantem, ut sic dicam, non vero proportione aëris recipientis crescentem? An vero agat partim per multiplicationem, partim per additionem? Sane si additio admisceretur, calor magis aëris rarefacti elastrum augebit, quam pro ratione raritatis; & aëris compressi elastrum minus augebit, quam pro ratione densitatis. Et hoc est quæsitum magni momenti, quod merebatur utique definiri. Sed nescio an vim ejus perspexerit Boylius.

Hic autem abstraho animum ab eo defectu, de quo initio locutus sum, qui admixto incomprimibili oritur, & alium irregularita-

tis,

tis, si qua nova deprehenditur in caloris operationibus, fontem quæro. Obiter addo, ex eo quod aër comprimendo annihilari nequit, sequi quidem, quod ad gradum tantum finitum densitatis pervenire valeat; sed tamen si fingeretur res homogeneè, & ut sic dicam metaphysice elastica, semper continuari posset compressio in infinitum, & pondere centies millies aucto in partem 100000. mam comprimetur; nihil ergo prohibet, densitates esse viribus proportionales, modo aër sit homogeneè elasticus, nec ullum hinc periculum annihilationis. 1699 Jul.

Peto ut mihi communices quæ a te petit Dnus. Varignonius, nempe Analysin lineæ brevissimi appulsus ad rectam, & Analysin Tui Theorematis de rectificatione curvarum, * & postremo nosse opto, quid sit illud cujus spem fecisti Academiæ sub finem scripti Tui de quadratura segmentorum Cycloïdalium †. Nam & ego libenter Tuis frui velim. Vale.

Dabam *Hanoveræ* 25. Julii 1699.

Deditissimus
G. G. Leibnitius.

* *Quod legitur in* Actis Erud. 1698. Oct. pag. 462, vel Opp. Tom. I. N°. L. pag. 249

† Mem. de l'Acad. R. des Sciences de Paris 1699. pag. 134. *vel* Act. Erud. 1699. Jul. pag. 316, *vel* Opp. Tom. I. Num. LVIII. p. 312.

EPISTOLA XCV.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Mittit reliquam partem Opusculi Fatiani, *suamque ipsius responsionem, qua occasione varia quærit.*

Vir Celeberrime, Fautor Honoratissime!

Mitto ecce partem reliquam Libelli Fatiani, quam promiseram; neque dubito quin priorem acceperis, una cum meæ re-

1699 Jul. responsionis delineatione. Adjungo & copiam litterarum ad Dnum. VOLDERUM, petoque ut omnia per partes remittas. Nescio quid Dnus. FATIUS potuerit adjungere ad Theoriam gravitatis *Newtonianam*, ut participem se honoris jactare possit, ut facit.

An unquam considerasti numerum discerptionum vel divulsionum numeri dati, quot scilicet modis possit divelli in partes duas, tres, &c. Videtur mihi ejus determinatio non facilis, & tamen digna quæ habeatur.

Prolixe nuper dixi de aëris gravitate specifica & vi elastica, & caloris frigorisque ut ipsis concurrente. Digna res quæ tum rationibus, tum experimentis stabiliatur.

An quisquam nunc in *Batavis* evigilat ad studium interioris Geometriæ? Quid facit ille juvenis doctus *Hagiensis*?

De NIEUWENTITIO & altero illo, qui Problemata spernebat, MAKREELIO puto, nihil ne amplius auditur? Credo ubi hæc sciverit NIEUWENTITIUS cum CLUVERIO & FATIO, triplum fœdus contra nos esse initurum. Vale,

Dabam *Hanoveræ* 28. Julii 1699.

Deditissimus
G. G. LEIBNITIUS.

P. S. Adjungo & schedam, quam fortasse meæ ad FATIUM responsioni annectam, ut appareat quam infinities ampliora dare liceat iis quæ dedit MOIVRÆUS. *

* *G. G. L. Responsio ad Nic.* FATII DUILLERII *imputationes. Accessit nova Artis analyticæ promotio specimine indicata, dum designatione per numeros assumptitios loco litterarum, algebra ex combinatoria arte lucem capit.* Act. Erud. 1700. Mai. pag. 198. & seq.

EPIS-

EPISTOLA XCVI.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentes.

De Voldero. *De* Fatii *Opusculo. Investigatio solidi minimæ resistentiæ.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Ecce Domini Volderi responsionem: Communicavit mihi descriptionem Tuarum, quæ ad me obsignatæ pervenerant, ita ut non opus sit eas porro mittere. Ad Tuam querimoniam de ipsius nimio rigore reponit, se Tibi non contradicendi, sed unice veritatis amore objicere; se libenter agnoscere, aliud esse objicere, aliud exigere demonstrationes; sed ex altera parte non minus certum esse aliud esse objectionibus respondere, aliud ostendere id quod asseritur: se tantopere non laborasse de mensura virium, quam ut, si fieri posset, ex Te hac occasione eliceret demonstrationem ejus quod ais, substantiam omnem necessario actuosam esse: hanc enim frustra se quæsivisse sæpius, quæ tamen sibi videatur maximi momenti multis de causis; sed eam spem jam evanuisse, nec se velle hanc urgere amplius, ne videatur uti eodem rigore. Queritur porro, quod forte existimes, se Cartesio ita esse addictum, ut ejus effatis absque examine calculum adjiciat: in multis eum errasse se non dubitare, nec tamen existimare omnia illi quæ objiciuntur vere objici: dicit porro, se admodum mirari, quod ita conquueraris de hac sua negatione, quæ ipsam rem de qua agitur continet; & tamen, quod ne verbulo quidem respondeas ad ea quibus negationis suæ causam dederit; sive quod ad ea non attenderis, sive quod tam frivola existimaveris, ut responsione digna haud censueris, sive denique alia quæpiam, quam hariolando assequi non possit, intercesserit causa. 1699 August.

Ecce

1699 Auguſt. Ecce remitto ſchediaſma reſponſorium, quod paraſti contra ſcriptum DUILLERII; placet mihi valde, quod modeſte, ſed ſimul vivide, reſpondeas; gratias ago, quod mei etiam quodammodo Apologiam ſcripſeris, quando DUILLERIUS queritur; me, cum programmata diſtribuerem, ipſum non dignatum eſſe ut ipſi Exemplar unum miſiſſem. Sed ad hoc potuiſſes regerere, me non ſomniare, ubinam in *Anglia* degat, vel qua inſcriptione Litteras meas ad illum mittere potuiſſem; ob hanc rationem, me duo exemplaria miſiſſe Dno. NEWTONO, ut & Dno. WALLISIO, non ut hos Viros ad certamen provocarem, quemadmodum Stoïcus noſter arbitratur; ad provocandum enim unum exemplar ſuffeciſſet: ſed quia horum tantum ſedem ſtationis ſciam: his duobus me tantum miſiſſe, ut ceteris Mathematicis communicarent, quibus ipſi voluiſſent. Quando porro arroganter adeo....... Tibi inſultat, *ſe a Te nihil didiciſſe, aliis diſcipulis Tibi gloriandum eſſe;* reſponderem ego, omnino verum eſſe; nihil illum a Te didiciſſe, adeoque etiam non incultum ſuum Viros honeſtos tractandi morem. Ante omnia paulo aſperius excipere deberes fictam ipſius modeſtiam, ſub cujus umbra ſuam infirmitatem tegere conatur, quando.......... quiritatur *ſe quoque, ſi qua invitatione dignus viſus fuiſſet, Litteris ſuas dudum ſolutiones fuiſſe exhibiturum*; quaſi ſcilicet, ſi modo ſe applicare dignatus fuiſſet, primo ſtatim applicationis momento totum myſterium detecturus fuiſſet. Interim nobis non dicit quanto tempore fruſtra inſudaverit, quantum....... laborem hanc in rem impenderit. Scire enim te volo, hic aliquem eſſe exulem *Gallicum*, duorum Comitum Anglicorum Ephorum, qui antequam ſcirem DUILLERIUM aliquid in hanc rem edidiſſe, mihi narravit, quod familiariter novit Dominum MOIVRÆUM pariter Gallum exulem, & DUILLERIUM; quod jam ante duos circiter annos uterque, tam DUILLERIUS quam MOIVRÆUS, quotidie ſe invicem inviſerent, & magna contentione ſe ſe huic Problemati accinxerint, [illud enim ſtatim viderunt in *hiſtoria Erud.* BASNAGII; ....] & quaſi certatim laborare voluiſſent, integras noctes conſumpſerint: quod MOIVRÆUS primus deſtiterit re infecta, & tandem quod DUILLERIUS, poſtquam

postquam diu satis insudasset, abjecerit arma, ipsi Mannevilleo [ita nomen narrantis est] candide fassus se omnino desperare; quod postea tamen sub ipsius [Mannevillæi] abitum ex *Anglia*, ante 18 menses fere, de novo Duillerius resumserit ad manus Problema desperatum, eique acriter & tenaciter inhæserit adhuc, cum ab ipso proficisceretur; quod autem plura nesciat, an ex eo tempore quæsitum invenerit, nec ne. Hisce itaque diebus cum ipsi monstrarem scriptum Duillerii hæc omnia dissimulantis, mirari non satis potuit, ... Interrogavi Dominum Mannevillæum, annon ægre laturus sit, si talia responsioni publicæ & ad scriptum *Duillerianum* edenda admisceremus; ille quidem annuit, modo id fiat, suppresso suo nomine; imo, si necesse esset, quovis tempore veritati testimonium dare, etiam nomine suo, se paratum semper esse; quid jam factum opus sit ipse judices. Quidquid sit, mihi videtur........ & inanis excusatio, dicere, modestiam impedire quominus quis sua inventa publici juris faciat; ita enim nemo unquam aliquid in publicam utilitatem edere poterit, nisi........ immodestus esse velit. Quid si vero nomen exprimere jactantiæ esse dicat, quid ni & ipse suas Problematum difficiliorum curvæ Catenariæ, Velariæ, Isochronæ enodationes, methodosque, quas jamdiu possidere dicit, bono publico promulgat, suppresso suo nomine: hoc utique, salva sua modestia, fieri posset. Quantum tandem ad ipsas Fatii solutiones, quid de iis sentiendum nescio; scis ipse hujusmodi Problemata, nostro more tractata, nullum, aut perbrevem calculum, requirere; quia plerumque ex sola contemplatione infinite parvorum, adhibita quadam dexteritate, quæsitum sponte fluit; hinc perplexi calculi, quos instituit, mihi valde sunt suspecti; subvereor enim ne ipsi hic acciderit, quod nuper Gregorio paralogizanti in curva Catenariæ, qui conclusioni solutionem accommodavit. A me sane impetrare non potui, ut prolixas adeo Analyses Duillerii examinarem, partim quod tempus inutiliter terere, partim quod etiam minutissimis litterulis inspiciendis oculis meis officere noluerim. Contremisco fere, si oculos conjicio in inextricabilem computationem pro curva solidi minimæ resistentiæ; quam quidem vo- 1699 August.

1699 Auguft. cat magis arduæ difquifitionis, & difficiliorem quam Problema celerrimi defcenfus; fed DUILLERIO forfan foli, quia genuinam folvendi Methodum nondum habet: Hoc enim Problema folidi minimæ refiftentiæ, tantæ facilitatis deprehendo, ut ad ejus folutionem perveniendam nullo prorfus calculo fuerit mihi opus; quandoquidem calamo & charta deftitutus, & in lecto decumbens, fola imaginationis vi plenarie id folvi. Solutionem hic adjiciam, quam, fi placet, cum refponfione tua *Actis* inferi * curabis, ut videat DUILLERIUS fe mirum quantum adhuc abeffe a vera & TAB. XV. naturali via, ... Efto (*Fig.* 88.) curva quæfita BFN, quæ ex revolutione fua circa BM defcribat folidum in quod minima fiat refiftentia, fi moveatur fecundum plagam axis BM. Elementa applicatarum NM concipiantur divifa in partes æquales NR, RP: fint NL, LF duo elementa curvæ refpondentia elementis NR, RP: producatur RL ad O, ita ut LO infinite parvum fit refpectu RL. Ductis NO, FO, erit ex natura minimi refiftentia in zonam ex converfione elementi curvæ NLF [quod ut duas lineolas rectas NL, LF confidero] factam, æqualis refiftentiæ in zonam ex converfione lineolarum NO, OF, adeoque refiftentia zonæ NL — refiftentia zonæ NO = refiftentiæ zonæ FO — refiftentia zonæ FL. Jam vero affumta hypothefi communi, qua & NEWTONUS utitur pag. 325 & feqq. nimirum refiftentiam obliquam in NL effe ad refiftentiam directam in NR, ut NR^2 ad NL^2; exprimentur refiftentiæ elementorum curvæ exempli gratia ipfius NL per $NR^3 : NL^2$, adeoque refiftentia zonæ NL per $MN. NR^3 : NL^2$. hinc igitur $(MMNR^3 : NL^2) - (MN. NR^3 : NO^2) = (MR. RP^3 : FO^2) - (MR. RP^3 : FL^2)$. Sunt autem OT, LS, differentiæ ipfarum NO, NL, & LF, OF harum refpectu incomparabiles, ideoque $(MN. NR^3 : NL^2) - (MN. NR^3 : NO^2)$ tantundem quod $2 MN. NR^3 : TO : NO^3$, & $(MR. RP^3 : FO^2) - (MR. RP^3 : FL^2)$ tantundem quod $2 MR. RP^3. LS : FO^3$. Hoc igitur illi eft æquale. Et divifis per $2 NR^3$ — & $2 RP^3$ [quæ per hypothefim

* A. E. 1697. Nov. p. 513. & 1700. Mai. pag. 208. Opp. Tom. I. N°. LIV. pag. 307. & N°. LVI. pag. 315.

sim sunt æqualia] provenit $MN. TO : NO^3 = MR. LS : FO^3$. Ut autem TO & LS, incomparabiles cum reliquis, eliminemus, observo quod propter triangula similia $NO : RO = LO : TO$ adeoque $TO = RO. LO : NO$, & ob eandem rationem $LS = VF. LO : FO$. substitutis itaque hisce valoribus loco T O & L S, & divisis per communem L O, habebimus æquationem elementis constantem $MN. RO : NO^4 = MR. VF : FO^4$, affectam suis respective applicatis. Unde concludo curvam quæsitam BFN ejus esse naturæ, ut, suppositis elementis applicatarum æqualibus, applicata quævis, multiplicata per elementum respondentis abscissæ, & divisa per biquadratum elementi respondentis curvæ, producat quantitatem constanti æqualem; quæ ergo constans, servata homogeneorum lege, sumatur ad lubitum. Hinc si BM vocetur x; MN, y; NR, RP, &c. dy; RO, dx; NO, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, fiet $y\,dx : ds^4 =$ huic assumtæ quantitati constanti & homogeneæ $a : dy^3$; quæ reducta, dat hanc æquationem differentialem primi gradus $y\,dy^3\,dx = a\,ds^4$, quæ curvæ quæsitæ naturam exprimit; ubi notandum proprietatem hujus curvæ, a Newtono sine analysi & demonstratione traditam pag. 327. si resolvantur in æquationem, eandem omnino dare quam hic inveni. Miror profecto Duillerium suam simpliciorem, hanc vero perplexiorem dicentem: cum tamen hæc illam exhibeat facile, non vero vice versa, nisi summa cum difficultate: quam sane Duillerius non facile superabit; id est, non facile a cognita proprietate radii circuli osculantis ad proprietatem tangentis ascendet; quemadmodum vicissim nullo labore ex proprietate tangentis proprietas radii osculantis innotescit; non secus quam ab integralibus ad differentialia descendere ludus jam est.......... Videtur Duillerius hæc nondum satis ruminasse, nec sufficientem adhuc praxin in nostris habere, quod hospitis instar ἀγεωμετρήτως adeo loquatur. Non minus miror quod Newtoni proprietatem vocet Constructionem curvæ. Indicium sane est, illum etiam parum nosse quantopere desideretur modus construendi curvam, ex proprietate tangentis data, quasi scilicet iterum non minus facile esset ex tangentibus curvam determinare, quam ex cur-

1699 August.

1699 August. va. tangentes sane tantum abest NEWTONUM constructionem dedisse, ut potius judicem, maximam adhuc superesse difficultatem, constructionem ex ejus proprietate, seu ex æquatione jam inventa, eliciendi; idque propter differentialium altam dimensionem, cujus radix quærenda esset more algebraïco, antequam relatio possit haberi inter $d x$ & $d y$; quod, cum prolixissimum calculum requireret, non abs re puto, si hic peculiarem modum ostendero, quo, missa investigatione radicis per algebram, statim ad cuvæ quæsitæ constructionem, haud sane inconcinnam, pervenio. Modus autem hic talis est; æquatio inventa erat $y d y^3 d x = a d s^4$ seu substituto ipso valore ds, $ydy^3dx = adx^4 + aadx^2 dy^2 + ady^4$: ponatur jam $d x = m d y : a$; hocque surrogetur in æquatione, & tunc divisa per $d y^4$, prodibit hæcce æquatio algebraïca $a a m y = m^4 + 2 a a m m + a^4$; adeoque $y = m^3 : a a + a m + a a : m$, &c. $d y = 3 m m d m : a a + 2 d m - a a d m : m m$, & hinc $m d y : a$ seu $d x = 3 m^3 d m : a^3 + 2 m d m : a - a d m ; m$. Sumtis igitur horum integrabilibus erit $x = 3 m^4 : 4 a^3 + m m : a - l m$; [per $l m$, intelligo logarithmum ipsius m, qui per ea quæ explicui de principiis calculi exponentialium in *Act. Erud.* 1695. Mense Martio est æqualis [$\int a d m : m$;] inveni itaque valores coordinatarum x & y, expressos per quantitates duas, tertiam communem indeterminatam m involventes, id quod hanc elegantissimam suppeditat constructionem. Ad axim (*Fig.* 89.) CE

TAB. XV. describantur duæ curvæ, una algebraïca DAH, altera transcendens IK, hac lege ut posita abscissa CE $= m$, applicata illius EH fit $= m^3 : a a + 2 m + a a : m$, applicata vero hujus EK fit $= 3 m^4 : 4 a^3 + m m : a - l m$; erunt itaque KE, EH coordinatæ curvæ quæsitæ. Ad quam igitur construendam nihil aliud opus est, quam ut ad CM, applicatis parallelam, tanquam ad axem ducatur producatur perpendicularis KM in N, ita ut MN sit = EH: puncta enim N erunt in curva quæsita BN, quæ nempe circa CM conversa producit solidum, in quod, si moveatur secundum plagam axis CM, fluidum faciat resistentiam minimam. *Q. E. F.* Notandum quod curva IK sit ex earum numero, quas voco percurrentes; quarum scilicet æquatio naturam exprimens consistit terminis finitis

finitis, seu algebraïcis, sed ad indeterminatam dimensionem ascendentibus: Positis enim ut ante CE, m, & EK, x; & assumta constanti $c^4 = 4a^3\, la$, erit æquatio naturam curvæ IK determinans; hæc $m^{c^4} = a^{3m^4 + 4aamm - 4a^3x}$; id est, indeterminata m, elevata ad potentiam determinatam c^4, est æqualis determinatæ a, elevatæ ad potentiam indeterminatam $3m^4 + 4aamm - 4a^3x$; adeoque hæc curva ipsius Logarithmicæ naturam quodammodo habet. Etenim & Logarithmica hujusmodi æquatione gaudet, cujus nempe quantitas determinata ad potentiam indeterminatam, quantitas vero indeterminata ad potentiam determinatam elevatur. Hæc omnia, si digna deprehendes quæ *Actis* inserantur, per me licebit; Tuæ interim censuræ & emendationi subjecta volo. Ad reliqua contenta litterarum respondere, hæc festinantissime scribenti mihi jam non vacat. Ea in proximam occasionem reservabo, ne schediasmata tua retardem. 1699. Augusti.

P. S. Ecce dum posteriores has lineas scribo, Tuas secundas litteras cum adjunctis schedis accipio. Percurrens obiter ultimam plagulam scripti Duillerii, reperio constructionem, quæ cum mea nonnihil affinitatis habere videtur, sed eam examinare jam non licet. Certus tamen sum, quod non invenisset ex sua solutione, nisi *Newtoniana* proprietate adjutus. Optandum esset ut Methodum quam secutus est, adjecisset; partim ut id verum esse patuisset, partim etiam ut videre potuissemus an non eadem perplexitate laboret, quam ipsa ejus solutionis via: Tantam saltem simplicitatem qua ego usus sum, ipsum in constructionis suæ investigatione adhibuisse vix crediderim. Cæterum vides quam brevi tempore, quam prompte hæc omnia expediverim. Triduum enim tantum est, quod tuas priores, cum chartis *Fatianis*, quæ hisce meis ansam dedere, acceperim. Miror vero operam ingentem, quam Fatius huic *Newtoniano* problemati impenderit, describendo curvam laboriose in ampliori, ut dicit, charta, & calculando integram tabulam, cui forte non unam, alteramve tantum horam destinaverat. Jam vide annon meliori jure sua propria verba ipse in sinum retundere possim, dicendo. *Quasi vero manus darent*, *quicun-*

1699 August. *quicunque in arenam e vestigio descendere nolentes, intra præstitutum tempus problema non solvissent. Problema* inquam, *cui solvendo auctor opportunum tempus nactus fuerit, cui tractando forsan multos annos insudaverit; quod elegerit ipse, quod amaverit, ac ardentiori studio prosecutus fuerit, & quod mihi hactenus ignotum in* NEWTONI *libro delituit. Id me interim paratum corripuit, quamvis adeo propria studia non deseruerim.* Sunt enim & mihi multa agenda, & forte non minoris momenti quam negotia DUILLERII, qui sui juris, paratus esse semper deberet ad problemata solvenda, si tanta, ut jactat, dexteritate pollet. Vale, Vir Amplissime, & fave.

Groningæ 7. Augusti 1699.

Tuo Cultori
addictissimo J. BERNOULLI.

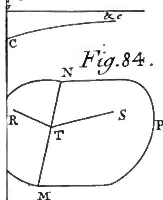
P. S. Misi tibi nuper per aliquem *Saxonem* studiosum Medicum Disputationem meam *De nutritione*, * scire velim an acceperis.

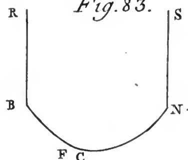
Quis quæso iste Dom. S. cui, ut videtur, DUILLERIUS dentes etiam monstrat...............

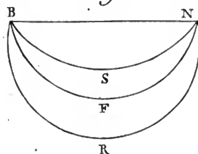
Legi Tua de progressionibus: † mihi nimis abstracta & abstrusa videntur. Habui etiam consimiles speculationes aliquando.

* Opp. Tom I. N°. LIII. pag. 273.
† De quibus in P. S. Epist. Præced.

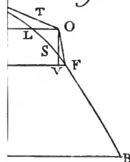
EPIS-

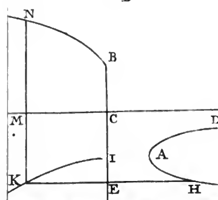

Fig. 82.
&c
C
Fig. 84.
N
R
S
P
T
M

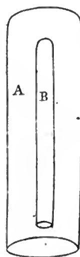

Fig. 83.
R
S
B
N
F
C


Fig. 85.
B
N
S
F
R

C


Fig. 88.
T
O
L
S
F
V
B


N
B
M
C
D
I
A
K
E
H


Fig. 87.
A
B



EPISTOLA XCVII.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Reſponſio ad præcedentem.

De ſuis ad VOLDERUM *litteris. De opuſculo* Fatiano. *Varia.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratiſſime!

CUm Dominus DE VOLDER quæſtus fuerit, objectiones quaſdam ſuas a me præteritas fuiſſe, ideo reſpondeo ample ſatis, & ni fallor omnem ſpeciem difficultatis circa actionis æſtimationem tollo; ac rationem explico cur in actionibus liberis, ſeu potentiam ſuam mere exercentibus actio & vis agendi, non tantum ab effectu, ſed etiam ab effectus promptitudine debeant æſtimari, ſed in actionibus violentiam facientibus, & potentiam ſuam agendo deſtruentibus, non promptitudinis, ſed ſimpliciter effectus realis quantitas ſit æſtimanda, & ita quæ nunc dico cum iis quæ dixi olim non concilientur tantum, ſed & pulcherrime conſpirent, ut in affectu reali nulla, in affectu formali omnimoda temporis ratio habeatur. 1699 Sept.

Quod ſi Dnus. VOLDERUS ea æquitate uti pergit, quam initio oſtendere viſus eſt, non dubito, quin ſibi in hoc argumento ſatisfactum profiteatur.

Doctrinam de ſubſtantiarum activitate, magis adhuc a materia ſenſibuſque abſtractam, nunc agitare inutile putavi, donec de re faciliore conveniamus. Dicat ille, an non dicat, ſe de ſententiæ circa ſubſtantiam meæ demonſtratione jam deſperare, non refert; neque ideo æquum eſt ut ſtatim, omiſſis aliis factu neceſſariis, in hæc ab uſu remotiora incumbam, & nondum ſatis digeſta immature effundam, ideo tantum ut ridicula vanitate apud ipſum jactare me demonſtratorem poſſim.

Et qua id, quæſo, ſpe aggrederer, ſi in rebus mathematicis, &

1699 Sept. & meo judicio liquidissimis sibi satisfieri non pateretur? Ad convincendos homines in methaphysicis alio scribendi genere esset opus, cujus formam concepi magis animo, quam expressam habeo.

Cæterum nolim ut meo nomine de rigore ejus apud ipsum queraris; quid enim ille rigor, vel si mavis, obstinatio, si pergeret, mihi nocet? Aut quid aliud facit, quam ut ipse sibi aditum aperiri vetet? Difficultates objicientium libenter admitto, atque etiam solvo; ac dum id facio, non parum lucis spargo. Aliud, fateor, est difficultatibus respondere, aliud quæsita demonstrare. Sed qui partem contemneret muneris, an Tu illi totum obtrudendum putares? Adde rem esse maximam satisfacere difficultatibus, ausimque dicere, a nemine hactenus præstitam in Philosophia. Facile crediderim pluris ipsi videri, intimam aperiri naturam substantiæ, quam æstimari corporum vires. Sed hæc ipsa virium æstimatio mentem præparat, ut facilius sustineat majorem illam lucem, qua perstringuntur nimis, velut offusa caligine, qui vulgi & *Cartesianorum* etiam notionibus circa naturam materiæ, motus & virium sunt as-obcecati; itaque per hanc portam a Mathesi ad Metaphysicam transeundum censeo.

Non igitur tam nostrum est queri, quam aliis viam rectam monstrare, & ad ejus studium hortari; si negligant, nec ipsorum est de nobis, nec nostrum de ipsis, sed ipsorum de se ipsis queri.

Expecto ut *Fatianum* Libellum mihi per partes remittas; nam Dnus. MENCKENIUS prius relationem de eo petit *Actis* inseri, quam refutetur. Eam curabo ut habeat a partium studio alienam: Jungam deinde responsionem meam, & excerpta ex Tuis, tum quibus Problema figuræ minimum in fluido resistentis melius ipso solvis, tum etiam alia præsertim pertinentia ad narrationem Dni. MANNEVILLÆI, sed dissimulato penitus nomine viri optimi. Addam etiam quam prompte rem expediveris.

Credibile est, tum demum resumsisse Problema Brachystochronæ FATIUM, quando *Acta Eruditorum* cum Methodis in *Angliam* pervenere. Quis vero his ita positis, quæ ex narratione Dni. MANNEVILLÆI verissima esse non dubito, non statim judicet

dicet falsum esse, quod ait perspectum sibi fuisse consensum inter 1699
Brachystochronam, & lineam opticam undarum. Sept.

Ille S. quem invadit, est Dominus Sault, qui, *Gregoriano* credo more, speciem quandam solutionis vel demonstrationis affectavit, cui parem non fuisse facile credo. Sed æquum erat ut Dnus. Fatius a se inciperet, antequam alios reprehendere auderet: ab omni vitio immunis esse debet, qui in alium paratus est dicere. Itaque non dubito Saultium, ubi omnia intellexerit, par pari redditurum. Si nonnihil lapsus est, certe modestiæ leges non violavit, nec malis artibus famam quæsivit, ... Certissimum est, nunquam Duillerium ad solutionem *Newtoniani* Problematis fuisse perventurum, nisi *Newtonianam* ante oculos habuisset; nam quam ipse per Labyrinthum suum assecutus est, exitum ex Labyrintho nullum dedisset.

Mea de progressionibus vel potius de expressionibus obiter Tibi inspecta puto; alioqui vidisses nihil esse facilius, nihil naturæ consentaneum magis, patereque etiam Tironi jam sum expertus. Civem Atlanticum, * id est, ut suspicor Tuum, qui mihi se non ignotum dicit, necesse est magis detrahere sibi larvam, ut a me agnoscatur. Vale.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{1}{11}$ Septembr.

Deditissimus
G. G. Leibnitius.

P. S. Doleo tuam *De Nutritione* dissertationem ad me non pervenisse.

* Vid. *Acta Erudit.* 1699. Mart. p. 176.

EPISTOLA XCVIII.

BERNOULII AD LEIBNITIUM

Responsio ad præcedentem.

De Leibnitianis *ad* VOLDERUM *litteris. De lite inter* NEWTONUM & FATIUM. *De libertate Dei. De aëris compressione & elasticitate.*

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

1699 Sept. REmitto tandem ecce Libellum *Fatianum*, quod citius fecissem, nisi inauguratio Recturæ Academicæ, quæ pro hoc anno a Proceribus mihi delata fuit, scribendi otium præripuisset. Forsan & eadem in causa erit, si, ea durante, ad Tuas posthac segnius & negligentius, quam pro more solitus sum, respondero; cujus veniam a Te facile mihi promitto, ubi negotiorum Rectori incumbentium multitudinem perpenderis. Tuæ ad VOLDERUM exaratæ impense placuerunt, commovebunt ipsum haud dubie, si non prorsus permovebunt; perelegans imprimis est distinctio inter effectum formalem & realem, ut inter actiones liberas & violentiam facientes; ubi nimirum ostendis in prioribus rationem habendam promptitudinis, sed non in posterioribus. Ita quidem æstimationem faciendam esse semper putavi; hinc est, quod corporum ascendentium vires ex altitudinibus tantum sint metiendæ, non considerando quanto tempore percurrantur: cum enim corpus ascendendo suam potentiam uniformiter destruat; patet utique parum referre, sive promptius, sive segnius peragatur, quod peragendum est. Vana adeoque est objectio dicentium, corpus quod plus temporis insumat ad eandem altitudinem ascendendo, plus etiam resistentiæ a gravitate recipere; quoniam major tunc numerus sit ictuum quibus grave repellitur.

Alius

1699 Sept.

Alius *Gallus* nuper mihi retulit, inter NEWTONUM & FATIUM litem gravem subortam fuisse; qua vero de causa, illum latebat: hoc tantum pro certo addidit, quod NEWTONUS FATIUM plagii insimulaverit, graviterque exprobraverit ipsi quod alienis inventis superbiat. Displicet fortasse NEWTONO, quod videat invitus arma sua contra nos dirigi.

Ut paucis etiam ad Tuas priores, ad quas nondum respondi, nunc respondeam. Non puto me absolute adeo dixisse Deum omnia facere necessario; prout talis sententia a Theologis & Philosophis damnata est in HOBBIO, & SPINOSA, aliisque; quasi nimirum Deus coacte ageret; minime; Sed ego ita interpretor: Deus agit ex decretis suis æternis, immutabilibus, & irrevocabilibus; adeoque a parte post necessariis; quorum itaque respectu Deus necessario agit; agit tamen etiam liberrime, vel sponte, vel volenter, utpote qui a nulla re extrinseca ad agendum determinatur: ipse præterea Auctor existit liberrimus, & independens, æternorum suorum decretorum; adeo ut hoc sensu sine contradictione dici possit & libere, & necessario agere.

Ut evitemus Logomachiam circa pondus aëris, & ejus condensationem; ego condensationis quantitatem, seu gradum æstimo ex reciproca ratione voluminum, & directa materiæ aëreæ, quæ pondus habet; sive jam habeat partem incomprimibilem, sive non; erit utique pondus aëris condensationi ejus proportionale; finge aërem, volumine *a* contentum, uniformiter extendi, ut occupet volumen $2a$; numquid manente hoc modo pondere condensatio prioris voluminis *a* duplo major est condensatione posterioris voluminis $2a$, adeoque numquid etiam gravitas specifica illius duplo major est gravitate specifica hujus: Finge jam aërem voluminis *a* extendi in volumen $3a$; id est, secundum definitionem condensationis recipere triplo minorem condensationem; recipiet sic etiam triplo minorem gravitatem specificam; siquidem tertia pars aëris in $3a$ contenti, etiam tertiam partem ponderat ejus quod ponderat totus; Et sic porro: adeo ut pondus aëris æqualium voluminum ejus condensationi sit proportionale. Quando præterea dicis, credibile esse aëri æqualiter interspersam esse partem incomprimibilem;

 hoc

1699 Sept. hoc quidem facile largior, si id intelligas de particulis aëris seorsum sumtis, quæ utique solidæ sunt & compressioni non obnoxiæ, & sic non aliqua pars tantum, sed omnis aër erit incomprimibilis. Sed si, prout videtur, certæ parti ipsius massæ tribuis incomprimibilitatem, qualis vulgo aquæ tribuitur; tunc non capio, quo pacto talis materia in aëre comprimibili æqualiter disseminata intelligi possit; nam si disseminata est, ita ut particulæ ejus se mutuo non tangant, ut insulæ in Oceano, quid impedit quo minus propius sibi mutuo accedant, & sic comprimibiles sint, contra hypothesim; eodem nempe modo, quo aqua alias incomprimibilis, sed in vapores resoluta, una cum aere cui admixta est, comprimitur. Quod si vero materiam illam incomprimibilem alio sensu in aëre disseminatam dicas; ut nempe ejus particulæ immediato contactu altera alteram excipiant, tunc rectius diceres partem aëris comprimibilem disseminatam esse in incomprimibili, quam vero hanc in illa; & sic tota massa aërea foret incomprimibilis instar aquæ; immediatus quippe contactus particularum vi compressionem tentanti resisteret; nisi quis dixerit has particulas tam subtiles esse, ut per poros Anthliæ Pneumaticæ expelli possint; hoc vero Tu non supponis. Optarem itaque mentem tuam hac super re clarius percipere; hactenus enim intelligere non possum, quomodo aëri interspersa esse possit materia incomprimibilis, quæ poros corporum non transeat, & tamen compressionem aëris non impediat. Rectissime notas densitatem aëris duplici modo accipi posse; vel ex pondere ipsius & volumine, quæ revera nihi aliud est quam ipsa aëris gravitas specifica; & quidem hæc æstimatio densitatis, qua supra usus, mihi vera & genuina videtur; vel ex compressione, sive vi elastica, seu ex pondere, quod aër potest sustinere in vacuo; verbi gratia, ex altitudine mercurii; hæc æstimatio non nisi impropria est; quia elasticitas non est de essentia compressionis; sicuti exempli gratia, farina in modio ad dimidium fere comprimitur spatium sine renisu. Interim spero me, suo tempore, experimenta facturum ad indagandum quantum incrementa gravitatis specificæ abludant a proportione incrementorum vis elasticæ.

Intelligo jam quomodo accipiendum, quando dixisti aërem rarefac-

refactum videri accipere vim se dilatandi majorem quam proportione 1699
raritatis: nimirum pondus, quod aër rarior, certo caloris gradu Sept.
calefactus, sustentare potest, majorem habere rationem ad pondus, quod idem aër non calefactus sustentat, quam habet pondus, quod aër densior eodem caloris gradu calefactus sustentare valet, ad pondus, quod sustentat non calefactus. Ejus quidem rei experientia mihi nondum constat. Experimentum, quod in eum finem proponis, ope tuborum duorum factu facile videtur: potest tamen, ut puto adhuc facilius institui per duo Barometra communia, quæ in superiori parte ampulla grandiuscula instructa essent; Ea ad usum ita pararentur: implerentur primo more solito mercurio, sed ita tamen, ut pauxillum aëris in utroque remaneret, & quidem in data ratione, exempli gratia, duplo plus in uno quam in altero; id quod facile agnosci potest, si tubi sunt æqualis crassitiei; postea, imposito digito orificio, inverterentur & mercurio stagnanti in vasculo immergerentur; digito subducto, descenderet & mercurius paulo infra solitam altitudinem, ob illud exiguum aëris, quod in tubis relictum est; qui vero aër mirum in modum rarefiet, utpote qui occupabit totum ampullæ spatium, & bonam tubi partem: nihilominus tamen si duo isti tubi, una cum ampullis suis, per totum sibi mutuo sint similes & æquales, erit aër in uno, adhuc duplo major quam in altero, sine sensibili discrimine. Jam ad experimentum faciendum, illa duo Barometra ex eodem loco frigido, in quo sunt, subito transferrentur in eundem locum calidum [exempli gratia, ut effectus perceptibilior fieret in sudatorium valde calefactum:] manifestum est, ob aërem in ampullis inclusum & incalescentem, mercurium fore descensurum, & quidem in eo magis, in quo aër minus est rarus. Id igitur tantum observandum esset, an in illo etiam duplo plus descensurus esset; nam si minus, quam duplo plus, descenderet; tunc conjectura Boylii vera foret. Etenim aër rarior a calore tunc accepisset vim se dilatandi majorem, quam proportione raritatis. Nota quod in fabrica horum Barometrorum, in id incumbendum sit, ut mercurius probe soliciteque purgetur ab aëris bullulis in interstitiis mercurii latentibus; ne aër ex mercurio ascendens, & aëri, qui debita opera in tubis relictus est,

1699 Sept. se se adjungens, rationem relicti aëris in utroque tubo turbaret, & sic experimentum suspectum redderet.

Cæterum probe notas, in Barometro ordinario, calorem parum nocere, ob aëris [scilicet, ejus qui tractu temporis ex mercurio exhalat superioremque tubi partem occupat] magnam raritatem. Imo nihil omnino noceret, si perfecte adeo purgatus esset, mercurius, ut ex eo nihil aëris ascendere posset. Sed id inquirendum esset, annon pressio aëris externi per calorem mutari posset; ita ut ascensus vel descensus mercurii non semper esset effectus mutati ponderis aëris Atmosphæræ, sed etiam interdum solius mutati caloris: quo respectu non Barometrum, sed Thermometrum foret. Quamvis ea de re nullum experimentum habeam; videtur tamen calor solus pressionem aëris atmosphærici augere non posse; ut enim calor elaterium aëris augeat, oportet aërem inclusum esse & coercitum; aër vero atmosphæricus, superveniente calore, libere rarefieri & sursum versus extendi potest; unde cum nullus sit renisus, & interim idem pondus Atmosphæræ conservetur; sequitur subjectum mercurium eadem semper vi premi, quantuscunque calor ingruat.

Si aër metaphysice fingeretur elasticus; id est, si ad infinite exiguum spatium extendi posset; tunc utique esset quod dicis, densitates esse viribus proportionales; id non nego: sed fingi non debet quod non est, ut exinde aliquid probes absolute: aër enim cum annihilari nequeat, neque adeo in infinitum comprimi, habebit vires in majore proportione quam densitates. Vale.

Groningæ 26. Septembris 1699.

Amplitudini Tuæ

Devotissimus

J. BERNOULLI.

EPIS-

EPISTOLA XCIX.

LEIBNITII AD BERNOULLIUM.

Responsio ad praecedentem.

De libertate Dei. De aëris compressione & elasticitate. De WALLISII *Operum Tomo tertio.*

Vir Celeberrime! Fautor Honoratissime!

Cum Tibi nomen Magnifici Rectoris, dignitasque sit collata, (de quo honore gratulor ex animo,) non poteris tam crebro vacare litteris; scilicet suum quaeque res tempus habet. 1699 Octob.

Etiam Spinosa vult Deum non coacte, sed sponte agere. At in eo peccat inter alia, quod Deo adimit electionem; quasi nihil aliud possibile fuerit, quam quod fecit. Videris nunc non dissentire à distinctione Theologorum inter diversos necessitatis modos.

Quod aërem attinet, poterimus discriminis gratia condensationem aestimare ex pondere, quod est in volumine; compressionem vero [nisi meliorem vocem suppeditare potes] ex vi elastica. Hinc si particulae incomprimibiles per aërem sint disseminatae, compressio nihil ad illas pertinebit; & nulla in hac re est difficultas; concipiendae sunt dispersae per modum natantium insularum, & initio non impedient aëris compressionem, sed impedient ut sit condensationi proportionalis, etiamsi talis futura poneretur, si aër esset sincerus. Si vero tanta fieret compressio, ut tandem particulae incomprimibiles omnes se quam arctissime tangerent, tunc etiam compressio ulterior cessaret. Interim revera nihil est prorsus incomprimibile, sed tale intelligitur comparative, sufficitque ad divortium condensationis, vel compressionis, partes esse comprimibiles inaequaliter. Sincerus aër posset habere condensationes compressionibus proportionales, scilicet ad sensum & aliquousque. Revera enim talia in Natura nunquam procedunt, ut in pura Mathesi, & perinde est

1699. Octob. eſt ac cum in deſcenſu gravium, ponimus velocitatem æqualiter creſcere, nempe ad ſenſum & aliquouſque; alioqui nec id rigoroſe verum eſt, & quidem ſi ſatis longa eſſent deſcenſuum ſpatia, etiam ſenſu notari poſſet, quantum regula illa fallat. Abſolute utique fieri non poteſt, ut corpus ſit pure, ſeu metaphyſice elaſticum, & ut ita dicam, πρῶτω ἐλαςικὸν; quia elaſtica vis non eſt aliquid primitivum & mathematicum, etſi pro tali utcunque aſſumatur, ut locus ſit æſtimationi; & perinde eſt condenſationes ponere compreſſionibus proportionales, ac ponere extenſiones viribus tendentibus, ſeu elaſtri proportionales, quod ſolemus facere, aſſumentes aliquid certum & rotundum, pro incerto. Cæterum, quod ais metaphyſice elaſticum debere poſſe comprimi in nihilum, ſeu ſpatium infinite parvum, id non obeſſet; quia ad id etiam opus eſt & vi infinita. Interim revera omnis compreſſio eſt ſubtilioris materiæ expreſſio; unde fieri utique nequit, ut aliquid ſit pure elaſticum, & ut pro aucta vi augeri ſemper compreſſio poſſit.

Perutile erit experimenta aliquando inſtitui, tum de divortio condenſationis & compreſſionis, tum de effectu caloris & frigoris proportione denſitatis aut compreſſionis in aëre ſe exerente. Experimenta mallem in aëre condenſato quam in rarefacto, quia poſſent eſſe ſenſibiliora.

Newtono credo diſplicuiſſe in Fatii ſcripto, primum quod videtur id agere Fatius, ut eum nobiſcum committat; deinde quod ſolutionem ipſius [falſo quidem] contendit perplexiorem ſua; tertio, quod neſcio quid ſibi vindicat in Theoria Gravitatis *Newtoniana* promota; quibus ſuſpicor accedere alia graviora nobis adhuc ignota. Interim videtur Fatius exaggeratis illis [quanquam pro magna parte non immeritis] laudibus adulari voluiſſe Newtono, ut hic illius jactationes, [an plagia?] facilius ferret.

Meas ad Dnum. Volderum noviſſimas Tibi placuiſſe libenter intelligo. Hinc jam experimentum de ejus vel judicio, vel potius candore capiemus, de quibus non parvam hactenus opinionem habui.

Accepi tandem Tomum tertium *Operum* Wallisii, miſſu Auctoris; in eo recuduntur Muſici veteres ab ipſo jam editi, & Arenarius

narius ARCHIMEDIS, cum Comm. EUTOCII, & fragmentum Libri secundi *Collectionis* PAPPI hactenus ineditum, ubi de calculo numerico Veterum. Adjectæ sunt Epistolæ quædam Mathematicæ, ex quibus maximam partem constituunt meæ olim ad OLDENBURGIUM scriptæ, & nuper [occasione recensionis harum] ad ipsum WALLISIUM. Quæsivit Cl. WALLISIUS, an aliquid vellem mutatum, sed cum nec autographum invenirem apud me, nec inde ex *Anglia* ad me apographa accersere tanti putarem, rem totam ipsius judicio commisi, nec poenitet: satis enim apparebit inde, quid mihi, quid aliis debeam. 1699 Octob.

WALLISIUS misit mihi Epistolam Secretarii Societatis Regiæ, ex qua patet FATIUM per subreptionem impetrasse approbationem libelli, nec in me tam inficete dicta probari. Vale & Fave.

Dabam *Hanoveræ* $\frac{20}{30}$ Octobris 1699.

Deditissimus

G. G. LEIBNITIUS.

EPISTOLA C.

BERNOULLII AD LEIBNITIUM.

Responsio ad præcedentem.

De libertate Dei. De aëris condensatione, & elasticitate. De WALLISIO. *Litteræ* Volderianæ.

Vir Amplissime atque Celeberrime! Fautor Honoratissime!

QUod de Rectoris nominis honore mihi gratulari dignatus fueris, ago gratias. Etiam SPINOSA, dicis, vult Deum non coacte, sed sponte agere? Quid tum? Certe in hoc non peccavit; adeoque nec ego, qui idem dixi; At in eo, dicis, peccavit inter alia, quod Deo adimit electionem; quasi nihil aliud possibile fuerit, quam 1699 Novemb.

1699 Nov. quod fecit. Concedam in eo peccasse. Ego vero, qui id non statui, in eo etiam non peccavi. Dixi, & etiamnum dico, nihil aliud possibile esse [non fuisse] quam quod Deus fecit & faciet [non fecit tantum]: præterea Deo non ademi electionem jam factam, secundum quam omnia decrevit; sed ipsi adimo electionem adhuc faciendam, tanquam absurdum quid, & perfectioni ejus repugnans; nihil enim amplius eligere potest, quod non ab æterno jam fuerit electum. Mallem igitur, ut ulteriori disceptatione abstineamus, quam ut pergas parallelismum instituere me inter & exosum SPINOSAM: Quod si enim Tuæ litteræ in aliorum inciderent manus perpende quæso, qualem effectum facerent; apud illos præsertim, qui hæreticorum classi me voluerunt adscribere.

Placet quod discriminis gratia, aëris condensationem æstimes ex pondere, quod est in volumine; compressionem vero ex vi elastica; quamvis condensatio & compressio idem fere significent; nempe condensare & comprimere est in minus spatium compellere, sive sint elastica, sive non sint elastica: quemadmodum farina, aliaque id genus, etiam comprimuntur. Cum igitur, loco compressionis, significantiorem vocem expetas, putem ego eo modo adhiberi posse vocem coactionis; coactio enim supponit resistentiam; seu illa tantum coguntur, quæ resistunt & reniguntur, ut elastica faciunt. Verissimum est quod dicis, compressionem, seu coactionem, non pertinere ad particulas incomprimibiles per aërem disseminatas; sed eas seorsum considerando; nam si junctum sumamus, tota moles aërea consistit ex particulis incomprimibilibus. Aërem enim concipio, vel ut cumulum lanæ, cujus filamenta utique constant ex particulis solidis; vel ut globulos, insularum instar natantes in materia subtili, per interstitia illorum intercurrente, & patentiorem viam affectante; in quo elasticitatem proprie consistere puto; vel etiam concipi potest aër ut compositum quod ex minutissimis Vorticulis, majus spatium circa centra sua continuo affectantibus; eum in modum fere, quo CARTESIUS suos Vortices celestes imaginatus est; vel aliis multis modis aëris natura effingi potest. Quocunque modo vero concipiatur compositus, tamen semper erit ex particulis solidis, eo sensu, quo Tu illas incomprimibiles vocas; nam & ego sentio

sentio tecum nihil perfecte solidum, vel prorsus incomprimibile esse. Quando dixi metaphysice elasticum debere posse comprimi in nihilum; utique non negavi, ad id etiam opus esse vi infinita: sed hoc ipso ostendere volui, nihil posse esse metaphysice elasticum, quia nulla materia, etiamsi vi infinita adhibita, ad nihilum, seu ad spatium infinite parvum, redigi potest. 1699 Nov.

De Newtono & Fatio hactenus nihil amplius inaudivi. Videre valde optarem Epistolam illam Secretarii Societatis Regiæ Anglicanæ, ex qua patere dicis Fatium per subreptionem impetrasse approbationem libelli. Quid interim de tua Apologia factum est? Comparuit ne in *Actis Lips.* †

Wallisii Operum Tomum tertium nondum vidi. Rumor Auctorem jam ante annum mortuum dicebat; sed video revixisse. Forte ægre feret, quod ipsum nominaverim * *strenuum gloriæ Anglicanæ vindicem.* Audiveram, jam ante Tuas acceptas, a cognato quodam Cassini ex Anglia veniente & hac transeunte, se Wallisium adiisse, eumque adeo adhuc in vivis esse; tum autem schediasma meum jam fuerat *Lipsiam* missum, & forte jam impressum, neque adeo in potestate mea verba illa delendi. Quamvis non sint injuria, possunt tamen Wallisium, non nihil biliosum, exacerbare. Modo me mitius tractet quam omnium postremo Prestetum; id quod a senectutis ejus phlegmate, si quod habet, spero.

Ex adjectis Volderi litteris videbis Tuas postremas ad ipsum datas ipsi etiam non parum placuisse; movet interim etiamnum suas instantias; insistit præsertim demonstrationi a Te dandæ pro activitate substantiæ, ex qua mirum quantum inde elici posse sibi persuadet: Nec immerito omnium difficultatum, quas objicit, momentosissima mihi videtur, quam petit ex ipso Tuo modo explicandi commercium animæ & corporis; quas duas substantias in se mutuo nihil posse ipse statuis; quamvis interim earum mutationes, ex suis utriusque propriis principiis, simul fiant. Sic enim sequi putat Volderus etiam Entelechias [genere scilicet ab animalibus non differen-

† 1700. Mai. pag 198.
* In schediasm. de Cycloïdis Segmentis quadrabilibus. Vid. Acta Erud. 1699. Jul. pag. 318.

1699 Nov. ferentes] nihil in materias, neque materiam in Entelechias quicquam posse. Memini hanc eandem objectionem jam semel a VOLDERO Tibi factam fuisse; miror quod tum non responderis; mihi quidem nonnulla responsione digna videtur. Cæterum, si Tecum VOLDERUS, ita & mecum, ferram adhucdum reciprocat. Hactenus eum nondum convincere potui, ut agnosceret æquipollentiam inter ascensus continuos & interruptos; plus enim virium requiri arbitratur ad hos quam ad illos; spes tamen superest ad convictionem. Jubet me [scilicet, ut putat in majori gratia apud Te existentem] a Te petere demonstrationem activitatis substantiarum sibi denegatam; Addit, [credo per jocum] cum ego in conclusione Tecum faciam, Te certe habere locum, quo mecum, qui mentem jam purgatam habeam, hanc demonstrationem communices; nequaquam enim se credere me hujus rei cognoscendæ se minus avidum. Fateor quidem me hujus rei avidum esse; sed nollem Te urgere, si viderem id Tibi incommodum fore.

Nescio qui fiat, quod nihil litterarum longo tempore ex Gallia acceperim; Habes ne tuum Diploma Receptionis in Academiam? meum saltem mihi nondum est missum. Quid hæc cunctatio sibi velit, hariolari non possum.

. . . . Vale

Groningæ 21. *9bris* 1699.

Amplitudini Tuæ

Devotissimus
BERNOULLI.

FINIS TOMI PRIMI.







